Chapitre 4

Equation des Ondes

4.1 Introduction et généralités

Une onde naît quand une perturbation locale d'une grandeur physique Ψ mesurée par la dérivée temporelle $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ induit la variation spatiale d'une autre grandeur physique Φ, osoit :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = a \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

et inversement :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = b \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

pour des constantes $a, b > 0$. On en déduit que Ψ et Φ sont solutions de la même équation :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = ab \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = ab \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

Ondes acoustiques

Dans un $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert rempli de fluide, la propagation d'ondes acoustiques dépend de la densité $\rho(x)$ du fluide au point $x \in \Omega$, de la vitesse de prpagation locale $c(x)$ des ondes ; La pression $p(x,t)$ et la vitesse du fluide sont liées par les équations :

$$\rho(x) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{\nabla} p, \quad \frac{1}{\rho(x) c^2(x)} \frac{\partial p}{\partial t} = \operatorname{div}(\vec{v})$$

d'où on déduit que p est solution de :

$$\frac{1}{\rho(x) c^2(x)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \operatorname{div}\left(\frac{\vec{\nabla} p}{\rho(x)} \right) = 0, \quad \Omega, \quad t > 0.$$

En milieu homogène, cette équation devient :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0, \quad \Omega, \quad t > 0.$$

4.2 Propriétés de l'équation des ondes $1D$

Le problème modèle

Soit le problème : trouver $u : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ solution de (4.1)

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mu \nabla u) = f, \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \mathbb{R}^N \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{4.1}$$

Les coefficients $\rho(x)$ et $\mu(x)$ qui caractérisent le milieu de propagation sont supposés mesurables et vérifier :

$$0 < \rho_- \leq \rho(x) \leq \rho_+ < +\infty \quad \text{p.p. dans} \quad \mathbb{R}^N$$
$$0 < \mu_- \leq \mu(x) \leq \mu_+ < +\infty \quad \text{p.p. dans} \quad \mathbb{R}^N$$

Les données sont donc, outre ρ et μ, les donées initiales $u_0(x)$, $u_1(x)$ et le second membre $f(x,t)$.

La formule de d'Alembert

On suppose que $N = 1$ et que l'onde se propage avec la vitesse constante $c > 0$. L'équation (4.1) devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \\ u(x,0) = u_0(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \end{cases} \tag{4.2}$$

Théorème 4.2.1. *La solution du problème (4.2) est donnée par la formule de d'Alembert :*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)ds + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{|y-x| \leq c(t-s)} f(y,s)ds \tag{4.3}$$

Démonstration. On remarque que l'opérateur des ondes se décompose sous la forme :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \iff \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - c\dfrac{\partial v}{\partial x} = f, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = v \end{cases}$$

On conclut à l'aide de la méthode des caractéristiques. □

Remarque 14. Si $f = 0$ alors la solution se décompose sous la forme :

$$u(x,t) = \underbrace{\frac{1}{2}u_0(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} u_1(s)ds}_{=:u^+(x+ct)} + \underbrace{\frac{1}{2}u_0(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} u_1(s)ds}_{=:u^-(x-ct)}$$

où u^+, resp. u^-, correspond à une onde se propageant dans la direction des $x > 0$, resp. des $x < 0$.

Cône de dépendance et propagation à vitesse finie

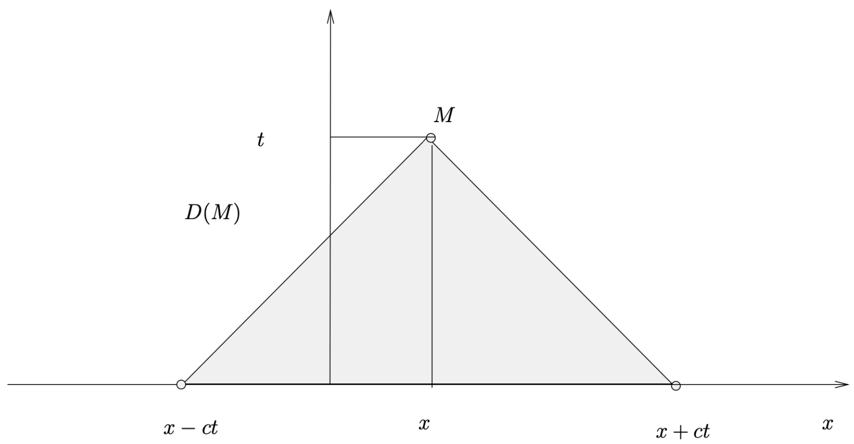

FIGURE 4.1 – Cône de dépendance.

