

# Chapitre 4

## Equation des Ondes

### 4.1 Introduction et généralités

Une onde naît quand une perturbation locale d'une grandeur physique  $\Psi$  mesurée par la dérivée temporelle  $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$  induit la variation spatiale d'une autre grandeur physique  $\Phi$ , soit :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = a \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

et inversement :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = b \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

pour des constantes  $a, b > 0$ . On en déduit que  $\Psi$  et  $\Phi$  sont solutions de la même équation :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = ab \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = ab \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

### Ondes acoustiques

Dans un  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un ouvert rempli de fluide, la propagation d'ondes acoustiques dépend de la densité  $\rho(x)$  du fluide au point  $x \in \Omega$ , de la vitesse de propagation locale  $c(x)$  des ondes. La pression  $p(x, t)$  et la vitesse du fluide sont liées par les équations :

$$\rho(x) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{\nabla} p, \quad \frac{1}{\rho(x)c^2(x)} \frac{\partial p}{\partial t} = \text{div}(\vec{v})$$

d'où on déduit que  $p$  est solution de :

$$\frac{1}{\rho(x)c^2(x)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \text{div} \left( \frac{\vec{\nabla} p}{\rho(x)} \right) = 0, \quad \Omega, \quad t > 0.$$

En milieu homogène, cette équation devient :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0, \quad \Omega, \quad t > 0.$$

## 4.2 Propriétés de l'équation des ondes 1D

### Le problème modèle

Soit le problème : trouver  $u : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  solution de (4.1)

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mu \nabla u) = f, & \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \mathbb{R}^N \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (4.1)$$

Les coefficients  $\rho(x)$  et  $\mu(x)$  qui caractérisent le milieu de propagation sont supposés mesurables et vérifier :

$$\begin{aligned} 0 < \rho_- \leq \rho(x) \leq \rho_+ < +\infty & \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N \\ 0 < \mu_- \leq \mu(x) \leq \mu_+ < +\infty & \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

Les données sont donc, outre  $\rho$  et  $\mu$ , les données initiales  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$  et le second membre  $f(x, t)$ .

### La formule de d'Alembert

On suppose que  $N = 1$  et que l'onde se propage avec la vitesse constante  $c > 0$ . L'équation (4.1) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \end{cases} \quad (4.2)$$

**Théorème 4.2.1.** *La solution du problème (4.2) est donnée par la formule de d'Alembert :*

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{|y-x| \leq c(t-s)} f(y, s) ds dy \quad (4.3)$$

*Démonstration.* On remarque que l'opérateur des ondes se décompose sous la forme :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \circ \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \iff \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - c \frac{\partial v}{\partial x} = f, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = v, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v_0(x) = u_1(x) + cu_0'(x) \end{cases}$$

Par la méthode des caractéristiques, on trouve successivement :

$$v(x, t) = v_0(x + ct) + \int_0^t f(x + c(t - s), s) ds$$

$$u(x, t) = u_0(x - ct) + \int_0^t v(x - c(t - s), s) ds$$

avec :  $\forall s \in [0, t]$ ,

$$v(x - c(t - s), s) = v_0(x - c(t - 2s)) + \int_0^s f(x - c(t - 2s + \tau), \tau) d\tau.$$

Il en résulte :

$$u(x, t) = u_0(x - ct) + \int_0^t v_0(x - c(t - 2s)) ds + \int_0^t \int_0^s f(x - c(t - 2s + \tau), \tau) d\tau ds.$$

Par définition de  $v_0$  :

$$\begin{aligned} \int_0^t v_0(x - c(t - 2s)) ds &\stackrel{y=x-c(t-2s)}{=} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y) \frac{dy}{2c} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy + \frac{1}{2} (u_0(x + ct) + u_0(x - ct)). \end{aligned}$$

De plus :

$$\int_0^t \int_0^s f(x - c(t - 2s + \tau), \tau) d\tau ds = \frac{1}{2c} \int \int_{\substack{|y-x| \leq t-\tau \\ 0 \leq \tau \leq t}} f(y, \tau) dy d\tau$$

□

Remarque 14. Si  $f = 0$  alors la solution se décompose sous la forme :

$$u(x, t) = \underbrace{\frac{1}{2}u_0(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} u_1(s) ds}_{=: u^+(x+ct)} + \underbrace{\frac{1}{2}u_0(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} u_1(s) ds}_{=: u^-(x-ct)}$$

où  $u^+$ , resp.  $u^-$ , correspond à une onde se propageant dans la direction des  $x > 0$ , resp. des  $x < 0$ .

### Cône de dépendance et propagation à vitesse finie

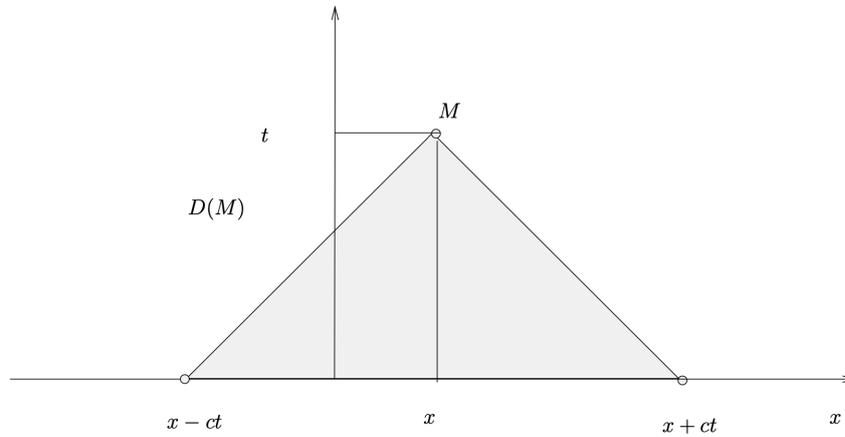


FIGURE 4.1 – Cône de dépendance.

