

Chapitre 2

Equation de Laplace

2.1 Introduction

Dans \mathbb{R}^n on appelle Laplacien l'opérateur :

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

dit elliptique car sa transformée de Fourier

$$\mathcal{F}(\Delta)(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2$$

est le terme principal de l'équation d'une sphère et plus généralement d'une ellipse. Du fait de sa symétrie le laplacien est le modèle des opérateurs elliptiques :

$$x \mapsto \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

2.2 Le Laplacien comme opérateur non borné

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe, borné ou non. L'opérateur Δ est bien défini au sens des distributions sur $L^2(\Omega)$:

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle := \int_{\Omega} u \Delta \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

mais il n'opère pas dans $L^2(\Omega)$. Pour remédier à cela, on utilise la notion d'opérateur non borné.

Définition 2.2.1 (Opérateur borné). Un opérateur $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ défini sur un espace de Hilbert \mathcal{H} est dit borné s'il est continu, i.e. s'il existe une constante $C > 0$ t.q.

$$\|Ax\| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Un opérateur non borné est défini, en général, sur un sous-espace $D(A)$ dense de \mathcal{H} . Un opérateur non borné est donc une application linéaire $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$. Si A est un opérateur à domaine dense $D(A)$, on définit $D(A^*)$ comme l'ensemble des vecteurs $\varphi \in \mathcal{H}$ pour lesquels il existe un vecteur $\varphi' \in \mathcal{H}$ vérifiant :

$$\forall \psi \in D(A), \quad \langle A\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \varphi' \rangle.$$

Pour tout $\varphi \in D(A^*)$, domaine de l'adjoint, on note $A^*\varphi = \varphi'$. Par densité de $D(A)$, φ' est défini de façon unique. Un opérateur A sur \mathcal{H} est dit-auto-adjoint si $D(A^*) = D(A)$ et $A = A^*$ sur $D(A)$. Malheureusement, dans beaucoup de cas intéressants, $D(A^*)$ est beaucoup plus petit que $D(A)$, voire est réduit à $\{0\}$. Avec ces notations, on pose :

$$D(-\Delta) = \{u \in L^2(\Omega) \mid -\Delta u \in L^2(\Omega)\}.$$

On remarque que pour tout $u \in D(-\Delta)$, on peut définir la trace $u|_{\partial\Omega}$ et la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n}$ le long de $\partial\Omega$ en posant : $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$,

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \varphi d\sigma = \int_{\Omega} (-\Delta u) \varphi dx + \int_{\Omega} u \Delta \varphi dx, \quad \text{où} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} := \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi$$

L'adjoint de $-\Delta$ est bien défini quand il est associé à une condition sur le bord de type Dirichlet, resp. Neumann,

Proposition 2.2.1. *Les opérateurs $-\Delta_d$ et $-\Delta_n$, définis par :*

$$D(-\Delta_d) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \Delta u \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

et : $-\Delta_d u = -\Delta u$, $\forall u \in D(-\Delta_d)$, resp. :

$$D(-\Delta_n) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \Delta u \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0\}$$

et : $-\Delta_n u = -\Delta u$, $\forall u \in D(-\Delta_n)$, sont auto-adjoints et positifs.

Démonstration. On a les égalités :

$$\int_{\Omega} (-\Delta u)\varphi dx = \int_{\Omega} u(-\Delta\varphi)dx, \quad \forall u, \varphi \in D(-\Delta_d)$$

i.e. $(-\Delta_d)^* = -\Delta_d$, resp.

$$\int_{\Omega} (-\Delta u)\varphi dx = \int_{\Omega} u(-\Delta\varphi)dx, \quad \forall u, \varphi \in D(-\Delta_n)$$

i.e. $(-\Delta_n)^* = -\Delta_n$.

De plus, si $u \in D(-\Delta)$, on prolonge $u \in L^2(\Omega)$ et $-\Delta u \in L^2(\Omega)$ par 0 dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. On en déduit alors :

$$\int_{\Omega} (-\Delta u)u dx = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\mathcal{F}(-\Delta u)}\mathcal{F}(u) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi \geq 0$$

i.e. $-\Delta$ est un opérateur positif. \square

Corollaire 2.2.2. *Le spectre de l'opérateur $-\Delta_d$, resp. $-\Delta_n$, est formé d'une suite de valeurs propres $(\lambda_k^{(d)})_{k \geq 0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$, resp. $(\lambda_k^{(n)})_{k \geq 0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$, sans point d'accumulation à distance finie, t.q. $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k^{(d)} = +\infty$, resp. $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k^{(n)} = +\infty$, et les vecteurs propres correspondants forment une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$.*

Démonstration. C'est une conséquence (admise) de la théorie des opérateurs auto-adjoints positifs. \square

L'exemple le plus simple de la situation décrite dans le Corollaire 2.2.2 s'obtient en dimension $n = 1$ d'espace. On pose $\Omega =]0, L[$ avec $L > 0$ et on considère l'équation :

$$-u'' - \lambda u = 0, \quad u(0) = u(L) = 0.$$

Par le calcul, on trouve directement que les valeurs propres sont les réels :

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \geq 0, \quad k \geq 0$$

de vecteurs propres associés :

$$t \mapsto w_{\lambda_k}(t) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}t\right), \quad k \geq 0.$$

On vérifie que la suite $(w_k)_{k \geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(0, T)$.

Remarque 7. L'analyse ci-dessus se généralise au cas du problème de Dirichlet (resp. de Neumann, et d'autres) dans un ouvert Ω borné. Pour évaluer le comportement asymptotique des valeurs propres on introduit la fonction de comptage :

$$N(\lambda) := \#\{\lambda_k \leq \lambda\}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ces valeurs propres apparaissent de manière fondamentale dans les équations de propagation des ondes et de la chaleur sur un ouvert Ω .

Elles apparaissent aussi en théorie des nombres. Si Ω est un carré de côté 1, alors les fonctions propres et les valeurs propres du Laplacien sont donnés par :

$$w_{\lambda_{n,m}}(x, y) = \sin(n\pi x) \sin(m\pi y), \quad \lambda_{n,m} = (n^2 + m^2)\pi^2, \quad n, m \geq 0.$$

L'évaluation de $N(\lambda)$ dans ce cas est bien un problème de théorie des nombres : compter le nombre de points à coordonnées entières contenus dans un cercle de rayon $\sqrt{\lambda}$, $\lambda > 0$. On démontre que :

$$N(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} + o(\sqrt{\lambda}), \quad \forall \lambda > 0.$$

2.3 Formulation variationnelle

Introduction et formalisme

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de \mathbb{R}^n et soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème aux limites : trouver u solution de (2.1)

$$u - \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (2.1)$$

ce qui, avec les notations de la Section 2.2, se réécrit : trouver $u \in D(-\Delta_d)$ t.q.

$$(I - \Delta_d)u = f.$$

D'après le Corollaire 2.2.2, l'opérateur $I - \Delta_d$ est inversible le problème (2.1) admet $u := (I - \Delta_d)^{-1}f$ pour unique solution dans $D(-\Delta_d)$.

