

# Chapitre 4

## Equation des Ondes

### 4.1 Introduction et généralités

Une onde naît quand une perturbation locale d'une grandeur physique  $\Psi$  mesurée par la dérivée temporelle  $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$  induit la variation spatiale d'une autre grandeur physique  $\Phi$ , osoit :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = a \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

et inversement :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = b \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

pour des constantes  $a, b > 0$ . On en déduit que  $\Psi$  et  $\Phi$  sont solutions de la même équation :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = ab \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = ab \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

### Ondes acoustiques

Dans un  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un ouvert rempli de fluide, la propagation d'ondes acoustiques dépend de la densité  $\rho(x)$  du fluide au point  $x \in \Omega$ , de la vitesse de prpagation locale  $c(x)$  des ondes ; La pression  $p(x, t)$  et la vitesse du fluide sont liées par les équations :

$$\rho(x) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{\nabla} p, \quad \frac{1}{\rho(x)c^2(x)} \frac{\partial p}{\partial t} = \text{div}(\vec{v})$$

d'où on déduit que  $p$  est solution de :

$$\frac{1}{\rho(x)c^2(x)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \text{div} \left( \frac{\vec{\nabla} p}{\rho(x)} \right) = 0, \quad \Omega, \quad t > 0.$$

En milieu homogène, cette équation devient :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0, \quad \Omega, \quad t > 0.$$

## 4.2 Propriétés de l'équation des ondes 1D

### Le problème modèle

Soit le problème : trouver  $u : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  solution de (4.1)

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mu \nabla u) = f, & \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \mathbb{R}^N \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (4.1)$$

Les coefficients  $\rho(x)$  et  $\mu(x)$  qui caractérisent le milieu de propagation sont supposés mesurables et vérifier :

$$\begin{aligned} 0 < \rho_- \leq \rho(x) \leq \rho_+ < +\infty & \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N \\ 0 < \mu_- \leq \mu(x) \leq \mu_+ < +\infty & \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

Les données sont donc, outre  $\rho$  et  $\mu$ , les données initiales  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$  et le second membre  $f(x, t)$ .

### La formule de d'Alembert

On suppose que  $N = 1$  et que l'onde se propage avec la vitesse constante  $c > 0$ . L'équation (4.1) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \end{cases} \quad (4.2)$$

**Théorème 4.2.1.** *La solution du problème (4.2) est donnée par la formule de d'Alembert :*

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{|y-x| \leq c(t-s)} f(y, s) ds \quad (4.3)$$

*Démonstration.* On remarque que l'opérateur des ondes se décompose sous la forme :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \circ \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \iff \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - c \frac{\partial v}{\partial x} = f, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = v \end{cases}$$

On conclut à l'aide de la méthode des caractéristiques.  $\square$

*Remarque 14.* Si  $f = 0$  alors la solution se décompose sous la forme :

$$u(x, t) = \underbrace{\frac{1}{2}u_0(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} u_1(s) ds}_{=: u^+(x+ct)} + \underbrace{\frac{1}{2}u_0(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} u_1(s) ds}_{=: u^-(x-ct)}$$

où  $u^+$ , resp.  $u^-$ , correspond à une onde se propageant dans la direction des  $x > 0$ , resp. des  $x < 0$ .

### Cône de dépendance et propagation à vitesse finie

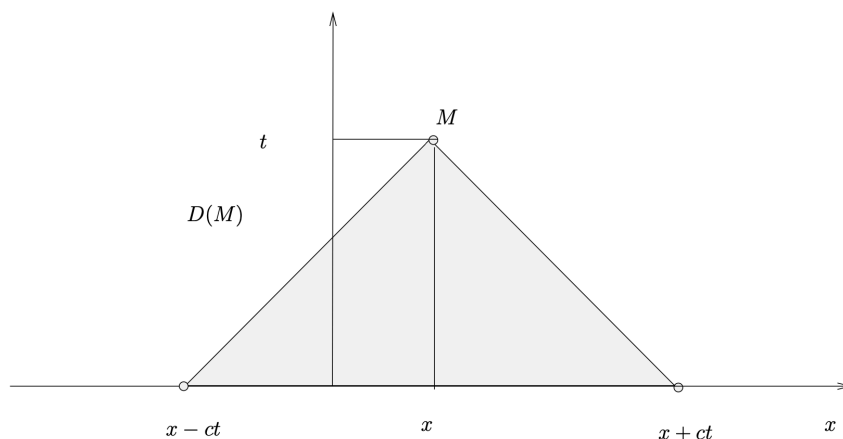


FIGURE 4.1 – Cône de dépendance.