La formule de d'Alembert (4.3) montre que la solution  $u(x, t)$  au point  $M(x, t)$  est entièrement déterminée par les valeurs des données initiales  $u_0$ ,  $u_1$  et du second membre  $f$  aux points du cône de dépendance  $D(M)$  (figure 4.1). Autrement dit, les ondes se propagent à vitesse finie. En effet, si  $u_0$ ,  $u_1$  et  $f$  sont à support compact dans  $K = [a, b]$ , alors, à l'instant  $t > 0$ ,  $u(\cdot, t)$  est à support dans  $K_t := [a - ct, b + ct]$ .

### Régularité de la solution de (4.2)

Si  $f = 0$ , la formule de d'Alembert (4.3) montre que si  $u_0 \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$  et si  $u_1 \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ , alors  $u \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*})$ , i.e. l'équation des ondes conserve la régularité.

Dans le cas général où  $f \neq 0$ , alors, contrairement au cas du Laplacien, on ne gagne pas deux crans de régularité lorsqu'on passe de  $f$  à  $u$ . On na voit qu'on ne gagne qu'un cran de régularité.

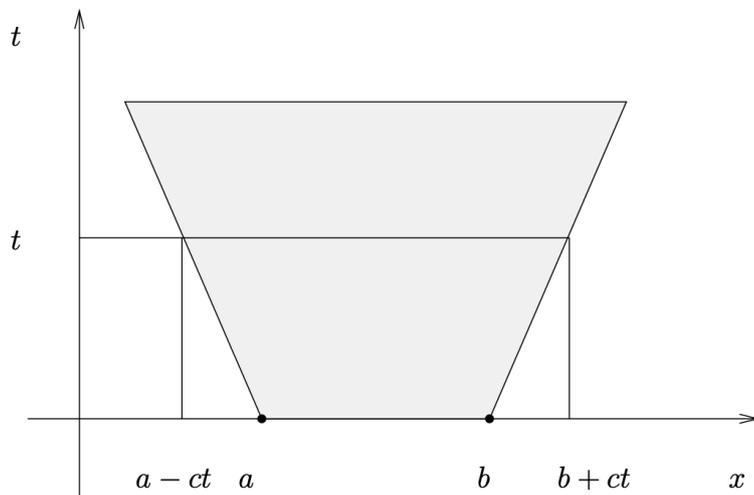


FIGURE 4.2 – Cône de de dépendance.

Pour cela, on suppose que  $u_0 = u_1 = 0$  par linéarité de l'équation des ondes, puisque l'influence des données initiales a été étudiée. Alors, on vérifie directement que la transformée de Fourier de  $u$  définie par :

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-i\xi x} dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0.$$

est solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + (c\xi)^2 \hat{u} = \hat{f}, \\ \hat{u}(0) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0) = 0. \end{cases}$$

d'où on déduit que

$$\hat{u}(\xi, t) = a(t) \cos(c\xi t) + b(t) \sin(c\xi t)$$

avec, d'après la méthode de variation des constantes :

$$a'(t) \cos(c\xi t) + b'(t) \sin(c\xi t) = 0.$$

Il en résulte :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -c\xi a \sin(c\xi t) + c\xi b \cos(c\xi t)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} &= -c\xi a' \sin(c\xi t) + c\xi b' \cos(c\xi t) - (c\xi)^2 \underbrace{(a \cos(c\xi t) + b \sin(c\xi t))}_{=\hat{u}(\xi, t)} \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + (c\xi)^2 \hat{u} = \hat{f} = -c\xi a' \sin(c\xi t) + c\xi b' \cos(c\xi t).\end{aligned}$$

On en déduit que  $a'$  et  $b'$  sont solutions du système :

$$\begin{cases} a' \cos(c\xi t) + b' \sin(c\xi t) = 0, \\ -a' \sin(c\xi t) + b' \cos(c\xi t) = \frac{\hat{f}}{c\xi} \end{cases}$$

i.e. :

$$a'(t) = -\frac{\hat{f}(\xi, t)}{c\xi} \sin(c\xi t), \quad b'(t) = \frac{\hat{f}(\xi, t)}{c\xi} \cos(c\xi t)$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi, t) &= a_0 \cos(c\xi t) + b_0 \sin(c\xi t) + \\ &+ \int_0^t \frac{\hat{f}(\xi, s)}{c\xi} (-\cos(\xi t) \sin(\xi s) + \sin(c\xi t) \cos(c\xi s)) ds = \\ &= \int_0^t \frac{\sin(c\xi(t-s))}{c\xi} \hat{f}(\xi, s) ds, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$c \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(\xi, t) = ic\xi \hat{u}(\xi, t) = i \int_0^t \sin(c\xi(t-s)) \hat{f}(\xi, s) ds, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0.$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) = \int_0^t \cos(c\xi(t-s)) \hat{f}(\xi, s) ds, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0.$$

d'où, par Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned}\left| c \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(\xi, t) \right|^2 &\leq t \int_0^t \|\hat{f}(\xi, s)\|^2 ds \\ \left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) \right|^2 &\leq t \int_0^t \|\hat{f}(\xi, s)\|^2 ds\end{aligned}$$

ce qui donne, par l'égalité de Plancherel :

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x}(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq t \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \|f(x, s)\|^2 dx ds$$

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq t \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \|f(x, s)\|^2 dx ds$$

ce qui montre que

$$f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R})) \Rightarrow u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{R})) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}))$$

## Développement en série de Fourier

Soit à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & 0 < x < 1. \end{cases} \quad (4.4)$$

On cherche une solution  $u$  sous la forme :

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad x \in ]0, 1[, \quad t > 0$$

Après report dans (4.4), on obtient :

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = \lambda \in \mathbb{R},$$

avec la condition sur le bord :

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \underset{T(t) \neq 0}{\Rightarrow} X(0) = X(1) = 0. \quad (4.5)$$

Si  $\lambda = \omega^2 > 0$ , alors :

$$X(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x} \underset{(4.5)}{\equiv} 0$$

ce qui contredit  $u \not\equiv 0$ . Donc nécessairement :  $\lambda = \omega^2 < 0$  et

$$X(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x)$$

avec

$$X(0) = X(1) = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \text{et} \quad \omega \in \pi\mathbb{N}.$$