Par multiplication de (2.1) par $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, on obtient : (2.2)

$$\underbrace{\int_{\Omega} (u\bar{v} + \nabla u \cdot \nabla \bar{v}) dx}_{=:(u,v)} = \int_{\Omega} f\bar{v} dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.2)$$

ce qui peut s'interpréter comme la résolution d'un problème de représentation d'une forme sesquilinéaire par le théorème de représentation de Riesz. Pour cela, on introduit :

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \vec{\nabla}v \in L^2(\Omega)^n\}$$

L'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $((\cdot, \cdot))$ est un espace de Hilbert. On remarque que la relation :

$$\int_{\Omega} \vec{\varphi} \cdot \vec{\nabla}u dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{\varphi})u dx + \int_{\partial\Omega} \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{\varphi}}_{=: \varphi_n} u d\sigma, \quad \forall \vec{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)^n$$

permet de définir les valeurs de $u \in H^1(\Omega)$ sur $\partial\Omega$, ce qui permet de définir le sous-espace :

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Proposition 2.3.1. *Le sous-espace $H_0^1(\Omega)$ est fermé dans $H^1(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $(u_k)_{k \geq 0} \in H_0^1(\Omega)^\mathbb{N}$ t.q. $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} u$ dans $H^1(\Omega)$, i.e. :

$$u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} u \quad \text{et} \quad \vec{\nabla}u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \vec{\nabla}u \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega).$$

Alors : $\forall \vec{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)^n$,

$$\int_{\Omega} \vec{\varphi} \cdot \vec{\nabla}u_k dx \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \int_{\Omega} \vec{\varphi} \cdot \vec{\nabla}u dx,$$

d'une part, et

$$\int_{\Omega} \vec{\varphi} \cdot \vec{\nabla}u_k dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{\varphi})u_k dx \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{\varphi})u dx$$

d'autre part, d'où on déduit que :

$$\int_{\partial\Omega} \varphi_n u d\sigma = 0, \quad \forall \vec{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)^n$$

i.e. $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et $u \in H_0^1(\Omega)$. □

On admettra le résultat de densité :

Proposition 2.3.2. *Le sous-espace $H_0^1(\Omega)$ de $H^1(\Omega)$ coïncide avec l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|$ de $H^1(\Omega)$:*

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1} = H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$$

Proposition 2.3.3. *Le problème : (2.1) admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$*

Démonstration. Compte tenu de (2.2) et de la Proposition 2.3.2, on est ramené à résoudre : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad ((u, v)) = \int_{\Omega} f \bar{v} dx. \quad (2.3)$$

On remarque que $\ell : v \mapsto \int_{\Omega} f \bar{v} dx$ est une forme antilinéaire continue sur $H^1(\Omega)$. D'après le Théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $w \in H^1(\Omega)$ t.q. : $\ell(v) = ((w, v))$, $\forall v \in H^1(\Omega)$. Soit P la projection orthogonale : $H^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, bien définie d'après la Proposition 2.3.1. Alors, (2.3) se réécrit :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad ((u, Pv)) = ((w, Pv)).$$

Nécessairement : $u \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow u = Pw$. □

On généralise le résultat de la Proposition 2.3.3 dans le cadre fonctionnel abstrait de deux espaces de Hilbert H, V ($H = L^2(\Omega)$ et $V = H_0^1(\Omega)$ dans l'exemple précédent) munis de deux produits scalaires différents. On suppose que $V \subset H$ et que cette injection est continue et dense ($\bar{V}^H = H$). Alors, l'identification de H avec son dual (antidual si on considère des espaces de fonctions complexes) réalise une injection de cet espace dans V^* , ce qui donne le triplet :

$$V \subset H \simeq H^* \subset V^*.$$

Dans ce cadre mes formes sesquilinéaires continues $(u, v) \mapsto a(u, v)$ s'identifient à des opérateurs linéaires continus $A_a : V \rightarrow V^*$ suivant la formule :

$$\forall (u, v) \in V \times V, \quad A_a(u)(v) = a(u, v).$$

et par restriction de leur image à H définissent encore des opérateurs non bornés dans H dont les domaines et actions sont définis par :

$$D(A_a^H) = \{u \in V \mid A_a(u) \in H\} \quad \text{et} \quad A_a^H(u) = A_a(u), \quad \forall u \in D(A_a^H).$$

On en déduit, en particulier :

$$\forall u \in D(A_a^H), \quad \forall v \in V, \quad (A_a^H(u), v)_H = A_a(u)(v) = {}_{V^*}\langle A_a(u), v \rangle_V.$$

Le Théorème de Lax-Milgram

Dans le formalisme ci-dessus, le Théorème de Lax-Milgram généralise le Théorème de représentation de Riesz.

Théorème 2.3.4. *Soit V un espace de Hilbert et soit $(u, v) \mapsto a(u, v)$ une forme sesquilinéaire continue sur $V \times V$. On suppose qu'il existe une constante $\alpha > 0$ t.q.*

$$|a(u, u)| \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V.$$

Alors, l'opérateur $A_a : V \rightarrow V^*$, $u \mapsto A_a(u)(\cdot) = a(u, \cdot)$, réalise un isomorphisme de $V \rightarrow V^*$ et on a :

$$\|A_a^{-1}\|_{\mathcal{L}_c(V^*, V)} \leq \frac{1}{\alpha}$$

Démonstration. On commence par remarquer que A_a est linéaire (immédiat) injective. En effet, soit $u \in V$ t.q. $A_a(u) = 0$. Alors :

$$0 = |A_a(u)(u)| = |a(u, u)| \geq \alpha \|u\|_V^2 \Rightarrow \|u\| = 0$$

i.e. $u = 0$. Il reste à vérifier que $A_a(V) = V^*$. Pour cela on va montrer successivement que $A_a(V)$ est fermé et dense dans V^* . Comme V est complet, il en est de même de V^* et on est ramené à montrer que $A_a(V)$ est complet dans V^* . Soit $(u_k)_{k \geq 0} \in V^{\mathbb{N}}$. On suppose que la suite $(A_a(u_k))_{k \geq 0}$ est de Cauchy. On a : $\forall k, p \geq 0$,

$$\begin{aligned} \alpha \|u_k - u_p\|_V^2 &\leq |a(u_k - u_p, u_k - u_p)| = |A_a(u_k - u_p)(u_k - u_p)| \leq \\ &\leq \|A_a(u_k - u_p)\| \|u_k - u_p\|_V \end{aligned}$$

donc

$$\|u_k - u_p\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|A_a(u_k - u_p)\|.$$

On en déduit que la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ est de Cauchy dans V , donc convergente dans V qui est complet. Soit $u \in V$ sa limite dans V . On remarque que A_a est continue sur V par continuité de a . En effet : $\forall w, v \in V$,

$$\begin{aligned} |A_a(w)(v)| &= |a(w, v)| \leq \|a\| \|w\|_W \|v\|_V \\ \Rightarrow \|A_a(w)\|_{V^*} &= \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|A_a(w)(v)|}{\|v\|_V} \leq \|a\| \|w\|_V \end{aligned}$$

Proposition 2.3.5. *L'espace V_Γ défini par (2.4) est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$.*

Démonstration. Par définition, V_Γ est un sous-espace de $H^1(\Omega)$.