La formule de d'Alembert (4.3) montre que la solution  $u(x, t)$  au point  $M(x, t)$  est entièrement déterminée par les valeurs des données initiales  $u_0$ ,  $u_1$  et du second membre  $f$  aux points du cône de dépendance  $D(M)$

(figure 4.1). Autrement dit, les ondes se propagent à vitesse finie. En effet, si  $u_0$ ,  $u_1$  et  $f$  sont à support compact dans  $K = [a, b]$ , alors, à l'instant  $t > 0$ ,  $u(\cdot, t)$  est à support dans  $K_t := [a - ct, b + ct]$ .

### Régularité de la solution de (4.2)

Si  $f = 0$ , la formule de d'Alembert (4.3) montre que si  $u_0 \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$  et si  $u_1 \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ , alors  $u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*})$ , i.e. l'équation des ondes conserve la régularité.

Dans le cas général où  $f \neq 0$ , alors, contrairement au cas du Laplacien, on ne gagne pas deux crans de régularité lorsqu'on passe de  $f$  à  $u$ . On na voit qu'on ne gagne qu'un cran de régularité.

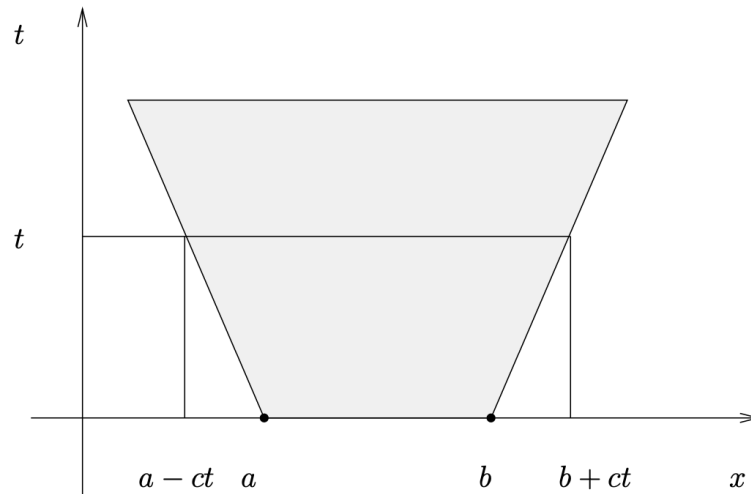


FIGURE 4.2 – Cône de de dépendance.

Pour cela, on suppose que  $u_0 = u_1 = 0$  par linéarité de l'équation des ondes, puisque l'influence des données initiales a été étudiée. Alors, on vérifie directement que la transformée de Fourier de  $u$  définie par :

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-i\xi x} dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0.$$

s'écrit :

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_0^t \frac{\sin(c\xi(t-s))}{c\xi} \hat{f}(\xi, s) ds, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0.$$

On en déduit :

$$c \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(\xi, t) = ic\xi \hat{u}(\xi, t) = i \int_0^t \sin(c\xi(t-s)) \hat{f}(\xi, s) ds, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0.$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) = \int_0^t \cos(c\xi(t-s)) \hat{f}(\xi, s) ds, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0.$$

d'où, par Cauchy-Schwartz :

$$\left| c \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(\xi, t) \right|^2 \leq t \int_0^t \|\hat{f}(\xi, s)\|^2 ds$$

$$\left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) \right|^2 \leq t \int_0^t \|\hat{f}(\xi, s)\|^2 ds$$

ce qui donne, par l'égalité de Plancherel :

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x}(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq t \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \|f(x, s)\|^2 dx ds$$

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq t \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \|f(x, s)\|^2 dx ds$$

ce qui montre que

$$f \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R})) \Rightarrow u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{R})) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}))$$

## Développement en série de Fourier

Soit à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & 0 < x < 1. \end{cases} \quad (4.4)$$