On en déduit :

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} T_n(t) \underbrace{\sin(n\pi x)}_{=: X_n(x)} =: \sum_{n \geq 1} u_n(x, t) \quad (4.6)$$

On suppose que

$$u_0 \in H_0^1(0,1) \quad \text{et} \quad u_1 \in L^2(0,1) \quad (4.7)$$

sont développables en séries de Fourier sous la forme :

$$u_0(x) = \sum_{n \geq 0} b_n^0 \sin(n\pi x), \quad u_1(x) = \sum_{n \geq 0} b_n^1 \sin(n\pi x),$$

avec, compte tenu de (4.7) :

$$\sum_{n \geq 0} (n\pi)^2 |b_n^0|^2 < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} |b_n^1|^2 < +\infty$$

Alors les fonctions  $T_n$ ,  $n \geq 0$ , dans (4.6) sont, au moins formellement, solutions de

$$\begin{cases} T_n'' + (n\pi)^2 T_n = 0, & t > 0, \\ T_n(0) = b_n^0, \quad T_n'(0) = b_n^1, & n \geq 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

On vérifie immédiatement que (4.8) admet pour unique solution :

$$T_n(t) = b_n^0 \cos(n\pi t) + \frac{b_n^1}{n\pi} \sin(n\pi t), \quad t > 0, \quad n \geq 1. \quad (4.9)$$

**Proposition 4.2.2.** *Soit  $u_0 \in H_0^1(0,1)$  et soit  $u_1 \in L^2(0,1)$ . On suppose que  $u_0$  et  $u_1$  sont développables en séries de Fourier sous la forme :*

$$u_0(x) = \sum_{n \geq 0} b_n^0 \sin(n\pi x), \quad u_1(x) = \sum_{n \geq 0} b_n^1 \sin(n\pi x),$$

Alors, pour tout  $T > 0$ , la série (4.6), (4.9) converge uniformément dans  $\mathcal{C}^0([0, T])$  vers  $u \in \mathcal{C}^0([0, T], H_0^1(0,1)) \cap \mathcal{C}^1([0, T], L^2(0,1))$  solution de :

$$u \in \mathcal{C}^0([0, T], H_0^1(0,1)),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}^0([0, T], L^2(0,1)),$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} v dx + \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial x} v' dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(0,1), \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T)$$

$$u(0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1.$$

*Démonstration.* Soit  $T > 0$ . On a :  $\forall n \geq 1, \forall x \in ]0, 1[, \forall t \in [0, T]$ ,

$$|u_n(x, t)| \leq |T_n(t)| \leq |b_n^0| + \frac{|b_n^1|}{n\pi}$$

d'où :  $\forall n \geq 1, \forall t > 0$ ,

$$\int_0^1 |u(t)|^2 dx = \sum_{n \geq 1} |T_n(t)|^2 \leq 2 \sum_{n \geq 1} \left( |b_n^0|^2 + \frac{|b_n^1|^2}{(n\pi)^2} \right) < +\infty$$

La série majorante étant convergente, on en déduit que  $t \mapsto u(t)$  est somme d'une série de fonctions continues uniformément convergente sur  $[0, T]$ , donc que  $u \in \mathcal{C}^0([0, T], L^2(0, 1))$ . De même :

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}(x, t) = n\pi T_n(t) \cos(n\pi x), \quad \forall x \in [0, 1], \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall n \geq 1$$

donc :  $\forall n \geq 1, \forall t > 0$ ,

$$\int_0^1 \left| \sum_{n \geq 1} \frac{\partial u_n}{\partial x}(t) \right|^2 dx = \sum_{n \geq 1} |T_n(t)|^2 \leq 2 \sum_{n \geq 1} ((n\pi)^2 |b_n^0|^2 + |b_n^1|^2) < +\infty$$

où la série majorante est convergente. On en déduit que la série des dérivées  $\sum \frac{\partial u_n}{\partial x}$  est uniformément convergente sur  $[0, T]$  et que  $u \in \mathcal{C}^0([0, T], H_0^1(0, 1))$  avec

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n \geq 1} n\pi T_n(t) \cos(n\pi x), \quad \forall t \in [0, T], \quad \text{p.p. en } x \in ]0, 1[.$$

D'autre part :  $\forall n \geq 1, \forall x \in ]0, 1[, \forall t \in [0, T]$ ,

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = T_n'(t) \sin(n\pi x)$$

avec

$$\begin{aligned} |T_n'(t)|^2 &\leq 2((n\pi)^2 |b_n^0|^2 + |b_n^1|^2) \\ \Rightarrow \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx &= \sum_{n \geq 1} |T_n'(t)|^2 \leq 2 \sum_{n \geq 1} ((n\pi)^2 |b_n^0|^2 + |b_n^1|^2) < +\infty \end{aligned}$$

La série majorante étant convergente, on en déduit que la série des dérivées  $\frac{\partial u_n}{\partial t}$  est uniformément convergente sur  $[0, T]$  de somme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n \geq 1} \frac{\partial u_n}{\partial t} = \sum_{n \geq 1} T_n'(t) \sin(n\pi x) \quad \forall t \in [0, T], \quad \text{p.p. en } x \in ]0, 1[$$

et donc  $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}^0([0, T], L^2(0, 1))$ .