Soit $(u_k)_{k \geq 0} \in V_\Gamma^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} u$ dans $H^1(\Omega)$. Soit $\forall \vec{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)^n$. On a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{\varphi} \cdot \vec{\nabla} u_k dx &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{\varphi}) u_k dx + \int_{\partial\Omega} \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{\varphi}}_{=: \varphi_n} u_k d\sigma \\ &\stackrel{u_k \in V_\Gamma}{=} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{\varphi}) u_k dx + \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} \varphi_n u_k d\sigma, \quad \forall k \geq 0, \end{aligned}$$

d'où on déduit :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \varphi_n u d\sigma &= \int_{\Omega} \vec{\varphi} \cdot \vec{\nabla} u dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{\varphi}) u dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Omega} \vec{\varphi} \cdot \vec{\nabla} u_k dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{\varphi}) u_k dx \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} \varphi_n u_k d\sigma. \end{aligned}$$

En particulier, si $\operatorname{supp}(\vec{\varphi}) \subset \Gamma$ alors :

$$\int_{\partial\Omega} \varphi_n u d\sigma = \int_{\Gamma} \varphi_n u d\sigma = 0.$$

On en déduit que $u|_{\Gamma} = 0$, i.e. $u \in V_\Gamma$. \square

Soit $f \in L^2(\Omega)$ et soit $g \in L^2(\partial\Omega)$. On introduit la forme linéaire continue sur V_Γ :

$$\ell : v \mapsto \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v d\sigma$$

Soit $\lambda > 0$. D'après le théorème de Lax-Milgram (ou le Théorème de représentation de Riesz appliqué à V_Γ), il existe un unique $u \in V_\Gamma$ t.q. :

$$\forall v \in V_\Gamma, \quad \lambda \int_{\Omega} u v dx + \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v dx = \ell(v). \quad (2.5)$$

En prenant $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset V_\Gamma$, et en intégrant par parties, on obtient :

$$\lambda u - \Delta u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad (2.6)$$

On suppose que u est assez régulier pour appliquer la formule de Green après multiplication de (2.6) par $v \in V_\Gamma$:

$$\int_{\Omega} f v dx = \int_{\Omega} (\lambda u - \Delta u) v dx = \lambda \underbrace{\int_{\Omega} u v dx + \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v dx}_{\stackrel{(2.5)}{=} \ell(v)} - \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma.$$

Par comparaison avec (2.5), on en déduit que :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \setminus \Gamma.$$

et u est finalement solution du problème aux limites :

$$\lambda u - \Delta u = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \quad u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{sur} \quad \partial : \text{Om} \setminus \Gamma;$$

2.4 Calcul approché par les différences finies en dimension 1

Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. On cherche $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ solution de :

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in]0, 1[, \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (2.7)$$

Cette équation. modélise par exemple la diffusion de la chaleur dans un barreau conducteur chauffé (terme source f) dont les deux extrémités sont plongées dans de la glace. On se donne une subdivision de $[0, 1]$:

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1$$

supposée régulière de pas $h = \frac{1}{N+1} > 0$ pour simplifier, et on veut calculer des approximations $u_i \sim u(x_i)$, $i = 0, \dots, N+1$, en chaque point x_i de la subdivision. Pour cela, on considère le problème : trouver $u^{(N)} \in \mathbb{R}^N$, de composantes u_1, \dots, u_N , solution du système :

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) = f_i, & i = 1, \dots, N, \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

où $f_i = f(x_i)$, $i = 1, \dots, N$, sont donnés au second membre.

Définition 2.4.1 (Erreur de consistance). On pose :

$$\varepsilon_i^{(N)} = \frac{1}{h^2}(-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1})) - f(x_i), \quad i = 1, \dots, N$$

On appelle erreur de consistance du schéma (2.8) la quantité

$$\|\varepsilon^{(N)}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |\varepsilon_i^{(N)}|, \quad N > 0.$$

Le schéma (2.8) est dit consistant si $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\varepsilon^{(N)}\|_\infty = 0$.

Par application de la formule de Taylor, on trouve :

$$\varepsilon^{(N)} = O(h) = O\left(\frac{1}{N+1}\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0,$$

i.e. le schéma (2.8) est consistant.

Définition 2.4.2. Le schéma (2.8) est dit convergent si

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \max_{1 \leq i \leq N} |u_i^{(N)} - u(x_i)| = 0.$$

Proposition 2.4.1. *Le schéma (2.8) est convergent.*

Démonstration. Soit $(\mu^{(N)})_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N$ et soit $z^{(N)} \in \mathbb{R}^N$ solution du schéma :

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(-z_{i-1} + 2z_i - z_{i+1}) = \mu_i^{(N)}, & i = 1, \dots, N, \\ z_0 = z_{N+1} = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

qui se réécrit sous forme matricielle :

$$\frac{1}{h^2} A_N z^{(N)} = \mu^{(N)} \quad (2.10)$$

où $A_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est la matrice carrée d'ordre N de coefficients :

$$a_{ij}^{(N)} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j, \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{si } |i - j| > 1. \end{cases} \quad (2.11)$$

On remarque que A_N est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une bon, de valeurs propres dans \mathbb{R} . Soit $x \in \mathbb{R}^N$ un vecteur propre de A_N de valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. L'équation $A_N x = \lambda x$ s'écrit composante par composante :

$$-x_{i-1} + (2 - \lambda)x_i - x_{i+1} = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.12)$$

$$x_0 = x_{N+1} = 0. \quad (2.13)$$

L'équation caractéristique associée s'écrit :

$$r^2 + (\lambda - 2)r + 1 = 0. \quad (2.14)$$

On vérifie que (2.12)–(2.13) admet des solutions non nulles ssi le discriminant de (2.14) est ≤ 0 , i.e. ssi $|\lambda - 2| < 2$. On pose : $\lambda = 2 + 2 \cos \theta$, $\theta \in]0, \pi[$. Alors (2.14) admet les racines

$$r^\pm = -e^{\pm i\theta}.$$

On en déduit

$$x_k = a \cos(k\theta) + b \sin(k\theta), \quad 0 \leq k \leq N + 1$$

avec $x_0 = a = 0$. On en déduit :

$$x_{N+1} = b \sin((N + 1)\theta) = 0 \iff \theta \in \frac{\pi}{N + 1} \mathbb{N}.$$

Plus précisément :

$$0 < \theta < \pi \Rightarrow \theta = \frac{p\pi}{(N + 1)} = \theta_p, \quad 1 \leq p \leq N$$

On en déduit que A_N admet N valeurs propres distinctes > 0 :

$$\begin{aligned} 4 > \lambda_1^{(N)} &= 4 \left(\cos \left(\frac{\pi}{N + 1} \right) \right)^2 > \dots > \lambda_p^{(N)} = 4 \left(\cos \left(\frac{p\pi}{N + 1} \right) \right)^2 \\ &> \dots > \lambda_N^{(N)} = 4 \left(\cos \left(\frac{N\pi}{N + 1} \right) \right)^2 = 4 \left(\sin \left(\frac{\pi}{N + 1} \right) \right)^2 > 0. \end{aligned}$$

