Préparation à l'Agrégation
Année 2023–2024

Corrigé du Problème d'Analyse 2009

I. Formule de Jensen

1. (a) On a:

$$X^{2n}-1=\Pi_{k=0}^{2n-1}(X-e^{\frac{ik\pi}{n}})=(X^2-1)\Pi_{k=1}^{n-1}\underbrace{(X-e^{\frac{ik\pi}{n}})(X-e^{-\frac{ik\pi}{n}})}_{=X^2-2X\cos(\frac{k\pi}{n})+1}=$$

$$=(X^2-1)\Pi_{k=1}^{n-1}\underbrace{\left(X^2-2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)}_{=:P_k(X)}$$

où les polynômes $X-e^{\frac{ik\pi}{n}}$, $k\in[[0,2n-1]]$, resp. $X^2-2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1$, $k\in[[0,n-1]]$, sont irréductibles dans $\mathbb{C}$, resp. dans $\mathbb{R}$.

Soit $r>1$. On remarque que r n'est pas racine de $X^{2n}-1$, et donc $P_k(r)\neq 0$, $\forall k\in[[0,n-1]]$. De plus:

$$P_k(r)\geq 1-2r+r^2=(r-1)^2>0,$$

donc $\ln P_k(r)$ est bien défini dans $\mathbb{R}$. On a:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln P_k(r)=\ln\Pi_{k=1}^{n-1}P_k(r)=\ln\frac{(r^{2n}-1)}{(r^2-1)}.$$

(b) Soit $r>1$. On a: $\forall t\in[0,\pi]$

$$1-2r\cos(t)+r^2\geq 1-2r+r^2=(r-1)^2>0$$

donc $t\mapsto\ln(1-2r\cos(t)+r^2)$ est bien définie et continue sur $[0,\pi]$. Du Théorème d'approximation des sommes de Darboux appliqué à la subdivision $x_k=\frac{k\pi}{n}$, $k\in[[1,n-1]]$, de $[0,1]$, on déduit:

$$\int_0^\pi\ln(1-2r\cos(t)+r^2)dt=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1-2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+r^2\right)=$$

$$\underset{(a)}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} \ln \frac{(r^{2n}-1)}{(r^2-1)}$$

avec:

$$\frac{1}{n}\ln(r^{2n}-1) \underset{r>1}{=} 2\ln(r) + \frac{1}{n}\ln\left(1-r^{-2n}\right) =$$

$$\frac{1}{n}\ln\left(1-r^{-2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{nr^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

i.e.:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln(r^{2n}-1) = 2\ln(r).$$

De plus:

$$\frac{1}{n}\ln \underbrace{(r^2-1)}_{>0} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Finalement:

$$\int_0^\pi \ln(1-2r\cos(t)+r^2)dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} \ln \frac{(r^{2n}-1)}{(r^2-1)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\ln(r^{2n}-1) - \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\ln(r^2-1) = 2\pi\ln(r) \qquad (1)$$

De plus: $\forall t \in [0, \pi]$,

$$1-2r\cos(t)+r^2 = (1-re^{it})(1-re^{-it}) = |1-re^{it}|^2 \Rightarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln|1-re^{it}|dt = 2\int_0^\pi \ln|1-re^{it}|dt =$$

$$= \int_0^\pi \ln(|1-re^{it}|^2)dt = \int_0^\pi \ln(1-2r\cos(t)+r^2)dt \underset{(1)}{=} 2\pi\ln(r).$$

(c) L'intégrale est singulière au voisinage de $t = 0$. Le calcul donne:

$$|1-e^{it}| = 2\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Il en résulte:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln|1-e^{it}|dt = 2\pi\ln(2) + \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt = 2\pi\ln(2) + 2\int_0^\pi \underbrace{\ln\sin\left(\frac{t}{2}\right)}_{<0} dt.$$

Soit $\alpha > 0$. On a:

$$\lim_{t\to 0^+} t^\alpha \ln\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(t^\alpha \ln\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t}\right) + \lim_{t\to 0^+} t^\alpha \ln t = 0.$$

Ceci étant vrai en particulier pour $\alpha \in]01[$, on en déduit par le critère de Riemann que

$$\int_0^\pi |\ln\sin\left(\frac{t}{2}\right)|dt = -\int_0^\pi \ln\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt < +\infty$$

et on conclut pour l'existence avec le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives.