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(0, 1)$  et soit  $N \geq 1$ . Par construction :

$$\sum_{n=1}^N \int_0^1 \frac{\partial^2 u_n(t)}{\partial t^2} \varphi dx + \sum_{n=1}^N \int_0^1 \frac{\partial u_n(t)}{\partial x} \varphi' dx = 0, \quad \forall t > 0.$$

Soit  $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$ . Il en résulte :

$$-\sum_{n=1}^N \int_0^T \phi'(t) \int_0^1 \frac{\partial u_n(t)}{\partial t} \varphi dx dt + \sum_{n=1}^N \int_0^T \phi(t) \int_0^1 \frac{\partial u_n(t)}{\partial x} \varphi' dx dt = 0.$$

avec, par convergence uniforme de la série  $\sum u_n$  vers  $u$  dans  $\mathcal{C}^0([0, T], H_0^1(\Omega))$  :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \int_0^T \phi(t) \int_0^1 \frac{\partial u_n(t)}{\partial x} \varphi' dx dt = \int_0^T \phi(t) \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial x} \varphi' dx dt,$$

et par convergence uniforme de la série  $\sum \frac{\partial u_n}{\partial t}$  vers  $\frac{\partial u}{\partial t}$  dans  $\mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega))$  :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \int_0^T \phi'(t) \int_0^1 \frac{\partial u_n(t)}{\partial t} \varphi dx dt = \int_0^T \phi'(t) \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} \varphi dx dt,$$

i.e. :

$$-\int_0^T \phi'(t) \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} \varphi dx dt + \int_0^T \phi(t) \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial x} \varphi' dx dt = 0.$$

i.e. encore, par densité de  $\mathcal{D}(0, 1)$  dans  $H_0^1(0, 1)$  :  $\forall v \in H_0^1(0, 1), \forall \phi \in \mathcal{D}(0, T)$ ,

$$-\int_0^T \phi'(t) \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} v dx dt + \int_0^T \phi(t) \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial x} v' dx dt = 0.$$

Finalement :

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} v dx + \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial x} v' dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(0, 1), \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T).$$

□

**Proposition 4.2.3.** Soit  $u_0 \in H_0^1(0, 1)$  t.q.  $u_0' \in H^1(0, 1)$  et soit  $u_1 \in H^1(0, 1)$ . On suppose que  $u_0$  et  $u_1$  sont développables en séries de Fourier sous la forme :

$$u_0(x) = \sum_{n \geq 0} b_n^0 \sin(n\pi x), \quad u_1(x) = \sum_{n \geq 0} b_n^1 \sin(n\pi x),$$

Alors, pour tout  $T > 0$ , la série (4.6), (4.9) converge uniformément dans  $\mathcal{C}^0([0, T])$  vers  $u \in \mathcal{C}^0([0, T], H_0^1(0, 1)) \cap \mathcal{C}^2([0, T], L^2(0, 1))$  solution de :

$$\begin{aligned} u &\in \mathcal{C}^0([0, T], H_0^1(0, 1)), \\ \frac{\partial u}{\partial t} &\in \mathcal{C}^0([0, T], H^1(0, 1)), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &\in \mathcal{C}^0([0, T], L^2(0, 1)), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{dans } L^2((0, 1) \times (0, T)) \\ u(0) &= u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Par régularité de  $u_0$  et  $u_1$  :

$$\sum_{n \geq 1} ((n\pi)^4 |b_n^0|^2 + (n\pi)^2 |b_n^1|^2) < +\infty.$$

Par le même raisonnement que précédemment, on montre que la série  $\sum \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}$  converge uniformément dans  $\mathcal{C}^0([0, T], L^2(0, 1))$  vers  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ .  $\square$

**Proposition 4.2.4.** *Sous les hypothèses de la Proposition 4.2.2, l'énergie se conserve au sens suivant :*

$$\frac{1}{2} \left| \frac{\partial u(t)}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \frac{\partial u(t)}{\partial x} \right|^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 |u'_0|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 |u_1|^2 dx, \quad \forall t \in [0, T].$$

*Démonstration.* Soit  $t > 0$  et soit  $n \geq 1$ . par définition de  $T_n$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t (T_n''(s)T_n'(s) + (n\pi)^2 T_n(s)T_n'(s)) ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \left( \frac{d}{ds} ((T_n'(s))^2) + (n\pi)^2 (|T_n(s)|^2)' \right) ds \\ &= \frac{1}{2} (|T_n'(t)|^2 + (n\pi)^2 |T_n(t)|^2) - \frac{1}{2} ((b_n^1)^2 + (n\pi)^2 |b_n^0|^2). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (|T_n'(t)|^2 + (n\pi)^2 |T_n(t)|^2) - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} ((b_n^1)^2 + (n\pi)^2 |b_n^0|^2) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \frac{\partial u(t)}{\partial t} \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \frac{\partial u(t)}{\partial x} \right|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 |u_1|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 |u'_0|^2 dx \end{aligned}$$

$\square$

### 4.3 Approximation numérique

On considère les subdivisions :

$$x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$$

$$t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots$$

supposées régulières de pas  $\Delta x > 0$  et  $\Delta t > 0$  resp.

Soit  $(u_i^n)_{0 \leq i \leq N+1, n \geq 0}$  la suite solution du schéma :

$$\begin{cases} u_i^0 = u_0(x_i), & i = 0, \dots, N+1, \\ v_i^0 = u_1(x_i) - cu'_0(x_i), & i = 1, \dots, N, \\ u_i^1 = \left(1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_i^0 + c \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i-1}^0 + \Delta t v_i^0, & i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n-1} - 2u_i^n + u_i^{n+1}}{\Delta t^2} - \frac{c^2}{(\Delta x)^2} (u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n) = f(x_i), & i = 1 \dots, N, \quad n \geq 1 \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, & n \geq 1, \end{cases} \quad (4.11)$$

*Remarque 15.* L'initialisation (4.10) est le premier pas du schéma :

$$\begin{cases} \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} - c \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{\Delta x} = 0, \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = v_i^n, & i = 1, \dots, N, \quad n \geq 0, \\ v_i^0 = u_1(x_i) + cu'_0(x_i), \quad u_i^0 = u_0(x_i), & i = 1, \dots, N \end{cases}$$

qui découle immédiatement de la réécriture de (4.2) sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - c \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = v, \quad 0 < x < 1 \quad t > 0. \end{cases}$$

*Remarque 16.* On veut avoir :  $u_i^n \sim u(x_i, t_n)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $n \geq 0$ .

