Université de Rennes 1
Année 2024/2025

Agrégation–Préparation à l'écrit-TD1

Dans toute la suite, $\mathbf{F}_q$ dénote le corps fini à q éléments.

1 - Soit $n \in \mathbf{N}$ et E un espace vectoriel sur $\mathbf{F}_q$ de dimension n. Pour un entier m avec $0 \leq m \leq n$, on note X_m l'ensemble des m-tuplets $(x_1, \ldots, x_m) \in E^m$ formés de m vecteurs linéairement indépendants.
(i) Calculer $\mathrm{Card}(X_m)$. En déduire $\mathrm{Card}(GL_n(\mathbf{F}_q))$.
(ii) Quel est le cardinal de l'espace projectif $\mathbf{P}(E)$, c-à-d combien y-a-t-il de droites vectorielles dans E?

2 - Soit $n \geq 2$ un entier. Soit $\mu_n(\mathbf{F}_q)$ le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbf{F}_q$. Montrer que $\mathrm{Card}(\mu_n(\mathbf{F}_q)) = \mathrm{pgcd}(n, q-1)$. En déduire le cardinal de $PSL_n(\mathbf{F}_q)$.

Indication: Soit $d = \mathrm{pgcd}(n, q-1)$. Pour $x \in \mathbf{F}_q^*$, montrer que $x^d = 1$ si et seulement si $x \in \mu_n(\mathbf{F}_q)$. Combien de racines possède le polynôme $X^d - 1$ dans $\mathbf{F}_q^*$?

3 - Montrer que $GL_2(\mathbf{F}_2)$ est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$.

Indication: Faire opérer $GL_2(\mathbf{F}_2)$ sur $\mathbf{F}_2^2$.

4 - Soit $E = \mathbf{F}_3^2$.
(i) Construire, au moyen des 4 droites vectorielles D_1, D_2, D_3, D_4 de E un homomorphisme surjectif $\epsilon : GL_2(\mathbf{F}_3) \to \mathfrak{S}_4$.
(ii) Montrer que ϵ induit un isomorphisme entre $PSL_2(\mathbf{F}_3)$ et le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.
(iii) En déduire que $SL_2(\mathbf{F}_3)$ n'est pas parfait (Un groupe G est parfait s'il coïncide avec le sous-groupe $[G, G]$ engendé par les commutateurs.)

5 - Montrer que $PSL_2(\mathbf{F}_4)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.

Indication: $PSL_2(\mathbf{F}_4)$ opère sur l'ensemble X des droites vectorielles de $\mathbf{F}_4^2$. Quel est le cardinal de $PSL_2(\mathbf{F}_4)$?

6 - Montrer que $PGL_2(\mathbf{F}_5)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$ et que $PSL_2(\mathbf{F}_5)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.

7 - Soit $n \in \mathbf{N}$ et E un espace vectoriel sur $\mathbf{F}_q$ de dimension n.

Pour un entier m avec $0 \leq m \leq n$, soit $G_{n,m}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension m. Trouver une formule pour $\mathrm{Card}(G_{n,m})$. (*Indication:* $GL_n(\mathbf{F}_q)$ opère transitivement sur $G_{n,m}$.)

8 - Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on munit $M_n(\mathbf{K}) \cong \mathbf{K}^{n^2}$ de la topologie standard.
(i) Montrer que $GL_n(\mathbf{Q})$ est dense $GL_n(\mathbf{R})$ et que $SL_n(\mathbf{Q})$ est dense $SL_n(\mathbf{R})$.
(ii) Montrer que $GL_n(\mathbf{C}), SL_n(\mathbf{C})$ et $SL_n(\mathbf{R})$ sont connexes par arcs et que $GL_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe.

9 - Soit $n \geq 1$ un entier et $\Gamma = SL_n(\mathbf{Z})$. Pour un nombre premier p, on considère l'homomorphisme $\varphi_p : \Gamma \to SL_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ induit par la réduction modulo p, i.e. $\varphi_p((a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}) = (\overline{a}_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, où $\overline{a}$ désigne la classe de $a \in \mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
(i) Montrer que φ_p est surjectif.
(ii) On note Γ_p le noyau de φ_p. Quel est l'indice de Γ_p dans Γ?
(iii) On suppose que $p \geq 3$. Montrer que Γ_p ne possède pas d'élément d'ordre fini distinct de l'identité.
(iv) En déduire que Γ ne possède, à isomorphisme près, qu'un nombre fini de sous-groupes finis.

10 - Soit $n \geq 2$, et soit $a = (a_1, \ldots, a_n)^t \in \mathbf{Z}^n$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) il existe une matrice $A \in SL_n(\mathbf{Z})$ dont la première colonne est a.
(ii) $\mathrm{pgcd}(a_1, \ldots, a_n) = 1$.