UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Préparation à l'agrégation externe

Feuille d'exercice de théorie des groupes

Le but de cette feuille est de s'entraîner à l'utilisation des théorèmes de Sylow et des actions de groupes, en étudiant deux manières de montrer que tout groupe simple à 60 éléments est isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_5$.

On note G un groupe simple à 60 éléments.

Exercice 1 : Preuve par les 2-Sylow

1. Pour $p \in \{2, 3, 5\}$, notons n_p le nombre de p-Sylow du groupe G. En utilisant les théorèmes de Sylow, montrer que $n_2 \in \{3, 5, 15\}$, $n_3 \in \{4, 10\}$ et $n_5 = 6$.
2. Montrer que l'action de G par conjugaison sur ses p-Sylow donne un morphisme de groupes ι_p de G dans $\mathfrak{S}_{n_p}$.
3. Montrer que ce morphisme est injectif et en déduire que $n_p \geqslant 5$.
4. Montrer que le morphisme de groupes obtenu en composant la signature avec ι_p est trivial, et en déduire que si $n_p = 5$ alors ι_p donne un isomorphisme du groupe G avec $\mathfrak{A}_5$.
5. En déduire que l'on peut supposer $n_2 = 15$, $n_3 = 10$ et $n_5 = 6$, ce que l'on fait dans la suite de cet exercice.
6. Montrer que les 2-Sylow du groupe G sont soit tous cycliques d'ordre 4, soit tous isomorphes à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
7. Si les 2-Sylow étaient cycliques, montrer que le groupe G contiendrait 30 éléments d'ordre 4, 20 éléments d'ordre 3 et 24 éléments d'ordre 5. Est-ce possible ?
8. Montrer qu'il existe des 2-Sylow S et T du groupe G dont l'intersection est un sous-groupe d'ordre 2. Notons g l'élément non neutre de ce sous-groupe.
9. Soit $Z(g)$ l'ensemble des éléments du groupe G qui commutent avec g. Montrer que $Z(g)$ est un sous-groupe de G qui contient S et T.
10. En déduire que $|Z(g)| \in \{12, 20, 60\}$.
11. Montrer que l'action du groupe G sur l'ensemble $G/Z(g)$ par translation à gauche donne un morphisme de groupe injectif ρ de G dans l'ensemble des permutations de $G/Z(g)$.
12. En déduire que $|G/Z(g)| \geqslant 5$, puis que $|Z(g)| = 12$.
13. En déduire que le morphisme ρ donne un morphisme du groupe G dans $\mathfrak{S}_5$.
14. En considérant le morphisme composé de la signature et de ρ, montrer qu'on obtient ainsi un isomorphisme de G sur $\mathfrak{A}_5$.
15. Quelle est la décomposition en cycles des éléments d'ordre 2 de $\mathfrak{A}_5$? En déduire que le groupe $\mathfrak{A}_5$ a 5 sous-groupes d'ordre 4, isomorphes à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

Exercice 2 : Preuve par les 5-Sylow

1. Montrer que le groupe G a 6 sous-groupes d'ordre 5, et que l'action de G sur ces sous-groupes par conjugaison donne un morphisme de groupes injectif θ de G dans $\mathfrak{S}_6$.
2. En composant avec la signature, montrer que l'image de ce morphisme est un sous-groupe d'indice 6 du groupe $\mathfrak{A}_6$.

3. Soit H un sous-groupe d'indice 6 du groupe $\mathfrak{A}_6$. Montrer que l'action par translation du groupe H sur l'ensemble $\mathfrak{A}_6/H$ donne un morphisme de groupe de H dans $\mathfrak{S}_6$.
4. Montrer que l'image de ce morphisme n'est pas réduite à l'identité.
5. Montrer qu'il y a un élément de $\mathfrak{A}_6/H$ qui est fixé par cette action de groupe, et en déduire un morphisme σ du groupe H dans $\mathfrak{S}_5$.
6. Montrer que $\sigma \circ \theta$ donne un morphisme de groupes injectif de G dans $\mathfrak{A}_5$. Conclure.