**Proposition 4.3.1.** *Le schéma (4.10)–(4.11) est consistant d'ordre 2 en temps et en espace.*

*Démonstration.* Soit  $n \geq 1$ . On définit l'erreur de consistance  $\varepsilon_i^n$  au point  $(x_i, t_n)$  en posant :  $\varepsilon_i^n = \varepsilon(x_i, t_n)$  avec :  $\forall x \in [0, 1], \forall t > 0$ .

$$\varepsilon(x, t) = \frac{u(x, t - \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t + \Delta t)}{\Delta t^2} + \\ - \frac{c^2}{(\Delta x)^2} (u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x + \Delta x, t)) - f(x).$$

La formule de Taylor donne directement :  $\forall i \in [[1, N]], \forall n \geq 0$ ,

$$|\varepsilon_i^n| \leq C \left( \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right\|_{\infty} (\Delta t)^2 + \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\|_{\infty} (\Delta x)^2 \right), \quad \forall i \in [[1, N]], \quad \forall n \geq 0. \quad (4.12)$$

Pour  $n = 0$ , on définit l'erreur de consistance au point  $(x_i, t_0)$ , i.e. associée à l'étape d'initialisation (4.10) en posant :  $\varepsilon_i^0 = \varepsilon_0(x_i)$  où :  $\forall x \in [0, 1]$ ,

$$\varepsilon_0(x) = u(x, \Delta t) - \left( 1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) u_0(x) - c \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0(x - \Delta x) - \Delta t (u_1(x) + cu_0'(x)). \quad (4.13)$$

On a :

$$\left( 1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) u_0(x) + c \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0(x - \Delta x) = u_0(x) + c \frac{\Delta t}{\Delta x} (-\Delta x u_0'(x) + O((\Delta x)^2)) \\ = u_0(x) - c \Delta t u_0'(x) + \underbrace{\Delta t O(\Delta x)}_{=O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)},$$

donc

$$\varepsilon_0(x) = u(x, \Delta t) - u_0(x) + c \Delta t u_0'(x) - c \Delta t u_0'(x) - \Delta t u_1(x) + O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2) \\ = u(x, \Delta t) - u(x, 0) - \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) + O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2) = O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$$

Dans tous les cas :

$$\varepsilon_i^n = O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2), \quad i = 1, \dots, N, \quad n \geq 0.$$

□

**Proposition 4.3.2.** *On suppose que*

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1.$$

*Alors, le schéma (4.10)–(4.11) est convergent d'ordre 2 en temps et en espace.*

*Démonstration.* Soit  $(\mu_i^n)_{n \geq 0}$  une suite de réels et soit  $z_i^n$ ,  $n \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , définie par :

$$\begin{cases} \frac{z_i^{n-1} - 2z_i^n + z_i^{n+1}}{\Delta t^2} - \left(\frac{c}{\Delta x}\right)^2 (z_{i-1}^n - 2z_i^n + z_{i+1}^n) = \mu_i^n, & i = 1 \dots, N, \quad n \geq 1 \\ z_0^n = z_{N+1}^n = 0, & n \geq 0, \\ z^0 \in \mathbb{R}^N, \quad z^1 \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

ce qu'on réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} z^{n+1} - z^n = z^n - z^{n-1} - \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N z^n + (\Delta t)^2 \mu^n, & n \geq 0 \\ z_0^n = z_{N+1}^n = 0, & n \geq 0, \\ z^0 \in \mathbb{R}^N, \quad z^1 \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Soit  $n \geq 0$ . On en déduit :

$$(z^{n+1} - z^n) - (z^n - z^{n-1}) + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N z^n = (\Delta t)^2 \mu^n. \quad (4.14)$$

On pose :

$$v^k = z^{k+1} - z^k, \quad \forall k \geq 0.$$

En multipliant les deux membres de (4.14) par  $z^{n+1} - z^{n-1} = v^n + v^{n-1}$ , on obtient :

$$\|v^n\|_2^2 - \|v^{n-1}\|_2^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N z^n \cdot (z^{n+1} - z^{n-1}) = (\Delta t)^2 \mu^n \cdot (z^{n+1} - z^{n-1})$$

i.e., compte tenu de la symétrie de  $A_N$  :

$$\begin{aligned} E^n &:= \|v^n\|_2^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N z^n \cdot z^{n+1} = \|v^{n-1}\|_2^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N z^{n-1} \cdot z^n + (\Delta t)^2 \mu^n \cdot (v^n + v^{n-1}) \\ &= \underbrace{\|v^0\|_2^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N z^0 \cdot z^1}_{=E^0} + (\Delta t)^2 \sum_{k=1}^n \mu^k \cdot (v^k + v^{k-1}) \\ &= E^0 + (\Delta t)^2 \mu^1 \cdot v^0 + (\Delta t)^2 \sum_{k=1}^n (\mu^{k+1} + \mu^k) \cdot v^k + (\Delta t)^2 \mu^{n+1} \cdot v^n. \end{aligned}$$

On remarque que :

$$A_N z^n \cdot z^{n+1} = A_N z^n \cdot v^n + A_N z^n \cdot z^n$$

avec :  $\forall \alpha > 0$  :

$$|A_N z^n \cdot v^n| \leq \frac{\alpha}{2} \|A_N z^n\|_2^2 + \frac{1}{2\alpha} \|v^n\|_2^2.$$

Soit  $\alpha > 0$ . Il en résulte :

$$E^n \geq \left(1 - \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right) \|v^n\|_2^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (1 - 2\alpha) A_N z^n \cdot z^n,$$

et on choisit  $\alpha \in ]0, \frac{1}{2}[$ . Alors :

$$1 > \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 > \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \Rightarrow 0 < \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 < 1.$$

On remarque que

$$\min_{0 < \alpha < \frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2, 1 - 2\alpha\right)$$

atteint son maximum en  $\alpha > 0$  t.q.

$$1 - \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 = 1 - 2\alpha$$

i.e. en  $\alpha = \alpha_0$  solution. de :

$$\frac{1}{2\alpha} \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 = 2\alpha \iff \alpha_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right).$$