Soit $t \in]0,\pi]$. On pose:

$$f_t(r) = |1 - re^{it}|, \quad \forall r > 1.$$

L'étude des variations de $|f_t|^2$ montre que f_t est croissante, > 0 sur $[1,+\infty[$. Par croissance de $x \mapsto \ln x$ sur $]0,+\infty[$, on en déduit que $r \mapsto \ln f_t(r)$ est définie, croissante sur $[1;+\infty[$. Du théorème de convergence monotone, il résulte que:

$$\lim_{r\searrow 1^+}\int_0^\pi |1 - re^{it}|dt = \int_0^\pi |1 - e^{it}|dt < +\infty.$$

On a:

$$\int_0^\pi \ln|1 - e^{it}|dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \ln|1 - e^{it}|^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \ln(2 - 2\cos t)dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln P_k(1) = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln(\Pi_{k=1}^{n-1}P_k(1))$$

avec: $\forall n \geq 1$,

$$\Pi_{k=1}^{n-1}P_k(1) = \lim_{r\to 1^+}\frac{(r^{2n}-1)}{(r^2-1)} = \frac{1}{2}\lim_{r\to 1^+}\frac{(r^{2n}-1)}{(r-1)} = n.$$

On en déduit:

$$\int_{-\pi}^\pi \ln|1 - e^{it}|dt = 2\int_0^\pi \ln|1 - e^{it}|dt = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln(n) = 0.$$

(d) On pose $a = |a|e^{i\alpha}$ et alors:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln|a - re^{it}|dt = 2\pi \ln|a| + \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|1 - \frac{r}{|a|}e^{i(t-\alpha)}\right| dt =$$

$$= 2\pi \ln|a| + \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|1 - \frac{r}{|a|}e^{it}\right| dt \underset{(b),(c)}{=} 2\pi \ln|a| + 2\pi \ln\frac{r}{|a|} = 2\pi \ln(r).$$

où on a utilisé la périodicité de $t \mapsto e^{it}$.

2. Par hypothèse, $|F(re^{it})| > 0$, $\forall t \in [-\pi, \pi]$, donc $t \mapsto \ln|F(re^{it}|$ est bien définie et continue sur $[-\pi, \pi]$, donc d'intégrale sur $[-\pi, \pi]$ bien définie. On a: $\forall z \in D$,

$$\frac{|F(z)|^2}{|F(0)|^2} = \Pi_{i=1}^{p}\left|1 - \frac{z}{a_i}\right|^2 e^{\underbrace{G(z)+\overline{G}(z)}_{=2\mathrm{Re}G(z)} - (\underbrace{G(0)+\overline{G}(0)}_{=2\mathrm{Re}G(0)})}$$

et donc: $\forall t \in [-\pi, \pi]$,

$$\ln|F(re^{it})| = \ln|F(0)| + \sum_{i=1}^{p} \ln\left|1 - \frac{r}{a_i}e^{it}\right| + 2\mathrm{Re}(G(re^{it})) - 2\mathrm{Re}(G(0))$$

On remarque que par holomorphie de G:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(re^{it})dt = G(0)$$

ce qui entraîne, par linéarité de l'intégrale:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{G(re^{it})}dt = \overline{G(0)},$$

et donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}(G(re^{it}))dt = \mathrm{Re}(G(0)).$$

Il en résulte:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|F(re^{it})|dt = \ln|F(0)| + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|1 - \frac{r}{a_i}e^{it}\right| dt$$

avec: $\forall i \in [[1,p]]$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|1-\frac{r}{a_i}e^{it}\right| dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|a_i - re^{it}\right| dt - \ln|a_i| \underset{1(d)}{=} \ln\frac{r}{|a_i|}.$$

Finalement:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|F(re^{it})|dt = \ln|F(0)| + \sum_{i=1}^{p}\ln\frac{r}{|a_i|}.$$

II. Composantes connexes par arcs de $\mathcal{C}^*$

1. On a:

$$\forall t \in I, \quad e^{f(t)-g(t)} = 1 \Rightarrow (f-g)(I) \subset 2i\pi\mathbb{Z}.$$

   Comme I est connexe, son image par $f-g$ continue est une partie connexe de $\mathbb{C}$, donc réduite à un point puisque $2i\pi\mathbb{Z}$ est discret.