La formule de d'Alembert (4.3) montre que la solution $u(x,t)$ au point $M(x,t)$ est entièrement déterminée par les valeurs des données initiales u_0, u_1 et du second membre f aux points du cône de dépendance $D(M)$

(figure 4.1). Autrement dit, les ondes se propagent à vitesse finie. En effet, si u_0, u_1 et f sont à support compact dans $K = [a, b]$, alors, à l'instant $t > 0$, $u(\cdot, t)$ est à support dans $K_t := [a - ct, b + ct]$.

Régularité de la solution de (4.2)

Si $f = 0$, la formule de d'Alembert (4.3) montre que si $u_0 \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$ et si $u_1 \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, alors $u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*})$, i.e. l'équation des ondes conserve la régularité.

Dans le cas général où $f \neq 0$, alors, contrairement au cas du Laplacien, on ne gagne pas deux crans de régularité lorsqu'on passe de f à u. On na voir qu'on ne gagne qu'un cran de régularité.

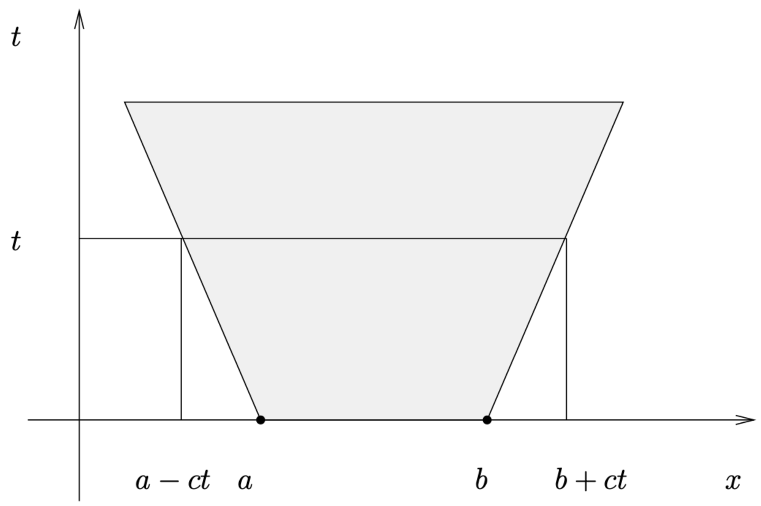

FIGURE 4.2 – Cône de de dépendance.

Pour cela, on suppose que $u_0 = u_1 = 0$ par linéarité de l'équation des ondes, puisque l'influence des données initiales a été étudiée. Alors, on vérifie directement que la transformée de Fourier de u définie par :

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-i\xi x} dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0.$$

s'écrit :

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_0^t \frac{\sin(c\xi(t - s))}{c\xi} \hat{f}(\xi, s) ds, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0.$$

On en déduit :

$$c\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(\xi,t) = ic\xi\hat{u}(\xi,t) = i\int_0^t \sin(c\xi(t-s))\hat{f}(\xi,s)ds, \quad \forall\xi\in\mathbb{R}, \quad \forall t>0.$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,t) = \int_0^t \cos(c\xi(t-s))\hat{f}(\xi,s)ds, \quad \forall\xi\in\mathbb{R}, \quad \forall t>0.$$

d'où, par Cauchy-Schwartz :

$$\left|c\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(\xi,t)\right|^2 \leq t\int_0^t \|\hat{f}(\xi,s)\|^2 ds$$

$$\left|\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,t)\right|^2 \leq t\int_0^t \|\hat{f}(\xi,s)\|^2 ds$$

ce qui donne, par l'égalité de Plancherel :

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq t\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \|f(x,s)\|^2 dxds$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq t\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \|f(x,s)\|^2 dxds$$

ce qui montre que

$$f\in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R})) \Rightarrow u\in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{R})) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}))$$