On en déduit :

$$E^n \geq \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) (\|v^n\|_2^2 + A_N z^n \cdot z^n) \quad (4.15)$$

En particulier, si  $E^0 = 0$ , alors :

$$\|v^n\|_2^2 \leq \frac{\sqrt{2}(\Delta t)^2}{\left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \|\mu^k\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^n \|v^k\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall n \geq 0. \quad (4.16)$$

$$\Rightarrow \left( \sum_{k=0}^n \|v^k\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{2}t_n \Delta t}{\left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)} \left( \sum_{k=0}^{n+1} \|\mu^k\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On définit l'erreur de convergence au point  $(x_i, t_n)$ ,  $1 \leq i \leq N$ ,  $n \geq 0$ , par :

$$e_i^n = u(x_i, t_n) - u_i^n, \quad i = 1, \dots, N, \quad n \geq 0.$$

Alors, pour le choix  $\mu_i^n = \varepsilon_i^n$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $n \geq 1$ ,  $z^0 = z^1 = 0$ , on obtient  $z^n = e^n$ ,  $n \geq 2$ . et (4.16) s'applique :  $\forall n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \|z^{n+1}\|_2 &\leq \underbrace{\|z^1\|_2}_{=0} + \sum_{k=0}^n \underbrace{\|z^{k+1} - z^k\|_2}_{=v^k} \leq \sqrt{n} \left( \sum_{k=0}^n \|v^k\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{(4.12)}{\leq} \frac{\sqrt{2}t_n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\Delta t}}{\left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)} \left( \sum_{k=1}^{n+1} \|\mu^k\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En particulier :  $\forall n \geq 2$ ,

$$\sup_{n\Delta t \leq T} \|e^n\|_2 \leq C \left( 1 + \frac{\sqrt{2}T^2}{\left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)} \right) ((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$$

□

*Remarque 17.* Le choix  $z^1 := 0$  est justifié par l'étape d'initialisation (4.10) qui conduit à la formule :

$$u_i^1 = \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) u_0(x_i) + \frac{c\Delta t}{\Delta x} u_0(x_{i-1}) + \Delta t (u_1(x_i) - cu_0'(x_i))$$

dont le membre de droite est combinaison linéaire de termes exacts.

**Proposition 4.3.3.** *Si  $f = 0$  dans le schéma (4.11), alors l'énergie est conservée. Plus précisément, si on définit l'énergie discrète au temps  $t_n$ ,  $n \geq 0$ , par :*

$$E^n := \|u^n - u^{n-1}\|_2^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N u^n \cdot u^{n-1},$$

alors :  $E^{n+1} = E^n$ ,  $\forall n \geq 0$ .

*Démonstration.* Soit  $n \geq 0$ . Si  $f = 0$  alors :

$$(u^{n+1} - u^n) - (u^n - u^{n-1}) + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N u^n = 0.$$

Après multiplication des deux membres de cette égalité par  $u^{n+1} - u^{n-1} = (u^{n+1} - u^n) + (u^n - u^{n-1})$  on obtient :

$$\|u^{n+1} - u^n\|^2 - \|u^n - u^{n-1}\|^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N u^n \cdot (u^{n+1} - u^{n-1}) = 0.$$

On conclut grâce à la symétrie de  $A_N$ .  $\square$

*Remarque 18.* Avec les notations de la Proposition 4.3.3, si on pose  $v^n = u^{n+1} - u^n$ , alors

$$E^n = \|v^n\|_2^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N v^n \cdot u^{n-1} + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N u^{n-1} \cdot u^{n-1}$$

et le même raisonnement que pour (4.15) conduit à :

$$E^n \geq \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) (\|v^n\|_2^2 + A_N u^n \cdot u^n).$$

**Proposition 4.3.4.** Soit  $N > 0$  et soit  $\Delta x = \frac{2\pi}{(N+1)}$ . Le schéma (4.10)–(4.11) est stable au sens de Von Neumann ssi  $\frac{c\Delta t}{\Delta x} < 1$ . Si de plus

$$u_j^0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^0 e^{ikj\Delta x} \quad \text{et} \quad u_j^1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^1 e^{ijk\Delta x}$$

alors :

$$u_j^n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^n e^{ikj\Delta x} \tag{4.17}$$

avec

$$c_k^n = a_k e^{in\theta_k} + b_k e^{-in\theta_k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0 \tag{4.18}$$

où les constantes  $a_k, b_k, \theta_k$  ne dépendent que de  $\Delta t, \Delta x$ , et  $k \in \mathbb{Z}$ , et où

$$\theta_k \underset{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)}{\sim} ckt_n, \quad \forall n \geq 0.$$

*Démonstration.* On vérifie directement que

$$\begin{pmatrix} c_k^n \\ c_k^{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 - \alpha(k)^2 \end{pmatrix}}_{=: S(k)} \begin{pmatrix} c_k^{n-1} \\ c_k^n \end{pmatrix} = (S(k))^n \begin{pmatrix} c_k^0 \\ c_k^1 \end{pmatrix}$$

où :

$$\alpha(k) = 2 \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \underset{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)}{\sim} ck\Delta t.$$

Le polynôme caractéristique de  $S(k)$  est :

$$X^2 + (\alpha(k)^2 - 2)X + 1$$

de discriminant

$$\Delta = (\alpha(k)^2 - 2)^2 - 4 < 0.$$

On pose :

$$\alpha(k)^2 - 2 = 2 \cos \theta_k$$

et alors on trouve que les valeurs propres de  $S(k)$  sont :

$$\pm e^{\pm i\theta_k}.$$

On remarque aussi que :

$$\alpha(k)^2 = 4 \left( \cos\left(\frac{\theta_k}{2}\right) \right)^2$$

ce qui est licite ssi  $c \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$ . Les valeurs propres de  $S(k)$  s'écrivent :  $e^{\pm i\theta_k}$  avec

$$e^{\pm i\theta_k} = 1 - \frac{\alpha(k)^2}{2} \pm \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\alpha(k)^2}{2}\right)^2}.$$

