GROUPES : EXERCICES

Notations : dans toute la feuille, G, G_1, G_2 désignent des groupes (de neutre $e, e_1, e_2 \dots$) ;
H désigne souvent un sous-groupe de G ; $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers

① a) Donner un exemple de G et de x, y dans G tels que $o(x) \wedge o(y) = 1$ et $o(xy) \neq o(x)o(y)$
b) ______________________________ $xy = yx$ et $o(xy) \neq \text{ppcm}(o(x), o(y))$
c) Soient x, y dans G d'ordre fini tels que $xy = yx$ et $<x> = <y>$. Démontrer $o(xy) = \text{ppcm}(o(x), o(y))$
d) Dans $G = GL_2(\mathbb{Q})$, démontrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ sont d'ordre fini et AB d'ordre infini.

② a) Donner un exemple de G dont tous les éléments sont d'ordre fini et qui n'est pas d'exposant fini.
b) Donner un groupe infini d'exposant fini.
c) Donner un exemple de G d'exposant fini ne possédant pas d'élément d'ordre $\exp(G)$
d) Donner un exemple de G fini non cyclique vérifiant $\exp G = |G|$.

③ a) Déterminer $\exp(D_n)$, où D_n (pour $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$) désigne le groupe diédral à $2n$ éléments
b) Pour n dans $\mathbb{N}_{\geq 2}$, déterminer $\exp(\mathfrak{S}_n)$.

④ En utilisant la notion d'exposant, démontrer :
soit K un corps (commutatif) ; tout sous-groupe fini de $K^\times$ est cyclique.

⑤ On note $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par l'ensemble des commutateurs $\{\underbrace{ghg^{-1}h^{-1}}, (g,h) \in G^2\}$
a) Pour tous g, h dans G, exprimer $[g,h]^{-1}$ comme un commutateur (notation : $= [g,h]$)
b) ______ g_1, g_2, h dans G, exprimer $h[g_1, g_2]h^{-1}$ comme un commutateur.
c) Soit H un sous-groupe de G contenant $D(G)$.
Démontrer : H est distingué dans G et G/H est abélien.
d) Soit H un sous-groupe distingué de G tel que G/H est abélien. Démontrer que H contient $D(G)$.
e) En déduire $D(G) = \bigcap_{\substack{H \trianglelefteq G \\ G/H \text{ abélien}}} H$
f) Donner un exemple de G pour lequel $\{[g,h], (g,h) \in G^2\}$ est un sous-groupe de G.
g) ______________________________ n'est pas un sous-groupe de G.
h) Déterminer le groupe dérivé des groupes classiques apparaissant à l'agrégation.

⑥ Pour G_1, G_2 des groupes non triviaux, donner un sous-groupe de $G_1 \times G_2$ qui n'est pas de la forme $H_1 \times H_2$,
pour H_1 un sous-groupe de G_1 et H_2 un sous-groupe de G_2.

⑦ Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes d'ordre 2 distincts de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Démontrer que $\begin{array}{l} H_1\times H_2 \to G \\ (h_1,h_2)\mapsto h_1h_2 \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

⑧ On suppose G abélien. Soit H un sous-groupe de G. Démontrer qu'il existe un sous-groupe K de G tel que l'application $\begin{array}{l} H\times K \to G \\ (h,k)\mapsto hk \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

⑨ On suppose G abélien (et on le note additivement).

a) Soit m dans $\mathbb{N}^*$. Démontrer que $m.G := \{m.g\,,\, g\in G\}$ ("puissances m-ièmes") et $G[m] := \{g\in G \,/\, m.g = 0_G\}$ ("m-torsion") sont des sous-groupes de G.

b) Soit p un nombre premier. Démontrer que $G[p^\infty] := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G[p^n]$ est un sous-groupe de G.

c) Démontrer que $G_{tor} := \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} G[m]$ est un sous-groupe de G (appelé "sous-groupe de torsion de G")

d) Démontrer que l'application $\begin{array}{l} \bigoplus_{p\in\mathcal{P}} G[p^\infty] \longrightarrow G_{tor} \\ (g_p)_{p\in\mathcal{P}} \longmapsto \sum_{p\in\mathcal{P}} g_p \end{array}$ est un isomorphisme de groupes (où $\bigoplus_{p\in\mathcal{P}} G[p^\infty]$ est le sous-groupe de $\prod_{p\in\mathcal{P}} G[p^\infty]$ formé des familles à support fini).