Développement en série de Fourier

Soit à résoudre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0<x<1, \quad t>0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t>0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad 0<x<1. \end{cases} \tag{4.4}$$

On cherche une solution u sous la forme :

$$u(x,t) = X(x)T(t), \quad x\in]0,1[, \quad t>0$$

Après report dans (4.4), on obtient :

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = \lambda \in \mathbb{R},$$

avec la condition sur le bord :

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \underset{T(t)\neq 0}{\Rightarrow} X(0) = X(1) = 0. \tag{4.5}$$

Si $\lambda = \omega^2 > 0$, alors :

$$X(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x} \underset{(4.5)}{\equiv} 0$$

ce qui contredit $u \not\equiv 0$. Donc nécessairement : $\lambda = \omega^2 < 0$ et

$$X(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$$

avec

$$X(0) = X(1) = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \text{et} \quad \omega \in \pi\mathbb{N}.$$

On en déduit :

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} T_n(t)\underbrace{\sin(n\pi x)}_{=:X_n(x)} =: \sum_{n\geq 1} u_n(x,t) \tag{4.6}$$

On suppose que

$$u_0 \in H_0^1(0,1) \quad \text{et} \quad u_1 \in L^2(0,1) \tag{4.7}$$

sont développables en séries de Fourier sous la forme :

$$u_0(x) = \sum_{n\geq 0} b_n^0 \sin(n\pi x), \quad u_1(x) = \sum_{n\geq 0} b_n^1 \sin(n\pi x),$$

avec, compte tenu de (4.7) :

$$\sum_{n\geq 0} (n\pi)^2 |b_n^0|^2 < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} |b_n^1|^2 < +\infty$$

Alors les fonctions T_n, $n \geq 0$, dans (4.6) sont, au moins formellement, solutions de

$$\begin{cases} T_n'' + (n\pi)^2 T_n = 0, \quad t > 0, \\ \\ T_n(0) = b_n^0, \quad T'(0) = b_n^1, \quad n \geq 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

On vérifie immédiatement que (4.8) admet pour unique solution :

$$T_n(t) = b_n^0 \cos(n\pi t) + \frac{b_n^1}{n\pi}\sin(n\pi t), \quad t > 0, \quad n \geq 1. \tag{4.9}$$

Proposition 4.2.2. *Soit $u_0 \in H_0^1(0,1)$ et soit $u_1 \in L^2(0,1)$. On suppose que u_0 et u_1 sont développables en séries de Fourier sous la forme :*

$$u_0(x) = \sum_{n\geq 0} b_n^0 \sin(n\pi x), \quad u_1(x) = \sum_{n\geq 0} b_n^1 \sin(n\pi x),$$

Alors, pour tout $T > 0$, la série (4.6), (4.9) converge uniformément dans $\mathcal{C}^0([0,T])$ vers $u \in \mathcal{C}^0([0,T], H_0^1(0,1)) \cap \mathcal{C}^1([0,T], L^2(0,1))$ solution de :

$$u \in \mathcal{C}^0([0,T], H_0^1(0,1)),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}^0([0,T], L^2(0,1)),$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} v dx + \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial x} v' dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(0,1), \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(0,T)$$

$$u(0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1.$$

Démonstration. Soit $T > 0$. On a : $\forall n \geq 1$, $\forall x \in]0,1[$, $\forall t \in [0,T]$,

$$|u_n(x,t)| \leq |T_n(t)| \leq |b_n^0| + \frac{|b_n^1|}{n\pi}$$

d'où : $\forall n \geq 1$, $\forall t > 0$,

$$\int_0^1 |u(t)|^2 dx = \sum_{n\geq 1} |T_n(t)|^2 \leq 2\sum_{n\geq 1}\left(|b_n^0|^2 + \frac{|b_n^1|^2}{(n\pi)^2}\right) < +\infty$$

La série majorante étant convergente, on en déduit que $t \mapsto u(t)$ est somme d'une série de fonctions continues uniformément convergente sur $[0,T]$, donc que $u \in \mathcal{C}^0([0,T], L^2(0,1))$. De même :

