Sur les séries de Fourier

On rappelle que si $f \in \mathbb{L}^1([0,2\pi])$ alors les coefficients de Fourier sont définis pour $n \in \mathbb{Z}$ par

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

Les noyaux de Dirichlet et Fejér sont définis par

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}, \qquad K_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x),$$

de sorte que

$$K_n(x) = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right|^2 = \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{ikx} = \frac{\sin^2(nx/2)}{n\sin^2(x/2)}.$$

On pose alors

$$S_n(f)(x) := D_n * f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}, \quad \sigma_n(f)(x) := K_n * f(x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)c_k(f)e^{ikx}.$$

Théorèmes de convergence

Théorème 1 (Théorème de Fejér)

1. *Soit f une fonction continue, $2\pi-$périodique. Alors pour tout $n \geq 1$, $||\sigma_n(f)||_\infty \leq ||f||_\infty$ et $||\sigma_n(f) - f||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*
2. *Soient $p \geq 1$ et $f \in \mathbb{L}^p_{2\pi}$. Alors pour tout $n \geq 1$, $||\sigma_n(f)||_p \leq ||f||_p$ et $||\sigma_n(f) - f||_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

Théorème 2 (Théorème de Dirichlet) *Soit $f \in \mathbb{L}^1_{2\pi}$ admettant des limites $f(x_0^\pm)$ à droite et à gauche en x_0 ainsi que des dérivées à droite et à gauche, alors les sommes partielles de Fourier convergent*

$$S_n(f)(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

En particulier, si f est continue sur toute la période $[0,2\pi]$ et C^1 par morceaux, alors pour tout $x \in [0,2\pi]$, on a

$$S_n(f)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

Théorème 3 (Convergence $\mathbb{L}^2$ et Parseval) *Soit $f \in \mathbb{L}^2_{2\pi}$ alors $||S_n(f) - f||_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. De plus, on a*

$$||f||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Plus généralement, si $f, g \in \mathbb{L}^2_{2\pi}$ alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\overline{c_n(g)}.$$

Exercice 1 (Issu de AP2017D, P2, I.A.1) *Montrer que si la série* $\sum_n |c_n(f)|$ *est convergente, alors la série de fonctions* $S_n(f)$ *converge normalement vers* f*.*

Exercice 2 *Pour* $a \in \mathbb{R}$*, on désigne par* τ_a *l'opérateur de translation* $\tau_a(f)(x) = f(x+a)$ *agissant sur les fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Lorsque cela a un sens, exprimer* $c_n(\tau_a(f))$ *en fonction de* $c_n(f)$*. Montrer que pour tout* $p \geq 1$*, si* (a_n) *est une suite réelle tendant vers zéro et si* $f \in \mathbb{L}^p_{2\pi}$*, on a* $||\tau_{a_n}(f) - f||_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*.*

Exercice 3 *Avec les notations de l'exercice 2 ci-dessus, exprimer* $c_n(\tau_{\pi/n} f)$ *en fonction de* $c_n(f)$*. En déduire le lemme de Riemann–Lebesgue. Connaissez-vous une preuve alternative ?*

Exercice 4 *Dans la seconde partie du Théorème 2, montrer que si* f *est continue sur toute la période* $[0, 2\pi]$ *et* C^1 *par morceaux alors* $S_n(f)$ *converge non seulement ponctuellement, mais normalement vers* f*.*

Exercice 5 *Soit* f *la fonction* $2\pi-$*périodique égale à* $x \mapsto |x|$ *sur* $[-\pi, \pi]$*. Calculer les coefficients de Fourier de* f *et en déduire la valeur de* $\zeta(4) = \sum_{n\geq 1} 1/n^4$*. De la même façon, soit* g *la fonction* $2\pi-$*périodique et impaire égale à* $x \mapsto x(\pi - x)$ *sur* $[0, \pi]$*, calculer les coefficients de Fourier de* g *et en déduire la valeur de* $\zeta(6) = \sum_{n\geq 1} 1/n^6$*.*

Exercice 6 (Issu de AP2020, I.3) *Soit* f *la fonction* $1-$*périodique égale à* $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor - 1/2$*. Déterminer les coefficients de Fourier de* f *et en déduire que* $-\sum_n \frac{\sin(2\pi n x)}{\pi n}$ *converge simplement vers* f *pour* $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$*.*

Exercice 7 (Inégalité iso-périmétrique) *Soit* $\gamma = (\gamma_t)_{t\in[0,2\pi]}$ *une courbe de classe* C^1 *dans* $\mathbb{C}$ *telle que* $\gamma_0 = \gamma_{2\pi}$ *et* $|\gamma'_t| = 1$ *pour tout* $t \in [0, 2\pi]$*. On note* A *l'aire du domaine bordé par* γ

$$A = \left| \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \gamma_t \overline{\gamma'_t} dt \right|.$$

Montrer que $|A| \leq \pi$ *avec égalité si et seulement si* γ *est un cercle.*

Exercice 8 (Inégalités de Wirtiger) *Soit* f *une fonction* 2π *périodique de classe* C^1 *et telle que* $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$*. Montrer l'inégalité*

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt,$$

avec égalité si et seulement si f *est de la forme* $f(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$*.*

Exercice 9 *Caractériser les fonctions* $f \in C^2_{2\pi}$ *qui sont telles que* $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$ *et* $|f''| \leq |f|$*.*

Exercice 10 *Caractériser les fonctions* $f \in C^\infty_{2\pi}$ *qui sont telles qu'il existe* $M = M(f) > 0$ *et* $\lambda = \lambda(f) > 0$ *tels que* $||f^{(k)}||_\infty \leq M\lambda^k$ *pour tout* $k \geq 1$*.*

Exercice 11 *On fixe un entier* $n \geq 1$*. Quel est le développement en série de Fourier de la fonction* $x \mapsto \cos(x)^n$ *? Pensez à la fonction caractéristique d'une marche aléatoire simple sur* $\mathbb{Z}$ *! En déduire la valeur de* $\int_0^{2\pi} \cos(x)^n dx$*.*

Exercice 12 (Équation de la chaleur sur le cercle) *Soit* $u_0 \in \mathbb{L}^2_{2\pi}$*. Montrer qu'il existe une unique application* $u \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$*, qui est* $2\pi-$*périodique en* x *et telle que*

$$\partial_t u(t,x) = \partial^2_{x,x} u(t,x), \quad u(0,x) = u_0(x).$$