On en déduit :

$$\tan \theta_k = \frac{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\alpha(k)^2}{2}\right)^2}}{1 - \frac{\alpha(k)^2}{2}} \underset{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)}{\sim} \alpha(k) \underset{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)}{\rightarrow} 0$$

donc

$$\theta_k \underset{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)}{\sim} \alpha(k).$$

Finalement, on en déduit (4.18) avec :

$$n\alpha(k) \underset{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)}{\sim} ckn\Delta t = ckt_n.$$

i.e. :  $\forall n \geq 1, \forall k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} |c_k^n e^{ijk\Delta x} - a_k e^{ik(j\Delta x + ct_n)} - b_k e^{ik(j\Delta x - ct_n)}| &\leq |a_k| |e^{in\theta_k} - e^{ikct_n}| + |b_k| |e^{-in\theta_k} - e^{-ikct_n}| \\ &= 2(|a_k| + |b_k|) \left| \sin\left(\frac{n\theta_k - ckt_n}{2}\right) \right| \underset{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)}{\rightarrow} 0. \end{aligned}$$

□

**Corollaire 4.3.5.** *Sous les hypothèses de la Proposition 4.3.4, si en outre :*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k^0|^2 < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k^1|^2 < +\infty$$

alors la série de fonctions (4.17)–(4.18) converge dans  $\mathcal{C}^0([0, T], L^2(0, 1))$  vers la somme de la série :

$$\frac{1}{2i} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(c_k^0 - c_k^1)}{\sin(\theta_k)} (e^{i\theta_k} e^{ik(x+ct)} - e^{-i\theta_k} e^{ik(x-ct)})$$

solution de (4.2).

*Démonstration.* Le calcul montre qu'une base de vecteurs propres de  $S(k)$  est formée des vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta_k} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\theta_k} \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$a_k = \frac{e^{i\theta_k}}{2i \sin \theta_k} (c_k^0 - c_k^1), \quad b_k = -\frac{e^{-i\theta_k}}{2i \sin \theta_k} (c_k^0 - c_k^1).$$

□

### Schéma centré

Soit  $\theta \in [0, 1]$  et soit  $(u_i^n)_{0 \leq i \leq N+1, n \geq 0}$  la suite solution du schéma centré :

$$\begin{cases} \frac{u^{n-1} - 2u^n + u^{n+1}}{\Delta t^2} + \frac{c^2}{(\Delta x)^2} A_N \left( \frac{\theta}{2} (u^{n+1} + u^{n-1}) + (1 - \theta) u^n \right) = f^N, \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad i = 1 \cdots, N, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (4.19)$$

initialisé par (4.10), où  $f^N \in \mathbb{R}^N$  est le vecteur de composantes  $f_i^N = f(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,

**Proposition 4.3.6.** *Le schéma centré (4.10), (4.19) est consistant d'ordre 2 en temps et en espace, pour tout  $\theta \in [0, 1]$ .*

*Démonstration.* On définit l'erreur de consistance au point  $(x_i, t_n)$  par :  $\varepsilon_i^n = \varepsilon_0(x_i)$  si  $n = 0$  avec  $\varepsilon_0$  définie par (4.13), et par  $\varepsilon_i^n = \varepsilon(x_i, t_n)$  si  $n \geq 1$  avec :  $\forall x \in [0, 1], \forall t > 0$ ,

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{(\Delta t^2)} (u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t)) +$$

$$+ \frac{c^2}{(\Delta x)^2} A_N \left( \frac{\theta}{2} (u(x, t + \Delta t) + u(x, t - \Delta t)) + (1 - \theta) u(x, t) \right) - f(x)$$

La formule de Taylor donne :

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f(x) - \frac{\theta}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t + \Delta t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t - \Delta t) \right) - (1 - \theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + O((\Delta x)^2) \\ &= \theta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f(x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right) + O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^2) = O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^2). \end{aligned}$$

On conclut comme dans la Proposition 4.3.1.  $\square$

**Proposition 4.3.7.** *Soit  $\theta \in [0, 1[$ . On suppose que*

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{\sqrt{1 - \theta}}. \quad (4.20)$$

Alors, le schéma centré (4.10), (4.19) est convergent d'ordre 2 en temps et en espace, pour tout  $\theta \in [0, 1]$ .

*Démonstration.* Soit  $(\mu_i^n)_{n \geq 0}$  une suite de réels et soit  $z_i^n$ ,  $n \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , définie par :

$$\begin{cases} \frac{z^{n-1} - 2z^n + z^{n+1}}{\Delta t^2} + \frac{c^2}{(\Delta x)^2} A_N \left( \frac{\theta}{2} (z^{n+1} + z^{n-1}) + (1 - \theta) z^n \right) = \mu^n, \\ z_0^n = z_{N+1}^n = 0, \quad n \geq 0, \\ z^0 \in \mathbb{R}^N, \quad z^1 \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Soit  $n \geq 1$ . On pose :

$$v^n = z^{n+1} - z^n.$$

On a :

$$E^n := \|v^n\|_2^2 + \frac{\theta}{2} \left( \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 A_N v^n \cdot v^n + (1 - \theta) \left( \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 A_N z^n \cdot z^{n+1} = E^{n-1} + \mu^n \cdot (v^n + v^{n-1})$$

et

$$E^n \geq \left( 1 - \sqrt{1 - \theta} \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right) (\|v^n\|_2^2 + A_N z^n \cdot z^n)$$

On conclut comme dans la Proposition 4.3.2 avec  $\frac{c\Delta t}{\Delta x}$  par  $\sqrt{1 - \theta} \frac{c\Delta t}{\Delta x}$   $\square$

### Schéma implicite non centré

Soit  $(u_i^n)_{0 \leq i \leq N+1, n \geq 0}$  la suite solution du schéma implicite non centré :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n-1} - 2u_i^n + u_i^{n+1}}{\Delta t^2} + \frac{c^2}{(\Delta x)^2} (A_N u^{n+1})_i = f(x_i), \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad i = 1 \dots, N, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (4.21)$$

initialisé par (4.10).