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,t) = n\pi T_n(t)\cos(n\pi x), \quad \forall x \in [0,1], \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall n \geq 1$$

donc : $\forall n \geq 1$, $\forall t > 0$,

$$\int_0^1 \left|\sum_{n\geq 1} \frac{\partial u_n}{\partial x}(t)\right|^2 dx = \sum_{n\geq 1} |T_n(t)|^2 \leq 2\sum_{n\geq 1}\left((n\pi)^2|b_n^0|^2 + |b_n^1|^2\right) < +\infty$$

où la série majorante est convergente. On en déduit que la série des dérivées $\sum \frac{\partial u_n}{\partial x}$ est uniformément convergente sur $[0,T]$ et que $u \in \mathcal{C}^0([0,T], H_0^1(0,1))$ avec

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n\geq 1} n\pi T_n(t)\cos(n\pi x), \quad \forall t \in [0,T], \quad \text{p.p. en } x \in]0,1[.$$

D'autre part : $\forall n \geq 1$, $\forall x \in]0,1[$, $\forall t \in [0,T]$,

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = T_n'(t)\sin(n\pi x)$$

avec

$$|T_n'(t)|^2 \leq 2((n\pi)^2|b_n^0|^2 + |b_n^1|^2)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx = \sum_{n\geq 1} |T_n'(t)|^2 \leq 2\sum_{n\geq 1}((n\pi)^2|b_n^0|^2 + |b_n^1|^2) < +\infty$$

La série majorante étant convergente, on en déduit que la série des dérivées $\frac{\partial u_n}{\partial t}$ est uniformément convergente sur $[0,T]$ de somme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n\geq 1}\frac{\partial u_n}{\partial t} = \sum_{n\geq 1} T_n'(t)\sin(n\pi x) \quad \forall t \in [0,T], \quad \text{p.p. en } x \in]0,1[$$

et donc $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}^0([0,T], L^2(0,1))$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$ et soit $N \geq 1$. Par construction :

$$\sum_{n=1}^{N}\int_0^1 \frac{\partial^2 u_n(t)}{\partial t^2}\varphi dx + \sum_{n=1}^{N}\int_0^1 \frac{\partial u_n(t)}{\partial x}\varphi' dx = 0, \quad \forall t > 0.$$

Soit $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$. Il en résulte :

$$-\sum_{n=1}^{N}\int_0^T \phi'(t)\int_0^1 \frac{\partial u_n(t)}{\partial t}\varphi dxdt + \sum_{n=1}^{N}\int_0^T \phi(t)\int_0^1 \frac{\partial u_n(t)}{\partial x}\varphi' dxdt = 0.$$

avec, par convergence uniforme de la série $\sum u_n$ vers u dans $\mathcal{C}^0([0,T], H_0^1(\Omega))$:

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_0^T \phi(t)\int_0^1 \frac{\partial u_n(t)}{\partial x}\varphi' dxdt = \int_0^T \phi(t)\int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial x}\varphi' dxdt,$$

et par convergence uniforme de la série $\sum \frac{\partial u_n}{\partial t}$ vers $\frac{\partial u}{\partial t}$ dans $\mathcal{C}^0([0,T], L^2(\Omega))$:

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_0^T \phi'(t)\int_0^1 \frac{\partial u_n(t)}{\partial t}\varphi dxdt = \int_0^T \phi'(t)\int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial t}\varphi dxdt,$$

i.e. :

$$-\int_0^T \phi'(t)\int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial t}\varphi dxdt + \int_0^T \phi(t)\int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial x}\varphi' dxdt = 0.$$

i.e. encore, par densité de $\mathcal{D}(0,1)$ dans $H_0^1(0,1)$: $\forall v \in H_0^1(0,1)$, $\forall \phi \in \mathcal{D}(0,T)$,

$$-\int_0^T \phi'(t) \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} v dx dt + \int_0^T \phi(t) \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial x} v' dx dt = 0.$$

Finalement :

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} v dx + \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial x} v' dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(0,1), \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(0,T).$$