On cherche une solution  $u$  sous la forme :

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad x \in ]0, 1[, \quad t > 0$$

Après report dans (4.4), on obtient :

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = \lambda \in \mathbb{R},$$

avec la condition sur le bord :

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \underset{T(t) \neq 0}{\Rightarrow} X(0) = X(1) = 0. \quad (4.5)$$

Si  $\lambda = \omega^2 > 0$ , alors :

$$X(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x} \underset{(4.5)}{\equiv} 0$$

ce qui contredit  $u \neq 0$ . Donc nécessairement :  $\lambda = \omega^2 < 0$  et

$$X(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x)$$

avec

$$X(0) = X(1) = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \text{et} \quad \omega \in \pi\mathbb{N}.$$

On en déduit :

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} T_n(t) \underbrace{\sin(n\pi x)}_{=: X_n(x)} =: \sum_{n \geq 1} u_n(x, t) \quad (4.6)$$

On suppose que

$$u_0 \in H_0^1(0, 1) \quad \text{et} \quad u_1 \in L^2(0, 1) \quad (4.7)$$

sont développables en séries de Fourier sous la forme :

$$u_0(x) = \sum_{n \geq 0} b_n^0 \sin(n\pi x), \quad u_1(x) = \sum_{n \geq 0} b_n^1 \sin(n\pi x),$$

avec, compte tenu de (4.7) :

$$\sum_{n \geq 0} (n\pi)^2 |b_n^0|^2 < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} |b_n^1|^2 < +\infty$$

Alors les fonctions  $T_n$ ,  $n \geq 0$ , dans (4.6) sont, au moins formellement, solutions de

$$\begin{cases} T_n'' + (n\pi)^2 T_n = 0, & t > 0, \\ T_n(0) = b_n^0, \quad T_n'(0) = b_n^1, & n \geq 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

On vérifie immédiatement que (4.8) admet pour unique solution :

$$T_n(t) = b_n^0 \cos(n\pi t) + \frac{b_n^1}{n\pi} \sin(n\pi t), \quad t > 0, \quad n \geq 1. \quad (4.9)$$

**Proposition 4.2.2.** Soit  $u_0 \in H_0^1(0, 1)$  et soit  $u_1 \in L^2(0, 1)$ . On suppose que  $u_0$  et  $u_1$  sont développables en séries de Fourier sous la forme :

$$u_0(x) = \sum_{n \geq 0} b_n^0 \sin(n\pi x), \quad u_1(x) = \sum_{n \geq 0} b_n^1 \sin(n\pi x),$$

Alors, pour tout  $T > 0$ , la série (4.6), (4.9) converge uniformément dans  $\mathcal{C}^0([0, T])$  vers  $u \in \mathcal{C}^0([0, T], H_0^1(0, 1)) \cap \mathcal{C}^1([0, T], L^2(0, 1))$  solution de :

$$\begin{aligned} u &\in \mathcal{C}^0([0, T], H_0^1(0, 1)), \\ \frac{\partial u}{\partial t} &\in \mathcal{C}^0([0, T], L^2(0, 1)), \\ \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} v dx + \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial x} v' dx &= 0, \quad \forall v \in H_0^1(0, 1), \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T) \\ u(0) &= u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Soit  $T > 0$ . On a :  $\forall n \geq 1, \forall x \in ]0, 1[, \forall t \in [0, T]$ ,

$$|u_n(x, t)| \leq |T_n(t)| \leq |b_n^0| + \frac{|b_n^1|}{n\pi}$$

d'où :  $\forall n \geq 1, \forall t > 0$ ,

$$\int_0^1 |u(t)|^2 dx = \sum_{n \geq 1} |T_n(t)|^2 \leq 2 \sum_{n \geq 1} \left( |b_n^0|^2 + \frac{|b_n^1|^2}{(n\pi)^2} \right) < +\infty$$

La série majorante étant convergente, on en déduit que  $t \mapsto u(t)$  est somme d'une série de fonctions continues uniformément convergente sur  $[0, T]$ , donc que  $u \in \mathcal{C}^0([0, T], L^2(0, 1))$ . De même :