En particulier A_N est inversible et donc

$$z^{(N)} = h^2 A_N^{-1} \mu^{(N)} \Rightarrow \|z^{(N)}\|_2 \leq h^2 \underbrace{\|A_N^{-1}\|_2}_{=\rho(A_N^{-1})} \|\mu^{(N)}\|_2$$

où $\|A_N^{-1}\|_2 = \rho(A_N^{-1})$ par symétrie de A_N^{-1} . Les valeurs propres de A_N^{-1} sont :

$$0 < \frac{1}{\lambda_1^{(N)}} < \dots < \frac{1}{\lambda_N^{(N)}} \Rightarrow \rho(A_N^{-1}) = \frac{1}{\lambda_N^{(N)}} = \frac{1}{4 \left(\sin \left(\frac{\pi}{N+1} \right) \right)^2} = \frac{1}{4(\sin(\pi h))^2}$$

et donc :

$$\|z^{(N)}\|_2 \leq \left(\frac{h}{2 \sin(\pi h)} \right)^2 \|\mu^{(N)}\|_2. \quad (2.15)$$

Soit $X^{(N)} \in \mathbb{R}^N$ le vecteur de composantes $X_i^{(N)} = x_i$, $1 \leq i \leq N$. Si $z_i^{(N)} = u(x_i) - u_i$, $1 \leq i \leq N$, alors $z^{(N)} = u(X^{(N)}) - u^{(N)}$ et $\mu^{(N)} = \varepsilon^{(N)}$ avec

$$\|\varepsilon^{(N)}\|_2 \leq \sqrt{N} \|\varepsilon^{(N)}\|_\infty \leq C \sqrt{N} h \leq C \sqrt{h}$$

donc

$$\begin{aligned} \|u(X^{(N)}) - u^{(N)}\|_\infty &\leq \|u(X^{(N)}) - u^{(N)}\|_2 \leq C\sqrt{h} \left(\frac{h}{2\sin(\pi h)} \right)^2 \\ &\leq C\sqrt{h} \leq \frac{C}{\sqrt{N}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

□

Autres conditions aux limites

Conditions de Dirichlet non homogènes

On considère les conditions sur le bord non homogènes :

$$u(0) = a, \quad u(1) = b.$$

Le schéma (2.8) reste inchangé à l'exception du second membre qui devient :

$$f_i = \begin{cases} f(x_1) - a & \text{si } i = 1, \\ f(x_N) - b & \text{si } i = N, \\ f(x_i) & \text{si } 1 < i < N, \end{cases}$$

Conditions de Neumann et de Fourier

On considère les conditions sur le bord :

- (i) de type Neumann en $x = 0$: $u'(0) = a$,
- (ii) de type Fourier en $x = 1$: $u'(1) + \alpha u(1) = b$ avec $\alpha > 0$.

Les premiers termes des développements en série de Taylor de $u'(0)$ et $u'(1)$ suggèrent de choisir :

$$u_0 = u_1 - \alpha h, \quad u_{N+1} = \frac{u_N + \alpha h}{1 + \alpha h}.$$

Alors le schéma (2.8) devient : trouver $u_0, u_1, \dots, u_N, u_{N+1}$ t.q.

$$\begin{cases} \frac{1}{h}(u_0 - u_1) = -\alpha, \\ \frac{1}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) = f_i, & i = 1, \dots, N, \\ \frac{1}{h}(-u_N + (1 + \alpha h)u_{N+1}) = \alpha. \end{cases} \quad (2.16)$$

Schéma numérique bien posé

Définition 2.4.3. Le schéma numérique (2.8) est dit bien posé s'il admet une unique solution.

Le schéma (2.8) se réécrit sous forme matricielle : trouver $U_N \in \mathbb{R}^N$ solution de :

$$A_N U_N = f \quad (2.17)$$

où $A_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est la matrice carrée introduite dans (2.10) et définie par (2.11).

Proposition 2.4.2. La matrice (2.11) du système (2.17) est définie positive.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^N$. On a :

$$Ax \cdot x = 2 \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{N-1} x_i x_{i+1} = \sum_{i=1}^{N-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_1^2 + x_N^2 \geq 0.$$

Si $Ax \cdot x = 0$, alors

$$x_1 = x_N = 0 \quad \text{et} \quad x_i = x_{i+1}, \quad i = 1 \cdots N \Rightarrow x = 0.$$

□

Corollaire 2.4.3. La matrice (2.11) du système (2.17) est inversible.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la Proposition 2.4.2. □

On en déduit que le schéma numérique (2.8) est bien posé.

Exemple 1. Le problème (2.16) se réécrit sous forme matricielle : trouver $U_h \in \mathbb{R}^{N+2}$. solution de

$$\frac{1}{h^2} A_h U_h = f_h$$

où $A_h = (a_{ij}^{(h)})_{0 \leq i, j \leq N+1}$ est la matrice carrée d'ordre $N + 2$ définie is par :

$$a_{ij}^{(h)} = \begin{cases} h & \text{si } i = j = 0, \\ -h & \text{si } (i, j) \in \{(1, 0), (N + 1, N)\} \\ 2 & \text{si } 1 \leq i = j \leq N \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1, 1 \leq i, j \leq N \\ h(1 + \alpha h) & \text{si } i = j = N + 1, \\ 0 & \text{si } |i - j| > 1, \end{cases}$$

et où le second membre $f_h = (f_i^{(h)})_{0 \leq i \leq N+1} \in \mathbb{R}^{N+2}$ est défini par :

$$f_i^{(h)} = \begin{cases} -\alpha & \text{si } i = 0, \\ f(x_i) & \text{si } 1 \leq i \leq N, \\ \alpha & \text{si } i = N + 1. \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^{N+2}$. On a :

$$\begin{aligned} A_h x \cdot x &= \sum_{i=1}^{N-1} (x_i - x_{i+1})^2 + h \left(x_0 - \frac{x_1}{2} \right)^2 + h \left(x_{N+1} - \frac{x_N}{2} \right)^2 + \\ &+ \alpha h^2 x_{N+1}^2 + \left(1 - \frac{h}{4} \right) (x_1^2 + x_N^2) \end{aligned}$$

où $h = \frac{1}{N+1} \in]0, \frac{1}{4}[$ si $N > 3$. On en déduit que si $N > 3$, alors A_h est semi-définie positive. Si $Ax \cdot x = 0$, alors :

$$x_1 = x_N = 0 \quad \text{et} \quad x_i = x_{i+1} \Rightarrow x_1 = \dots = x_N = 0.$$

De plus : $x_0 = \frac{x_1}{2} = 0$ et $x_{N+1} = \frac{x_N}{2} = 0$ donc $x = 0$, i.e. A_h est définie positive, donc inversible.