□

Proposition 4.2.3. *Soit $u_0 \in H_0^1(0,1)$ t.q. $u_0' \in H^1(0,1)$ et soit $u_1 \in H^1(0,1)$. On suppose que u_0 et u_1 sont développables en séries de Fourier sous la forme :*

$$u_0(x) = \sum_{n \geq 0} b_n^0 \sin(n\pi x), \quad u_1(x) = \sum_{n \geq 0} b_n^1 \sin(n\pi x),$$

Alors, pour tout $T > 0$, la série (4.6), (4.9) converge uniformément dans $\mathcal{C}^0([0,T])$ vers $u \in \mathcal{C}^0([0,T], H_0^1(0,1)) \cap \mathcal{C}^2([0,T], L^2(0,1))$ solution de :

$$\begin{aligned}
u &\in \mathcal{C}^0([0,T], H_0^1(0,1)),\\
\frac{\partial u}{\partial t} &\in \mathcal{C}^0([0,T], H^1(0,1)),\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &\in \mathcal{C}^0([0,T], L^2(0,1)),\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{dans} \quad L^2((0,1) \times (0,T))\\
u(0) = u_0, &\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1.
\end{aligned}$$

Démonstration. Par régularité de u_0 et u_1 :

$$\sum_{n \geq 1} \left((n\pi)^4 |b_n^0|^2 + (n\pi)^2 |b_n^1|^2 \right) < +\infty.$$

Par le même raisonnement que précédemment, on montre que la série $\sum \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}$ converge uniformément dans $\mathcal{C}^0([0,T], L^2(0,1))$ vers $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. □

Proposition 4.2.4. *Sous les hypothèses de la Proposition 4.2.2, l'énergie se conserve au sens suivant :*

$$\frac{1}{2} \left| \frac{\partial u(t)}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \frac{\partial u(t)}{\partial x} \right|^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 |u_0'|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 |u_1|^2 dx, \quad \forall t \in [0,T].$$

Démonstration. Soit $t >$ et soit $n \geq 1$. par définition de T_n :

$$0 = \int_0^t (T_n''(s)T_n'(s) + (n\pi)^2 T_n(s)T_n'(s))ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t (\frac{d}{ds}\left((T_n'(s))^2\right) + (n\pi)^2(|T_n(s)|^2)')ds$$

$$= \frac{1}{2}(|T_n'(t)|^2 + (n\pi)^2|T_n(t)|^2) - \frac{1}{2}((b_n^1)^2 + (n\pi)^2|b_n^0|^2).$$

On en déduit :

$$0 = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}(|T_n'(t)|^2 + (n\pi)^2|T_n(t)|^2) - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}((b_n^1)^2 + (n\pi)^2|b_n^0|^2)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left|\frac{\partial u(t)}{\partial t}\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \left|\frac{\partial u(t)}{\partial x}\right|^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^1 |u_1|^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^1 |u_0'|^2 dx$$

□

4.3 Approximation numérique

On considère les subdivisions :

$$x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$$

$$t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots$$

supposées régulières de pas $\Delta x > 0$ et $\Delta t > 0$ resp.

Soit $(u_i^n)_{0\leq i\leq N+1, n\geq 0}$ la suite solution du schéma :

$$\begin{cases} u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, \cdots, N+1, \\ v_i^0 = u_1(x_i) - c u_0'(x_i), \quad i = 1, \cdots, N, \\ u_i^1 = \left(1 - c\dfrac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_i^0 + c\dfrac{\Delta t}{\Delta x} u_{i-1}^0 + \Delta t v_i^0, \quad i = 1, \cdots, N. \end{cases} \tag{4.10}$$

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n-1} - 2u_i^n + u_i^{n+1}}{\Delta t^2} - \dfrac{c^2}{(\Delta x)^2}(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n) = f(x_i), \quad i = 1 \cdots, N, \quad n \geq 1 \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad n \geq 1, \end{cases} \tag{4.11}$$

Remarque 15. L'initialisation (4.10) est le premier pas du schéma :

$$\begin{cases} \dfrac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} + c\dfrac{v_i^n - v_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, \\ \\ \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - c\dfrac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = v_i^n, \quad i = 1, \cdots, N, \quad n \geq 0, \\ \\ v_i^0 = u_1(x_i) - cu_0'(x_i), \quad u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1, \cdots, N \end{cases}$$

qui découle imédialement de la réécriture de (4.2)sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + c\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \\ \frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = v, \quad 0 < x < 1 \quad t > 0. \end{cases}$$

Remarque 16. On veut avoir : $u_i^n \sim u(x_i, t_n)$, $i = 1, \cdots, N$, $n \geq 0$.