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}(x, t) = n\pi T_n(t) \cos(n\pi x), \quad \forall x \in [0, 1], \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall n \geq 1$$

donc :  $\forall n \geq 1, \forall t > 0$ ,

$$\int_0^1 \left| \sum_{n \geq 1} \frac{\partial u_n}{\partial x}(t) \right|^2 dx = \sum_{n \geq 1} |T_n(t)|^2 \leq 2 \sum_{n \geq 1} ((n\pi)^2 |b_n^0|^2 + |b_n^1|^2) < +\infty$$

où la série majorante est convergente. On en déduit que la série des dérivées  $\sum \frac{\partial u_n}{\partial x}$  est uniformément convergente sur  $[0, T]$  et que  $u \in \mathcal{C}^0([0, T], H_0^1(0, 1))$  avec

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n \geq 1} n\pi T_n(t) \cos(n\pi x), \quad \forall t \in [0, T], \quad \text{p.p. en } x \in ]0, 1[.$$

D'autre part :  $\forall n \geq 1, \forall x \in ]0, 1[, \forall t \in [0, T]$ ,

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = T'_n(t) \sin(n\pi x)$$

avec

$$\begin{aligned} |T'_n(t)|^2 &\leq 2((n\pi)^2 |b_n^0|^2 + |b_n^1|^2) \\ \Rightarrow \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx &= \sum_{n \geq 1} |T'_n(t)|^2 \leq 2 \sum_{n \geq 1} ((n\pi)^2 |b_n^0|^2 + |b_n^1|^2) < +\infty \end{aligned}$$

La série majorante étant convergente, on en déduit que la série des dérivées  $\frac{\partial u_n}{\partial t}$  est uniformément convergente sur  $[0, T]$  de somme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n \geq 1} \frac{\partial u_n}{\partial t} = \sum_{n \geq 1} T'_n(t) \sin(n\pi x) \quad \forall t \in [0, T], \quad \text{p.p. en } x \in ]0, 1[$$

et donc  $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}^0([0, T], L^2(0, 1))$ .

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(0, 1)$  et soit  $N \geq 1$ . Par construction :

$$\sum_{n=1}^N \int_0^1 \frac{\partial^2 u_n(t)}{\partial t^2} \varphi dx + \sum_{n=1}^N \int_0^1 \frac{\partial u_n(t)}{\partial x} \varphi' dx = 0, \quad \forall t > 0.$$

Soit  $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$ . Il en résulte :

$$-\sum_{n=1}^N \int_0^T \phi'(t) \int_0^1 \frac{\partial u_n(t)}{\partial t} \varphi dx dt + \sum_{n=1}^N \int_0^T \phi(t) \int_0^1 \frac{\partial u_n(t)}{\partial x} \varphi' dx dt = 0.$$

avec, par convergence uniforme de la série  $\sum u_n$  vers  $u$  dans  $\mathcal{C}^0([0, T], H_0^1(\Omega))$  :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \int_0^T \phi(t) \int_0^1 \frac{\partial u_n(t)}{\partial x} \varphi' dx dt = \int_0^T \phi(t) \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial x} \varphi' dx dt,$$

et par convergence uniforme de la série  $\sum \frac{\partial u_n}{\partial t}$  vers  $\frac{\partial u}{\partial t}$  dans  $\mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega))$  :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \int_0^T \phi'(t) \int_0^1 \frac{\partial u_n(t)}{\partial t} \varphi dx dt = \int_0^T \phi'(t) \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} \varphi dx dt,$$

i.e. :

$$-\int_0^T \phi'(t) \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} \varphi dx dt + \int_0^T \phi(t) \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial x} \varphi' dx dt = 0.$$



i.e. encore, par densité de  $\mathcal{D}(0,1)$  dans  $H_0^1(0,1)$  :  $\forall v \in H_0^1(0,1), \forall \phi \in \mathcal{D}(0,T)$ ,

$$-\int_0^T \phi'(t) \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} v dx dt + \int_0^T \phi(t) \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial x} v' dx dt = 0.$$

Finalement :

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} v dx + \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial x} v' dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(0,1), \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0,T).$$