2. (a) On remarque que $t \mapsto \varphi(e^{it})$ est continue sur le compact $[-A,A]$ comme composée d'applications continues, donc uniformément continue sur $[-A,A]$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ t.q.:

$$|t-s| < \eta \Rightarrow |\varphi(e^{it}) - \varphi(e^{is})| < \varepsilon, \quad \forall t,s \in [-A,A].$$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \{0,\cdots,n-1\}$. On a: $\forall t \in [-A,A]$,

$$\left|\frac{(k+1)t}{n} - \frac{kt}{n}\right| = \frac{|t|}{n} \leq \frac{A}{n}.$$

   Soit $n_0 > 0$ t.q. $\dfrac{A}{n_0} < \eta$. Alors:

$$\left|\varphi\left(e^{\frac{i(k+1)t}{n}}\right) - \varphi\left(e^{\frac{ikt}{n}}\right)\right| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall k \in \{0,\cdots,n-1\}, \quad \forall t \in [-A,A].$$

   (b) Soit $n \geq n_0$ choisi comme dans (a). Soit $k \in \{0,\cdots,n-1\}$ et soit $t \in [-A,A]$. On a:

$$|u_{k,n}(t) - 1| = \frac{\left|\varphi\left(e^{\frac{i(k+1)t}{n}}\right) - \varphi\left(e^{\frac{ikt}{n}}\right)\right|}{\underbrace{\left|\varphi\left(e^{\frac{ikt}{n}}\right)\right|}_{\varphi\in\mathcal{C}^*}} \underset{(a)}{\leq} \frac{\varepsilon}{\min_{[-A,A]}|\varphi|}$$

avec $\min_{[-A,A]}|\varphi| > 0$ car $\varphi \in \mathcal{C}^*$.
On conclut en choisissant $\varepsilon \in]0, \min_{[-A,A]}|\varphi|[$.
De ce qui précède, on déduit que $u_{k,n}(t) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$; $\forall t \in [-A, A]$.
On définit donc une application $v_{k,n} : [-A, A] \to \mathbb{C}$ en posant:

$$v_{k,n}(t) = \ln u_{k,n}(t), \quad \forall t \in [-A, A].$$

De plus, $v_{k,n}$ est continue sur $[-A, A]$ comme composée d'applications continues et par construction: $u_{k,n}(t) = e^{v_{k,n}(t)}$, $\forall t \in [-A, A]$.

(c) Quitte à remplacer φ par $-\varphi$ et θ_A par $t \mapsto i\pi + \theta_A(t)$, on peut supposer que $\varphi(1) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Alors, il suffit de poser:

$$\theta_A(t) = \ln \varphi(1) + \sum_{k=0}^{n-1} v_{k,n}(t).$$

(d) Soit $\delta > 0$ associé à φ comme précédemment. Soit $(A_N)_{N\geq 0} \in]0, +\infty[^{\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante vers $+\infty$ et soit $(n_N)_{N\geq 0} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ t.q.: $\frac{A_N}{n_N} < \delta$. Par unicité de la détermination principale du logarithme, on a:

$$\theta_{A_{N+1}}|_{[-A_N, A_N]}, \quad \forall N \geq 0.$$

On pose donc:

$$\theta(t) = \theta_{A_N}(t) \quad \text{si} \quad |t| \leq A_N.$$

De plus, si $|t + 2\pi| \leq A_N$,

$$\theta_{A_N}(t + 2\pi) = \ln \varphi(1) + \sum_{k=0}^{n_N - 1} \ln \frac{\varphi(\zeta_n^{k+1} e^{\frac{i(k+1)t}{n}})}{\varphi(\zeta_n^k e^{\frac{ikt}{n}})}$$

$$= \ln \varphi(1) + \sum_{k=0}^{n_N-1} \left(\ln \varphi(e^{\frac{i(k+1)t}{n}}) + 2i\pi \frac{(k+1)}{n} \deg \varphi - \ln \varphi(e^{\frac{ikt}{n}}) - 2i\pi \frac{k}{n} \deg \varphi \right) =$$

$$= \theta_{A_N}(t) + 2i\pi \deg \varphi$$

Il en résulte:

$$\theta(t + 2\pi) = \theta(t) + 2i\pi \deg \varphi.$$

Autres solutions:

(i) Soit $A > 2\pi$ et soit $n \geq 1$ t.q. $\frac{A}{n} < \delta$. On pose:

$$\theta(t) = \theta_A\left(t - 2\pi\left(1 + \left[\frac{t-A}{2\pi}\right]\right)\right) + 2i\pi\left(1 + \left[\frac{t-A}{2\pi}\right]\right)\deg\varphi.$$