Exemple 2. On considère le problème aux limites avec conditions de Neumann :

$$-u'' = f \quad \text{dans }]0, 1[, \quad u'(0) = u'(1) = 0. \quad (2.18)$$

Les approximations

$$u'(0) \sim \frac{1}{h}(u_1 - u_0), \quad u'(1) \sim \frac{1}{h}(u_{N+1} - u_N)$$

conduisent au schéma numérique :

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) = f_i, & i = 1, \dots, N, \\ u_0 = u_1, \\ u_{N+1} = u_N. \end{cases} \quad (2.19)$$

Sous forme matricielle, le schéma (2.19) se réécrit : trouver $U_h \in \mathbb{R}^{N+2}$ solution de

$$\frac{1}{h^2} A_h U_h = f_h$$

où $A_h = (a_{ij}^{(h)})_{0 \leq i, j \leq N+1}$ est la matrice carrée d'ordre $N + 2$ définie par :

$$a_{ij}^{(h)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j = 0, \\ 2 & \text{si } 1 \leq i = j \leq N, \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1, \\ 1 & \text{si } i = j = N + 1, \\ 0 & \text{si } |i - j| > 1 \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^{N+2}$. On a :

$$A_h x \cdot x = \sum_{i=0}^N (x_i - x_{i+1})^2 \geq 0$$

et

$$A_h x \cdot x = 0 \Rightarrow x_0 = \dots = x_{N+1}.$$

On vérifie directement que

$$A_h \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

i.e. A_h est semi-définitive positive et non inversible. De fait, le problème (2.18) admet les constantes pour solutions.

Définition 2.4.4 (Matrice monotone). Une matrice réelle est dite monotone si elle est inversible, d'inverse à coefficients ≥ 0 .

Proposition 2.4.4 (Caractérisation des matrices monotones). Une matrice réelle $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est monotone ssi : $\forall v \in \mathbb{R}^N$,

$$Av \geq 0 \Rightarrow v \geq 0.$$

(Les inégalités s'entendent composante par composante)

Démonstration. Soit $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$. \Rightarrow Soit $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ monotone et soit $v \in \mathbb{R}^N$. On suppose que $Av \geq 0$. Alors :

$$v_i = \underbrace{A_{ik}^{-1}}_{\geq 0} \underbrace{(Av)_k}_{\geq 0} \geq 0, \quad \forall i \in [[1, N]].$$

\Leftarrow Inversement, on suppose que : $\forall v \in \mathbb{R}^N$,

$$Av \geq 0 \Rightarrow v \geq 0.$$

Soit $v \in \mathbb{R}^N$ t.q. $Av = 0$. Alors :

$$Av = 0 \Rightarrow v \geq 0 \quad \text{et} \quad -Av = 0 \Rightarrow -v \geq 0$$

donc $v = 0$, i.e. A est inversible. Soit $i \in [[1, N]]$. On note e_i le i ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^N . Par hypothèse sur A :

$$e_i = A(A^{-1}e_i) \geq 0 \Rightarrow A^{-1}e_i \geq 0.$$

On en déduit : $(A^{-1}e_i)_j = A_{ij}^{-1} \geq 0, \forall j \in [[1, N]]$. Ceci étant vrai pour tout $i \in [[1, N]]$, il en résulte : $A^{-1} \geq 0$, i.e. A est monotone. \square

Principe du maximum

On considère le problème : trouver u solution de (2.20)

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{si } 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

où $c \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^+)$ et $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. L'analogie du problème discrétisé (2.8) s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) + c_i u_i = f_i, & i = 1, \dots, N, \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

où $c_i = c(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, $i = 1, \dots, N$, sont donnés. Sous forme matricielle, le problème (2.21) se réécrit :

$$\frac{1}{h^2} A_h U_h = f_h$$

où $A_h = (a_{ij}^{(h)})_{1 \leq i, j \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est la matrice carrée d'ordre N définie par :

$$a_{ij}^{(h)} = \begin{cases} 2 + c_i h^2 & \text{si } i = j, \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{si } |i - j| > 1, \end{cases} \quad (2.22)$$

Proposition 2.4.5. *Soit $c = (c_1, \dots, c_N)^T \in \mathbb{R}^N$ t.q. $c_i \geq 0, \forall i \in [[1, N]]$. Alors la matrice A_h définie par (2.22) est symétrique, définie positive et donc inversible.*

Démonstration. La matrice A_h est symétrique par définition. Soit $x \in \mathbb{R}^N$. On a :

$$A_h x \cdot x = \sum_{i=1}^{N-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_1^2 + x_N^2 + h^2 \sum_{i=1}^N c_i x_i^2 \underset{c \geq 0}{\geq} 0$$

On suppose que $A_h x \cdot x = 0$. Alors :

$$x_1 = x_N = 0 \quad \text{et} \quad x_i = x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N \Rightarrow x_1 = \dots = x_N = 0.$$

□

Définition 2.4.5 (Principe du maximum). On appelle principe du maximum continue le fait que si $f \geq 0$ alors le minimum de la solution u du problème (2.20) est atteint sur le bord du domaine de définition de u .

Proposition 2.4.6 (Le principe du maximum). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et soit $f \in C^2(\Omega)$.

a) Si $\Delta f > 0$ dans Ω alors :

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) < \max_{y \in \partial\Omega} f(y).$$

b) Si $\Delta f = 0$ dans Ω (f est dite harmonique), alors

$$\forall x \in \Omega, \quad \min_{y \in \partial\Omega} f(y) \leq f(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} f(y).$$

Démonstration. On remarque que $\partial\Omega = \overline{\Omega} \cap \Omega^c$ est fermé comme intersection de fermés, et borné par hypothèse sur Ω , donc c'est un compact de \mathbb{R}^n et f y atteint ses bornes.

a) Soit $\Delta f > 0$ dans Ω . On suppose qu'il existe $x_0 \in \Omega$ t.q. :

$$f(x_0) \geq \max_{y \in \partial\Omega} f(y).$$

Comme $\overline{\Omega}$ est un compact de \mathbb{R}^n (en dimension finie), on peut supposer que

$$f(x_0) = \max_{y \in \overline{\Omega}} f(x) \geq \max_{y \in \partial\Omega} f(x)$$

Comme Ω est ouvert, on a $\nabla f(x_0) = 0$. Soit $r > 0$ t.q., si $B_r(x_0)$ est la boule ouverte de centre x_0 et de rayon $r > 0$, on ait $B_r(x_0) \subset \Omega$, et soit $x \in B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$. On pose :

$$\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0)), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Alors $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}) \Rightarrow \varphi \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ et on a

$$\begin{aligned} \varphi(1) = f(x) &= f(x_0) + \int_0^1 (1-t)f''(x_0 + t(x-x_0)) \cdot (x-x_0)^2 dt \leq f(x_0) \\ &\Rightarrow \int_0^1 (1-t)f''(x_0 + t(x-x_0)) \cdot (x-x_0)^2 dt \leq 0. \end{aligned}$$

Soit $u = \frac{1}{\|x-x_0\|}(x-x_0)$. On a, par bilinéarité de la différentielle :

$$\int_0^1 (1-t)f''(x_0 + t(x-x_0)) \cdot u^2 dt \leq 0.$$

On en déduit, par continuité de f'' :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_0^1 (1-t)f''(x_0 + t(x-x_0)) \cdot u^2 dt = \int_0^1 (1-t) dt f''(x_0) \cdot u^2 = \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot u^2 \leq 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in B_r(x_0)$, on en déduit, par définition des dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \leq 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

en contradiction avec $\Delta f < 0$ dans Ω et $x_0 \in \Omega$.