**Proposition 4.3.8.** *Alors Le schéma implicite non centré (4.10), (4.21) est consistant d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.*

*Démonstration.* On définit l'erreur de consistance au point  $(x_i t_n)$  par :

$$\varepsilon_i^n = \begin{cases} \varepsilon(x_i, t_n), & i = 1, \dots, N \quad \text{si } n \geq 1, \\ \varepsilon^0(x_i), & i = 1, \dots, N \quad \text{si } n = 0, \end{cases}$$

où  $\varepsilon^0$ , est définie par (4.13), et où :  $\forall x \in [0, 1], \forall t > 0$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, t) &= \frac{1}{(\Delta t)^2} (u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t)) + \\ &+ \left( \frac{c}{\Delta x} \right)^2 (-u(x - \Delta x, t + \Delta t) + 2u(x, t + \Delta t) - u(x + \Delta x, t + \Delta t)) - f(x). \end{aligned}$$

La formule de Taylor donne :

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + O((\Delta t)^2) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t + \Delta t) + O((\Delta x)^2) - f(x) \\ &= O(\Delta t) + O(\Delta x)^2. \end{aligned}$$

□

**Proposition 4.3.9.** *Le schéma implicite non centré (4.10), (4.21) est convergent d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.*

*Démonstration.* Soit  $(\mu_i^n)_{n \geq 0}$  une suite de réels et soit  $z_i^n$ ,  $n \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , définie par :

$$\begin{cases} \frac{1}{(\Delta x)^2} (z^{n-1} - 2z^n + z^{n+1}) + \frac{c^2}{(\Delta x)^2} A_N z^{n+1} = \mu^n, \\ z_0^n = z_{N+1}^n = 0, \quad n \geq 0, \\ z^0 \in \mathbb{R}^N, \quad z^1 \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{z_i^{n-1} - 2z_i^n + z_i^{n+1}}{\Delta t^2} + \frac{c^2}{(\Delta x)^2} (A_N z^{n+1})_i = \mu_i^n, \\ z_0^n = z_{N+1}^n = 0, \quad n \geq 0, \\ z^0 \in \mathbb{R}^N, \quad z^1 \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

On pose

$$v^n = z^{n+1} - z^n,$$

Alors :

$$\begin{aligned} E^n &:= \|v^n\|_2^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N z^{n+1} \cdot z^{n+1} = E^{n-1} - \|v^n - v^{n-1}\|_2^2 - \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A_N v^n \cdot v^n + 2\mu^n \cdot v^n \\ &\leq E^{n-1} + 2\mu^n \cdot v^n \leq E^0 + 2 \sum_{k=0}^n \mu^k \cdot v^k. \end{aligned}$$

On en déduit : si  $E^0 = 0$ ,

$$\begin{aligned} \|v^n\|_2^2 &\leq E^0 + 2 \left( \sum_{k=0}^n \|\mu^k\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=0}^n \|v^k\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow \left( \sum_{k=0}^n \|v^k\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \left( \sum_{k=0}^n \|\mu^k\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

On conclut comme dans la Proposition 4.3.1 compte tenu de la Proposition 4.3.8.  $\square$

## Equation des ondes à deux dimensions d'espace

On considère le problème : trouver  $u : ]0, 1[ \times ]0, 1[ \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x), \quad (x, y) \in ]0, 1[^2, \quad t > 0, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = u_1(x, y), \quad (x, y) \in ]0, 1[^2, \\ u(x, y, t) = 0 \quad \text{si } x, y \in \{0, 1\} \end{cases}$$

L'approximation numérique es basée sur les subdivisions en espace,

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_I < x_{I+1} = 1, \quad 0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_J < y_{J+1} = 1$$

resp. en temps :

$$0 = t_0 < \cdots < t_n < \cdots ,$$

supposées régulières i.e. définies par :

$$x_i = i\Delta x, \quad y_j = j\Delta y, \quad t_n = n\Delta t, \quad i = 0, \dots, I+1, \quad j = 0, \dots, J+1, \quad n \geq 0.$$

Soit  $\theta \in [0, 1]$ . Avec ces notations on définit la suite  $(u_{i,j}^n)_{n \geq 0}$  par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u^n - 2u^{n-1} + u^{n-2}}{(\Delta t)^2} + c^2 \left( \frac{1}{(\Delta x)^2} A_I + \frac{1}{(\Delta y)^2} A_J \right) \left( \frac{\theta}{2}(u^{n+1} + u^{n-1}) + (1-\theta)u^n \right) = f^{I,J}, \\ u_{0,j}^n = u_{I+1,j}^n = u_{i,0}^n = u_{i,J+1}^n = 0, \\ u_{i,j}^0 = u_0(x_i, y_j), \quad u^1 \in \mathbb{R}^{(I+1)(J+1)} \end{array} \right. \quad (4.22)$$

où  $f^{I,J} \in \mathbb{R}^{IJ}$  est définie par :

$$f_{i,j}^{I,J} = f^{I,J}(x_i, y_j), \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J,$$

et où les opérateurs  $A_I, A_J$  sont définis par :

$$(A_I U)_{i,j} = -U_{i+1,j} + 2U_{i,j} - U_{i-1,j}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J.$$

$$(A_J U)_{i,j} = -U_{i,j+1} + 2U_{i,j} - U_{i,j-1}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J.$$

**Proposition 4.3.10.** *On suppose que  $0 \leq \theta < 1$  et que*

$$(c\Delta t)^2 \left( \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) < \frac{1}{1-\theta}.$$

*Si l'étape d'initialisation donnant  $u^1$  est consistante d'ordre 2 en temps et en espace, alors le schéma (4.22) est convergent d'ordre 2 en temps et en espace.*



# Bibliographie

- [1] Robert Dautray, Jacques-Louis Lions. Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Tome 3, Masson, Paris, 1985, et Volumes 7 à 9, Masson, Paris, 1988. *Chapitres XIV.3, XV.4 et XX.3.*