⑩ On suppose G abélien fini.

a) Pour p dans $\mathcal{P}$, démontrer que $G[p^\infty]$ est l'unique p-Sylow de G.

b) Démontrer que G est isomorphe au produit cartésien de ses p-Sylow non triviaux.

(c) Démontrer que la réciproque du théorème de Lagrange est vraie pour G.

⑪ a) Donner un exemple de G et m dans $\mathbb{N}^*$ tels que $\{g^m, g\in G\}$ n'est pas un sous-groupe de G.

b) ______________________ $\{g\in G/g^m=e\}$ ______________________

⑫ On considère dans $GL_2(\mathbb{C})$ les matrices $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i\end{pmatrix}$ $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0\end{pmatrix}$. On admet que l'ensemble $\{I_2, -I_2, I, -I, J, -J, K, -K\}$ forme un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$, noté $\mathbb{H}$ (ou $\mathbb{H}_8$).

a) Déterminer l'ordre des éléments de $\mathbb{H}$, ses sous-groupes, ses sous-groupes distingués, son centre, son sous-groupe dérivé, son abélianisé.

b) Démontrer : pour tous sous-groupes K et N de $\mathbb{H}$ vérifiant N distingué dans $\mathbb{H}$, $\langle N, K\rangle = \mathbb{H}$ et $N\cap K = \{I_2\}$, on a $N=\{I_2\}$ ou $K=\{I_2\}$. Ainsi, $\mathbb{H}$ n'est pas un produit semi-direct.

⑬ Donner un exemple de n dans $\mathbb{N}_{\geq 2}$ et de σ dans $\mathfrak{S}_n$ tel que : $o(\sigma)=n$ et σ n'est pas un n-cycle

⑭ Soit n dans $\mathbb{N}_{\geq 2}$. Démontrer que tout sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ d'indice n est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$

⑮ Décrire (nombre, éléments, structure ...) les 2-Sylow de $\mathfrak{S}_4$, puis de $\mathfrak{A}_4$.

⑯ Soit p un nombre premier et n dans $\mathbb{N}^*$. Démontrer que $GL_n(\mathbb{F}_p)$ contient un élément d'ordre p^n-1.

⑰ a) Décrire les 5-Sylows de $\mathfrak{S}_5$ (nombre, éléments, structure...)

b) En déduire que $\mathfrak{S}_6$ contient un sous-groupe d'indice 6 sans point fixe (ie H tq $\bigcap_{\sigma\in H} \mathrm{Fix}\,\sigma = \emptyset$).

(18) Démontrer que tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.

(19) Démontrer qu'un groupe d'ordre 255 n'est pas simple.

(20) On suppose G fini, non trivial, on note p le plus petit diviseur premier de $|G|$ et on fixe H un sous-groupe de G.

a) On suppose $[G:H]=p$; démontrer que H est distingué dans G.

b) On suppose $|H|=p$ et H distingué dans G ; démontrer : $H \subseteq Z(G)$

(21) a) On suppose $G/Z(G)$ monogène ; démontrer que G est abélien.

b) Donner un exemple de G non abélien avec $G/Z(G)$ abélien.

(22) Soient p un nombre premier et G un groupe fini (non trivial) d'ordre une puissance de p.

a) Soit X un ensemble fini non vide muni d'une action de G et X^G l'ensemble des points fixes par cette action. Démontrer : $|X| \equiv |X^G| \mod p$

b) Démontrer : $Z(G) \neq \{e\}$

c) Démontrer que la réciproque du théorème de Lagrange est vraie pour G.

d) Démontrer que tout groupe d'ordre p^2 est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.