- b) Soit $\Delta f = 0$ dans Ω . Il suffit de montrer que $f \leq \max_{y \in \partial\Omega} f$ dans Ω , l'autre inégalité étant alors obtenue en considérant $-f$. Soit $\varepsilon > 0$.

On pose :

$$g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \|x\|^2 \quad \forall x \in \Omega.$$

Alors :

$$\Delta g_\varepsilon = \Delta f + 2n\varepsilon = 2n\varepsilon > 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

On remarque que $\partial\Omega$ étant borné, il existe $M > 0$ t.q. $\|x\| \leq M$, $\forall x \in \partial\Omega$. De a), on déduit que : $\forall x \in \Omega$,

$$g_\varepsilon(x) < \max_{y \in \partial\Omega} g \leq \max_{y \in \partial\Omega} f + \varepsilon M$$

i.e. : $\forall x \in \Omega$,

$$f(x) < \max_{y \in \partial\Omega} f + \varepsilon(M - \|x\|^2) \leq \max_{y \in \partial\Omega} f + \varepsilon M \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{y \in \partial\Omega} f.$$

On en déduit :

$$\sup_{x \in \Omega} f(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} f + \varepsilon M.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il en résulte que :

$$\sup_{x \in \Omega} f(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} f.$$

□

Proposition 2.4.7 (Principe du maximum faible). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de \mathbb{R}^N et soit $u \in H^1(\Omega)$ solution de :

$$\begin{cases} \Delta u \geq 0 & \text{p.p. dans } \Omega, \\ u^+ \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Alors : $u \leq 0$ p.p. dans Ω .

Lemme 2.4.8 (Lemme préliminaire). Soit $f \in H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$ t.q. $f \geq 0$ p.p. dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, i.e. :

$${}_{H^{-1}}\langle f, \varphi \rangle_{H_0^1} \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^+).$$

Alors

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad {}_{H^{-1}}\langle f, v^+ \rangle_{H_0^1} \geq 0.$$

Démonstration. Soit $v \in H_0^1(\Omega)$ et soit $(\varphi_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ t.q. $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} v$ dans $H_0^1(\Omega)$. On a :

$$\|\nabla v^+ - \nabla \varphi_n^+\|_2 \leq \|\nabla v - \nabla \varphi_n\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

i.e. $\varphi_n^+ \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} v^+$ dans $H_0^1(\Omega)$. Soit $n \geq 0$. On remarque que φ_n^+ est à support compact car fermé dans le support de φ_n qui est fermé. Donc il existe une suite régularisante $(\rho_\delta)_{\delta > 0}$ t.q. $\rho_\delta \star \varphi_n^+ \in \mathcal{D}(\Omega)$ dès que $\delta \in]0, \delta'_n[$ est assez petit, i.e. inférieur à la distance du support de φ_n^+ au bord $\partial\Omega$, et $\rho_\delta \star \varphi_n^+ \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{} \varphi_n^+$ dans $H_0^1(\Omega)$. Par définition de la convolution : $\rho_\delta \star \varphi_n^+ \geq 0$ dans Ω , $\forall \delta \in]0, \delta'_n[$, $\forall n \geq 0$. Par hypothèse sur f :

$${}_{H^{-1}}\langle f, \rho_\delta \star \varphi_n^+ \rangle_{H_0^1} \geq 0, \quad \forall \delta \in]0, \delta'_n[.$$

On conclut après extraction d'une suite diagonale $(\rho_{\delta_n})_{n \geq 0}$ t.q. $\rho_{\delta_n} \star \varphi_n^+ \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \varphi^+$ dans $H_0^1(\Omega)$:

$${}_{H^{-1}}\langle f, v^+ \rangle_{H_0^1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{{}_{H^{-1}}\langle f, \rho_{\delta_n} \star \varphi_n^+ \rangle_{H_0^1}}_{\geq 0} \geq 0.$$

□

Démonstration de la Proposition 2.4.7. Soit $f = -\Delta u$. Alors $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $f \geq 0$ p.p. dans Ω . Par hypothèse sur u^+ :

$${}_{H^{-1}}\langle f, u^+ \rangle_{H_0^1} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla u^+ dx = \int_{\Omega} |\nabla u^+|^2 dx \geq 0 \Rightarrow \nabla u^+ = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

i.e. $u^+ = 0$ p.p. dans Ω .

□

Remarque 8. On a utilisé le fait que $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(u, v) \mapsto \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$.

Corollaire 2.4.9. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et soit $g \in H^1(\Omega)$. Si $u \in H^1(\Omega)$ est solution de :*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u - g \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

alors $|u| \leq \|g\|_{\infty}$ p.p. dans Ω .

Démonstration. Si $g \notin L^{\infty}(\Omega)$, il n'y a rien à montrer. On suppose que $g \in L^{\infty}(\Omega)$. On remarque que $(u - \|g\|_{\infty})^+ \in H_0^1(\Omega)$. D'après la Proposition 2.4.7 appliquée à $u - \|g\|_{\infty}$ avec $f = 0$, on a : $u \leq \|g\|_{\infty}$ p.p. dans Ω . De même, $(u + \|g\|_{\infty})^- \in H_0^1(\Omega)$. D'après la Proposition 2.4.7 appliquée à $u + \|g\|_{\infty}$ avec $f = 0$, on a : $u \geq -\|g\|_{\infty}$ p.p. dans Ω . \square

Proposition 2.4.10. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de \mathbb{R}^N et soit $f, c \in L^{\infty}(\Omega)$. On suppose que $c \geq \eta > 0$ p.p. dans Ω pour une constante $\eta > 0$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de :*

$$-\Delta u + cu = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Alors

$$\|u\|_{\infty} \leq \frac{\|f\|_{\infty}}{\eta}.$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{R}^+$. On remarque que $(u - k)^+ \in H_0^1(\Omega)$. On en déduit :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (u - k)^+ dx + \int_{\Omega} cu(u - k)^+ dx = \int_{\Omega} f(u - k)^+ dx.$$

avec

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \nabla (u - k)^+ dx &= \int_{\Omega} \nabla(u - k) \nabla (u - k)^+ dx = \int_{\Omega} \nabla(u - k)^+ \nabla(u - k)^+ dx = \\ &= \int_{\Omega} |\nabla(u - k)^+|^2 dx \geq 0, \\ \int_{\Omega} cu(u - k)^+ dx &= \int_{\Omega} c(u - k)(u - k)^+ dx + k \int_{\Omega} c(u - k)^+ dx = \\ &= \int_{\Omega} c(u - k)(u - k)^+ dx + k \int_{\Omega} c(u - k)^+ dx = \int_{\Omega} c|(u - k)^+|^2 dx + k \int_{\Omega} c(u - k)^+ dx \end{aligned}$$

$$\geq \eta \int_{\Omega} |(u - k)^+|^2 dx + k \int_{\Omega} c(u - k)^+ dx.$$

On en déduit :

$$0 \leq \int_{\Omega} |\nabla(u - k)^+|^2 dx + \eta \int_{\Omega} |(u - k)^+|^2 dx \leq \int_{\Omega} (f - ck)(u - k)^+ dx.$$

On pose :

$$k = \frac{\|f\|_{\infty}}{\eta}.$$

Alors :

$$ck \geq \|f\|_{\infty} \Rightarrow f - ck \leq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega \Rightarrow \int_{\Omega} (f - ck)(u - k)^+ dx \leq 0$$

Il en résulte :

$$\eta \int_{\Omega} |(u - k)^+|^2 dx \leq 0$$

i.e. : $(u - k)^+ = 0$ p.p. Le même raisonnement avec $(u + k)^-$ conduit à $u \geq -\frac{\|f\|_{\infty}}{\eta}$ p.p. dans Ω . \square

Remarque 9. Si la solution u de (2.20) vérifie le principe du maximum, on souhaite qu'il en soit de même pour la solution approchée.