□

**Proposition 4.2.3.** *Soit  $u_0 \in H_0^1(0,1)$  t.q.  $u_0' \in H^1(0,1)$  et soit  $u_1 \in H^1(0,1)$ . On suppose que  $u_0$  et  $u_1$  sont développables en séries de Fourier sous la forme :*

$$u_0(x) = \sum_{n \geq 0} b_n^0 \sin(n\pi x), \quad u_1(x) = \sum_{n \geq 0} b_n^1 \sin(n\pi x),$$

Alors, pour tout  $T > 0$ , la série (4.6), (4.9) converge uniformément dans  $\mathcal{C}^0([0,T], H_0^1(0,1)) \cap \mathcal{C}^2([0,T], L^2(0,1))$  solution de :

$$\begin{aligned} u &\in \mathcal{C}^0([0,T], H_0^1(0,1)), \\ \frac{\partial u}{\partial t} &\in \mathcal{C}^0([0,T], H^1(0,1)), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &\in \mathcal{C}^0([0,T], L^2(0,1)), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{dans } L^2((0,1) \times (0,T)) \\ u(0) &= u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Par régularité de  $u_0$  et  $u_1$  :

$$\sum_{n \geq 1} ((n\pi)^4 |b_n^0|^2 + (n\pi)^2 |b_n^1|^2) < +\infty.$$

Par le même raisonnement que précédemment, on montre que la série  $\sum \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}$  converge uniformément dans  $\mathcal{C}^0([0,T], L^2(0,1))$  vers  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ . □

**Proposition 4.2.4.** *Sous les hypothèses de la Proposition 4.2.2, l'énergie se conserve au sens suivant :*

$$\frac{1}{2} \left| \frac{\partial u(t)}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \frac{\partial u(t)}{\partial x} \right|^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 |u_0'|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 |u_1|^2 dx, \quad \forall t \in [0,T].$$

*Démonstration.* Soit  $t >$  et soit  $n \geq 1$ . par définition de  $T_n$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t (T_n''(s)T_n'(s) + (n\pi)^2 T_n(s)T_n'(s)) ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \left( \frac{d}{ds} ((T_n'(s))^2) + (n\pi)^2 (|T_n(s)|^2)' \right) ds \\ &= \frac{1}{2} (|T_n'(t)|^2 + (n\pi)^2 |T_n(t)|^2) - \frac{1}{2} ((b_n^1)^2 + (n\pi)^2 |b_n^0|^2). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (|T_n'(t)|^2 + (n\pi)^2 |T_n(t)|^2) - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} ((b_n^1)^2 + (n\pi)^2 |b_n^0|^2) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \frac{\partial u(t)}{\partial t} \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \frac{\partial u(t)}{\partial x} \right|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 |u_1|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 |u'_0|^2 dx \end{aligned}$$

□

### 4.3 Approximation numérique

On considère les subdivisions :

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1$$

$$t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$$

supposées régulières de pas  $\Delta x > 0$  et  $\Delta t > 0$  resp.

Soit  $(u_i^n)_{0 \leq i \leq N+1, n \geq 0}$  la suite solution du schéma :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^{n-1} - 2u_i^n + u_i^{n+1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2} = f(x_i), \quad i = 1 \dots, N, \quad n \geq 0 \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad n \geq 0, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

*Remarque 15.* On veut avoir :  $u_i^n \sim u(x_i, t_n)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $n \geq 0$ .

**Proposition 4.3.1.** *Le schéma (4.10) est consistant.*

*Démonstration.* On définit l'erreur de consistance  $\varepsilon_i^n$  au point  $(x_i, t_n)$  en posant :  $\varepsilon_i^n = \varepsilon(x_i, t_n)$  avec :  $\forall x \in [0, 1], \forall t > 0$ .

$$\varepsilon(x, t) = \frac{u(x, t - \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t + \Delta t)}{\Delta t^2} + \frac{u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x + \Delta x, t)}{\Delta x^2} - f(x).$$

La formule de Taylor donne directement :  $\forall i \in [[1, N]], \forall n \geq 0$ ,

$$|\varepsilon_i^n| \leq C \left( \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right\|_{\infty} (\Delta t)^2 + \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\|_{\infty} (\Delta x)^2 \right), \quad \forall i \in [[1, N]], \quad \forall n \geq 0.$$

□