Proposition 4.3.1. *Le schéma (4.10)–(4.11) est consistant d'ordre* 2 *en temps et en espace.*

Démonstration. Soit $n \geq 1$. On définit l'erreur de consistance ε_i^n au point (x_i, t_n) en posant : $\varepsilon_i^n = \varepsilon(x_i, t_n)$ avec : $\forall x \in [0, 1]$, $\forall t > 0$.

$$\varepsilon(x, t) = \frac{u(x, t - \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t + \Delta t)}{\Delta t^2} + \\ - \frac{c^2}{(\Delta x)^2}\left(u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x + \Delta x, t)\right) - f(x).$$

La formule de Taylor donne directement : $\forall i \in [[1, N]]$, $\forall n \geq 0$,

$$|\varepsilon_i^n| \leq C\left(\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right\|_\infty (\Delta t)^2 + \left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right\|_\infty (\Delta x)^2\right), \quad \forall i \in [[1, N]], \quad \forall n \geq 0. \quad (4.12)$$

Pour $n = 0$, on définit l'erreur de consistance au point (x_i, t_0), i.e. associée à l'étape d'initialisation (4.10) en posant : $\varepsilon_i^0 = \varepsilon_0(x_i)$ où : $\forall x \in [0, 1]$,

$$\varepsilon_0(x) = u(x, \Delta t) - \left(1 - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)u_0(x) - c\frac{\Delta t}{\Delta x}u_0(x - \Delta x) - \Delta t(u_1(x) - cu_0'(x)).$$

On a :

$$\left(1 - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)u_0(x) + c\frac{\Delta t}{\Delta x}u_0(x - \Delta x) = u_0(x) + c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(-\Delta x u_0'(x) + O((\Delta x)^2)\right)$$

$$= u_0(x) - \Delta t u_0'(x) + \underbrace{\Delta t O(\Delta x)}_{=O((\Delta t)^2+(\Delta x)^2)},$$

donc

$$\varepsilon_0(x) = u(x,\Delta t) - u_0(x) + \Delta t u_0'(x) - \Delta t u_0'(x) - \Delta t u_1(x) + O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$$

$$= u(x,\Delta t) - u(x,0) - \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) + O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2) = O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$$

Dans tous les cas :

$$\varepsilon_i^n = O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2), \quad i = 1,\ldots,N, \quad n \geq 0.$$

$\square$

Proposition 4.3.2. *Le schéma (4.10)–(4.11) est convergent d'ordre* 2 *en temps et en espace.*

Démonstration. Soit $(\mu_i^n)_{n\geq 0}$ une suite de réels et soit z_i^n, $n \geq 0$, $i = 1,\cdots,N$, définie par :

$$\begin{cases} \dfrac{z_i^{n-1} - 2z_i^n + z_i^{n+1}}{\Delta t^2} - \dfrac{z_{i-1}^n - 2z_i^n + z_{i+1}^n}{\Delta x^2} = \mu_i^n, \quad i = 1\cdots,N, \quad n \geq 1 \\ \\ z_0^n = z_{N+1}^n = 0, \quad n \geq 0, \\ \\ z^0 \in \mathbb{R}^N, \quad z^1 \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

ce qu'on réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} z^{n+1} - z^n = z^n - z^{n-1} - \left(\dfrac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N z^n + (\Delta t)^2 \mu^n, \quad n \geq 0 \\ \\ z_0^n = z_{N+1}^n = 0, \quad n \geq 0, \\ \\ z^0 \in \mathbb{R}^N, \quad z^1 \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Soit $n \geq 0$. On en déduit :

$$(z^{n+1} - z^n) - (z^n - z^{n-1}) + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N z^n = (\Delta t)^2 \mu^n. \tag{4.13}$$