Lemme 2.4.11. Soit $c = (c_1, \dots, c_N)^T \in \mathbb{R}^N$ t.q. $c_i \geq 0, \forall i \in [[1, N]]$. Alors la matrice A_h définie par (2.22) est monotone.

Démonstration. On commence par remarquer que la matrice A_h est inversible d'après la Proposition 2.4.5. Soit $v \in \mathbb{R}^N$ t.q. $A_h v \geq 0$. Soit $i_0 \in [[1, N]]$ t.q. $v_{i_0} = \min_{1 \leq j \leq N} v_j$. Si $i_0 = 1$, alors :

$$(2 + h^2 c_1)v_1 \geq v_2 \geq v_1 \Rightarrow \underbrace{(1 + h^2 c_1)v_1}_{>0} \geq 0 \rightarrow v_1 \geq 0.$$

Si $i_0 = N$, alors :

$$(2 + h^2 c_N)v_N \geq v_{N-1} \geq v_N \Rightarrow \underbrace{(1 + h^2 c_N)v_N}_{>0} \geq 0 \rightarrow v_N \geq 0.$$

On suppose que $1 < i_0 < N$. On a :

$$(2 + h^2 c_{i_0})v_{i_0} \geq v_{i_0-1} + v_{i_0+1} \geq 2v_{i_0} \Rightarrow h^2 c_{i_0} v_{i_0} \geq 0.$$

Si $c_{i_0} > 0$, alors $v_{i_0} \geq 0$. Sinon, si $v_{i_0} = \min_{1 \leq j \leq N} v_j \Rightarrow c_{i_0} = 0$, alors

$$v_{i_0} - v_{i_0-1} \geq v_{i_0+1} - v_{i_0} \geq 0 \Rightarrow v_{i_0} = v_{i_0-1} = \min_j v_j.$$

Par récurrence sur $j \in [[1, i_0]]$, on en déduit :

$$v_{i_0} = v_{i_0-1} = \cdots = v_1 = \min_j v_j \geq 0.$$

□

Définition 2.4.6 (Ordre du schéma). On dit que le schéma (2.21), resp. (2.8), est d'ordre p s'il existe $C > 0$ t.q.

$$\|\varepsilon^{(N)}\|_\infty \leq Ch^p$$

où $\varepsilon^{(N)} = (\varepsilon_i^{(N)})_{1 \leq i \leq N}$ est l'erreur de consistance du schéma (2.21) resp. (2.8), définie par : $\forall i \in [[1, N]]$,

$$\varepsilon_i^{(N)} = \frac{1}{h^2}(-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1})) + c(x_i)u(x_i) - f(x_i). \quad (2.23)$$

tresp. par la Définition 1.3.2.

Proposition 2.4.12. Si la solution u de (2.20), resp. de (2.7), est de classe \mathcal{C}^4 , alors :

$$\|\varepsilon^{(N)}\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \sup_{0 \leq x \leq 1} |u^{(4)}|. \quad (2.24)$$

Démonstration. D'après la formule de Taylor avec reste intégral : $\forall x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} u(x+h) + u(x-h) - 2u(x) &= hu'(x) + h^2u''(x) + \int_x^{x+h} \frac{(x+h-t)^3}{6} u^{(4)}(t) dt + \\ &+ \int_x^{x-h} \frac{(x-h-t)^3}{6} u^{(4)}(t) dt \\ &\Rightarrow \left| \frac{1}{h^2}(-u(x-h) + 2u(x) - u(x+h)) + c(x)u(x) - f(x) \right| = \\ &= \frac{1}{h^2} \left| \int_x^{x+h} \frac{(x+h-t)^3}{6} u^{(4)}(t) dt + \int_x^{x-h} \frac{(x-h-t)^3}{6} u^{(4)}(t) dt \right| \\ &\leq \frac{2}{h^2} \left(\frac{h^4}{24} \|u^{(4)}\|_\infty \right) = \frac{h^2}{12} \|u^{(4)}\|_\infty. \end{aligned}$$

□

Définition 2.4.7 (Stabilité). Le schéma (2.21), resp. (2.8), est stable si, pour tout $\mu \in \mathbb{R}^N$, la solution $z^{(h)}$ du schéma :

$$\frac{1}{h^2}A_h z^{(h)} = \mu \quad (2.25)$$

où $A_h \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est la matrice carrée définie par (2.22), resp. par (2.11), vérifie :

$$\|z^{(h)}\|_\infty \leq C \|\mu\|_\infty,$$

pour une constante $C > 0$ indépendante de $h > 0$.

Proposition 2.4.13. *Le schéma (2.21), resp. (2.8), est stable.*

Démonstration. La stabilité du schéma (2.8) résulte de (2.15) et de l'équivalence des normes sur \mathbb{R}^N . On note A_{0h} la matrice définie par (2.11). Alors $A_h = A_{0h} + h^2 C_h$ où C_h est la matrice diagonale définie par :

$$(C_h)_{ii} = c_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

On a :

$$A_{0h}^{-1} - A_h^{-1} = A_{0h}^{-1} A_h A_h^{-1} - A_{0h}^{-1} A_{0h} A_h^{-1} = A_{0h}^{-1} \underbrace{(A_h - A_{0h})}_{=h^2 C_h \geq 0} A_h^{-1}$$

Soit $v \geq 0$. Alors :

$$A_h - A_{0h} \geq 0 \Rightarrow (A_h - A_{0h})v \geq 0$$

D'après le Lemme 2.4.11, les matrices A_h et A_{0h} sont monotones, donc

$$(A_h - A_{0h})v \geq 0 \Rightarrow A_h^{-1}(A_h - A_{0h})v = v - A_h^{-1}A_{0h}v \geq 0.$$

Ceci est également vrai pour $A_{0h}^{-1}v \geq 0$, donc $A_{0h}^{-1}v \geq A_h^{-1}v$. Finalement :

$$A_{0h}^{-1} \geq A_h^{-1} \geq 0.$$

On remarque que si B est une matrice positive, soit $B \geq 0$, alors

$$\|B\|_\infty = \max_i \sum_j |B_{ij}| = \max_i \sum_j B_{ij}.$$

On en déduit :

$$\|A_h^{-1}\|_\infty = \max_i \sum_j (A_h^{-1})_{ij} \leq \max_i \sum_j (A_{0h}^{-1})_{ij} = \|A_{0h}^{-1}\|_\infty.$$