On pose :

$$v^k = z^{k+1} - z^k, \quad \forall k \geq 0.$$

En multipliant les deux membres de (4.13) par $z^{n+1} - z^{n-1} = v^n + v^{n-1}$, on obtient :

$$\|v^n\|_2^2 - \|v^{n-1}\|_2^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N z^n \cdot (z^{n+1} - z^{n-1}) = (\Delta t)^2 \mu^n \cdot (z^{n+1} - z^{n-1})$$

i.e., compte tenu de la symétrie de A_N :

$$\|v^n\|_2^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N z^n \cdot z^{n+1} - (\Delta t)^2 \mu^n \cdot v^n = \|v^{n-1}\|_2^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N z^{n-1} \cdot z^n - (\Delta t)^2 \mu^n \cdot v^{n-1}$$

$$= \|v^0\|_2^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N z^0 \cdot z^1 - (\Delta t)^2 \mu^n \cdot v^0 =: E^0$$

d'où on déduit :

$$\|v^n\|_2^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N z^n \cdot z^{n+1} = (\Delta t)^2 \mu^n \cdot v^n + E^0$$

On remarque que :

$$A_N z^n \cdot z^{n+1} = A_N z^n \cdot v^n + A_N z^n \cdot z^n$$

avec : $\forall \alpha > 0$:

$$|A_N z^n \cdot v^n| \leq \frac{\alpha}{2} \|A_N z^n\|_2^2 + \frac{1}{2\alpha} \|v^n\|_2^2.$$

Soit $\alpha > 0$. Il en résulte :

$$E^0 + (\Delta t)^2 \mu^n \cdot v^n \geq \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right) \|v^n\|_2^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (1 - 2\alpha) A_N z^n \cdot z^n.$$

et on choisit $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$. Alors :

$$1 > \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 > \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \Rightarrow 0 < \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 < 1.$$

On remarque que

$$\min_{0<\alpha<\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2, 1 - 2\alpha\right)$$

atteint son maximum en $\alpha > 0$ t.q.

$$\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right) = 1 - 2\alpha$$

i.e. en $\alpha = \alpha_0$ solution. de :

$$\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 = 2\alpha \iff \alpha_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right).$$

On en déduit :

$$E^0 + (\Delta t)^2 \mu^n \cdot v^n \geq \left(1 - \frac{c}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\left(\|v^n\|_2^2 + A_N z^n \cdot z^n\right) \tag{4.14}$$

En particulier, si $E^0 = 0$, alors :

$$\|v^n\|_2 \leq \frac{(\Delta t)^2}{\left(1 - \frac{c}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)}\|\mu^n\|_2, \quad \forall n \geq 0. \tag{4.15}$$

On définit l'erreur de convergence au point (x_i, t_n), $1 \leq i \leq N$, $n \geq 0$, par :

$$e_i^n = u(x_i, t_n) - u_i^n, \quad i = 1, \cdots, N, \quad n \geq 0.$$

Alors, pour le choix $\mu_i^n = \varepsilon_i^n$, $i = 1, \cdots, N$,$n \geq 0$, on obtient $z^n = e^n$, $n \geq 0$. Par définition : $z^0 = 0$, $z^1 = e^1$, ce qui entraîne :

$$E^0 = \|z^1\|^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N z^0 \cdot z^1 - \varepsilon^0 \cdot z^1 = \left(\underbrace{e^1 - \varepsilon^0}_{=0}\right) \cdot e^1 = 0$$

donc (4.15) s'applique :

$$\|e^n\|_2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|e^{k+1} - e^k\|_2 \underset{(4.12)}{\leq} \frac{Ct_n\Delta t}{\left(1 - \frac{c}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2), \quad \forall n \geq 0.$$

En particulier

$$\sup_{n\Delta t \leq T} \|e^n\|_2 \leq \frac{CT\Delta t}{\left(1 - \frac{c}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$$

$\square$

Proposition 4.3.3. *Si $f = 0$ dans le schéma (4.11), alors l'énergie est conservée. Plus précisément, si on définit l'énergie discrète au temps t_n, $n \geq 0$, par :*

$$E^n := \|u^n - u^{n-1}\|_2^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N u^n \cdot u^{n-1},$$

alors : $E^{n+1} = E^n$, $\forall n \geq 0$.