Il reste donc à estimer $\|A_{0h}^{-1}\|_\infty$. On a aussi :

$$\|A_{0h}^{-1}\|_\infty = \|A_{0h}^{-1}e\|_\infty \quad \text{où } e = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^N$$

Soit $d_h = h^2 A_{0h}^{-1}e \in \mathbb{R}^N$. De façon équivalente, d_h est solution du système $h^{-2}A_{0h}d_h = e$ résultant de la discrétisation de

$$-u'' = 1 \quad \text{dans }]0, 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

dont la solution exacte est

$$u_0(x) = \frac{1}{2}x(1-x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

Soit $x^{(h)} \in \mathbb{R}^N$ le vecteur de composantes x_1, \dots, x_N , et soit $u_0(x^{(h)})$ le vecteur de composantes $u_0(x_1), \dots, u_0(x_N)$. Comme u_0 est polynomiale de degré 2, on a :

$$\frac{1}{h^2}A_{0h}u_0(x^{(h)}) = e.$$

Il en résulte :

$$h^2\|A_{0h}^{-1}e\|_\infty = \|u_0(x^{(h)})\|_\infty \leq \sup_{[0,1]} |u_0| = \frac{1}{8}$$

i.e. :

$$\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \|A_{0h}^{-1}\|_\infty = \|A_{0h}^{-1}e\|_\infty \leq \frac{1}{8h^2}.$$

Soit $\mu \in \mathbb{R}^N$ et soit $z^{(h)} \in \mathbb{R}^N$ solution de (2.25). On a :

$$\|z^{(h)}\|_\infty = h^2\|A_n^{-1}\mu\|_\infty \leq h^2\|A_n^{-1}\|_\infty h^2\|\mu\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|\mu\|_\infty, \quad (2.26)$$

i.e. le schéma (2.21) est stable. \square

Définition 2.4.8 (Erreur de discrétisation). On appelle erreur de discrétisation au point x_i la quantité :

$$e_i^{(h)} = u(x_i) - u_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Théorème 2.4.14. Soit u la solution du problème (2.20). On suppose que $u \in \mathcal{C}^4([0, 1])$. Alors, l'erreur de discrétisation $e^{(h)}$ du schéma (2.21) vérifie :

$$\|e^{(h)}\|_\infty \leq \frac{h^2}{96}\|u^{(4)}\|_\infty$$

Le schéma (2.21) est donc convergent d'ordre 2.

Démonstration. Le choix $z^{(h)} = e^{(h)}$ dans (2.25) conduit à $\mu = \varepsilon^{(N)}$ défini par (2.23). De (2.26) et (2.24) on déduit :

$$\|e^{(h)}\|_\infty \stackrel{(2.26)}{\leq} \frac{1}{8}\|\varepsilon^{(N)}\|_\infty \stackrel{(2.24)}{\leq} \frac{h^2}{96} \sup_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)|$$

\square

2.5 Diffusion bidimensionnelle

On considère le problème de diffusion dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.27)$$

Le problème est bien posé au sens où si $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, alors il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ de (2.27). Si $f \in L^2(\Omega)$ et si Ω est convexe (ou à bord régulier), alors il existe une unique solution faible $u \in H^2(\Omega)$ de (2.27) ; i.e. vérifiant :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

On peut montrer que si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, alors u est solution de (2.27) ssi u est solution faible de (2.27). Pour discrétiser le problème on se donne un nombre fini de points alignés dans les directions des axes $0x$ et $0y$ comme représentés dans la Figure 2.1 (on choisit un maillage régulier de pas Δx et Δy dans les directions de $0x$ et $0y$ resp.) Certains points sont à l'intérieur de Ω , d'autres sur le bord. Comme dans le cas de la dimension 1, les inconnues discrètes u_{ij} sont associées aux points $P(x_i, y_j)$ du maillage de sorte que $u_{ij} \sim u(P(x_i, y_j))$. On note $\{P_i, i \in I\}$ l'ensemble des points de discrétisation. Dans le cas de points vraiment intérieurs, tels que le point P_1 sur la Figure 2.1, i.e. pour lesquels les points voisins dans le schéma sont aussi intérieurs, on a :

$$\begin{aligned} -\Delta u(P_1) &= \frac{-u(P_2) + 2u(P_1) - u(P_3)}{(\Delta x)^2} + \frac{-u(P_4) + 2u(P_1) - u(P_5)}{(\Delta y)^2} + \\ &\quad + O((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \end{aligned}$$

Pour des points proches du bord, i.e. pour lesquels l'un des points voisins est hors de Ω , on doit prendre en compte les conditions sur le bord, ce qui dégrade l'approximation qui devient de l'ordre de $O((\Delta x) + (\Delta y))$. Le schéma numérique peut se réécrire sous forme matricielle $A_{\Delta x, \Delta y} U_{\Delta x, \Delta y} = F_{\Delta x, \Delta y}$ où la matrice $A_{\Delta x, \Delta y}$ est tridiagonale par bandes et dont la largeur de bande dépend du système de numérotation des noeuds choisi. On peut montrer que la matrice $A_{\Delta x, \Delta y}$ est inversible et monotone, et que le schéma est stable. De la stabilité et de la consistance, on déduit comme en dimension 1 la convergence du schéma.

où $A_h = (A_{ij}^{(h)})_{1 \leq i, j \leq M} \in \mathbb{R}^{NM \times NM}$ est la matrice carrée d'ordre NM formée de M^2 blocs de taille $N \times N$:

$$A_{ij}^{(h)} = \begin{cases} B_h & \text{si } i = j, \\ C_h & \text{si } |i - j| = 1, \\ 0_h & \text{si } |i - j| > 1, \end{cases}$$

où $B_h = (b_{ij}^{(h)})_{1 \leq i, j \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, est la matrice carrée d'ordre N définie par ses coefficients :

$$b_{ij}^{(h)} = \begin{cases} \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} & \text{si } i = j, \\ -\frac{1}{h_x^2} & \text{si } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{si } |i - j| > 1, \end{cases} \quad (2.29)$$

$C_h = (c_{ij}^{(h)})_{1 \leq i, j \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, est la matrice carrée d'ordre N définie par ses coefficients :

$$c_{ij}^{(h)} = \begin{cases} -\frac{1}{h_y^2} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.30)$$

$0_h \in \mathbb{R}^{N \times N}$, est la matrice carrée nulle d'ordre N .

Proposition 2.5.1. *Si la solution u de (2.27) est de classe C^4 , alors : l'erreur de consistance $\varepsilon^{(N,M)}$ vérifie :*

$$\|\varepsilon^{(N,M)}\|_\infty \leq C(h_x^2 + h_y^2)\|u^{(4)}\|_\infty. \quad (2.31)$$

où la constante $C > 0$ est indépendante de u et des pas h_x, h_y .

Proposition 2.5.2. *Le schéma (2.28) est stable.*

Théorème 2.5.3. *Soit u la solution du problème (2.27). On suppose que $u \in C^4(\overline{Om})$. Alors, l'erreur de discrétisation $e^{(h)}$ du schéma (2.28) vérifie :*

$$\|e^{(h)}\|_\infty \leq C(h_x^2 + h_y^2)\|u^{(4)}\|_\infty$$

Le schéma (2.28) est donc convergent d'ordre 2.