Démonstration. Soit $n \geq 0$. Si $f = 0$ alors :

$$(u^{n+1} - u^n) - (u^n - u^{n-1}) + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N u^n = 0.$$

Après multiplication des deux membres de cette égalité par $u^{n+1} - u^{n-1} = (u^{n+1} - u^n) + (un - u^{n-1})$ on obtient :

$$\|u^{n+1} - u^n\|^2 - \|u^n - u^{n-1}\|^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N u^n \cdot (u^{n+1} - u^{n-1}) = 0.$$

On conclut grâce à la symétrie de A_N. □

Remarque 17. Avec les notations de la Proposition 4.3.3, si on pose $v^n = u^{n+1} - u^n$, alors

$$E^n = \|v^n\|_2^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N v^n \cdot u^{n-1} + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N u^{n-1} \cdot u^{n-1}$$

et le même raisonnement que pour (4.14) conduit à :

$$E^n \geq \left(1 - \frac{c}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\left(\|v^n\|_2^2 + A_N u^n \cdot u^n\right).$$

Proposition 4.3.4. *Le schéma (4.10)–(4.11) est stable au sens de Von Neumann ssi* $\frac{c\Delta t}{\Delta x} < 1$. *Si de plus*

$$u_j^0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^0 e^{ikj\Delta x} \quad et \quad u_j^1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^1 e^{ijk\Delta x}$$

alors :

$$u_j^n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^n e^{ikj\Delta x}$$

avec

$$c_k^n = a_k e^{in\theta_k} + b_k e^{-in\theta_k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0 \tag{4.16}$$

où les constantes a_k, b_k, θ_k *ne dépendent que de* Δt, Δx, *et* $k \in \mathbb{Z}$, *et où*

$$\theta_k \underset{(\Delta t,\Delta x)\to(0,0)}{\sim} ckt_n, \quad \forall n \geq 0.$$

Démonstration. On vérifie directement que

$$\begin{pmatrix} c_k^n \\ c_k^{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2-\alpha(k)^2 \end{pmatrix}}_{=:S(k)} \begin{pmatrix} c_k^{n-1} \\ c_k^n \end{pmatrix} = (S(k))^n \begin{pmatrix} c_k^0 \\ c_k^1 \end{pmatrix}$$

où :

$$\alpha(k) = 2\frac{c\Delta t}{\Delta x}\sin\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \underset{(\Delta t,\Delta x)\to(0,0)}{\sim} ck\Delta t.$$

Le polynôme caractŕistique de $S(k)$ est :

$$X^2 + (\alpha(k)^2 - 2)X + 1$$

de discriminant

$$\Delta = (\alpha(k)^2 - 2)^2 - 4 < 0.$$

On pose :

$$\alpha(k)^2 - 2 = 2\cos\theta_k$$

et alors on trouve que les valeurs propres de $S(k)$ sont :

$$\pm e^{\pm i\theta_k}.$$

On remarque aussi que :

$$\alpha(k)^2 = 4\left(\cos\left(\frac{\theta_k}{2}\right)\right)^2$$

ce qui est licite ssi $c\frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$. Les valeurs propres de $S(k)$ s'écrivent : $e^{\pm i\theta_k}$ avec

$$e^{\pm i\theta_k} = 1 - \frac{\alpha(k)^2}{2} \pm \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\alpha(k)^2}{2}\right)^2}.$$

On en déduit :

$$\tan\theta_k = \frac{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\alpha(k)^2}{2}\right)^2}}{1 - \frac{\alpha(k)^2}{2}} \underset{(\Delta t,\Delta x)\to(0,0)}{\sim} \alpha(k) \underset{(\Delta t,\Delta x)\to(0,0)}{\to} 0$$

donc

$$\theta_k \underset{(\Delta t,\Delta x)\to(0,0)}{\sim} \alpha(k).$$

Fnalement, on en déduit (4.16) avec :

$$n\alpha(k) \underset{(\Delta t,\Delta x)\to(0,0)}{\sim} ckn\Delta t = ckt_n.$$

$\square$

Bibliographie

[1] Robert Dautray, Jacques-Louis Lions. Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Tome 3, Masson, Paris, 1985. *Chapitres XIV.3, XV.4 et XX.3.*