(ii) Soit $\delta > 0$ associé à φ comme précédemment. Soit $(A_N)_{N\geq 0} \in]0,+\infty[^{\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante vers $+\infty$ et soit $(n_N)_{N\geq 0} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ t.q.: $\frac{A_0}{n_0} < \delta$, et $\frac{A_N - A_{N-1}}{n_N} < \delta$, $N \geq 1$. Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose:

$$\varphi_A(s) = \varphi(e^{iA}s), \quad \forall s \in \mathbb{S}^1, \quad \forall A \in \mathbb{R},$$

$$v_{k,n}^A(t) = \ln \frac{\varphi_A(e^{\frac{i(k+1)t}{n}})}{\varphi_A(e^{\frac{ikt}{n}})}, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta_{A_0}(t) & si \quad |t| \leq A_0, \\ \theta(A_{N-1}) + \sum_{k=0}^{n_N-1} v_{k,n_N}^{A_{N-1}}(t - A_{N-1}) & si \quad A_{N-1} < t \leq A_N, \\ \theta(-A_{N-1}) + \sum_{k=0}^{n_N-1} v_{k,n_N}^{-A_{N-1}}(t + A_{N-1}) & si \quad -A_N < t \leq -A_{N-1}. \end{cases}$$

Par construction: θ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\theta \in R(\varphi)$.

(iii) Une autre solution est obtenue en posant:

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta_\pi(t) & \text{si} \quad |t| \leq \pi, \\ \theta_\pi(t - 2N\pi) + 2i\pi N \deg(\varphi) & \text{si} \quad (2N-1)\pi \leq t \leq (2N+1)\pi \end{cases}$$

où $\deg(\varphi)$ est calculé à partir de θ_π. Il reste à vérifier que θ ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $N \in \mathbb{Z}$. Par construction:

$$\theta((2N+1)\pi^+) = \theta_\pi(\pi) + 2i\pi N \deg(\varphi) =$$

$$= \theta_\pi(-\pi) + 2i\pi(N+1)\deg(\varphi) = \theta((2N+1)\pi^-).$$

3. (a) Par périodicité de l'exponentielle complexe:

$$e^{\theta(t+2\pi)} = \varphi(e^{it}) = e^{\theta(t)} \Rightarrow \theta(t+2\pi) - \theta(t) \in 2i\pi\mathbb{Z}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Comme de plus $t \mapsto \frac{\theta(t+2\pi)-\theta(t)}{2i\pi}$. est continue, on en déduit qu'elle est contante, de valeur constante égale dans $\mathbb{Z}$.

Soit $\theta_1, \theta_2 \in R(\varphi)$. Par définition:

$$e^{\theta_1(t)} = e^{\theta_2(t)} = \varphi(t) \Rightarrow \theta_1(t) - \theta_2(t) \in 2i\pi\mathbb{Z}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Par continuité de $\theta_1 - \theta_2$, on déduit que $\frac{\theta_1 - \theta_2}{2i\pi}$ est constante, de valeur constante dans $\mathbb{Z}$. Il en résulte: $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\theta_1(t+2\pi) - \theta_1(t)}{2i\pi} - \frac{\theta_2(t+2\pi) - \theta_2(t)}{2i\pi} = \frac{\theta_1(t+2\pi) - \theta_2(t+2\pi)}{2i\pi} - \frac{\theta_1(t) - \theta_2(t)}{2i\pi}$$
$$= 0$$

Donc la quantité $\dfrac{\theta(t+2\pi) - \theta(t)}{2i\pi}$ est indépendante du choix de $(\theta, t) \in R(\varphi) \times \mathbb{R}$.

(b) i) Le choix $\theta : t \mapsto int$ convient et alors

$$\theta(t+2\pi) - \theta(t) = 2in\pi \Rightarrow \deg(e_n) = n.$$

ii) Par définition: $\theta = \theta_1 + \theta_2$, donc:

$$\deg(\varphi_1\varphi_2) = \deg(\varphi_1) + \deg(\varphi_2).$$

iii) On peut choisir: $\theta : t \mapsto \ln \varphi(e^{it})$ où ln désigne la détermination principale du Logarithme. On en déduit: $\deg(\varphi) = 0$.

(c) On remarque que $\dfrac{1}{\varphi_1} \in \mathcal{C}^*$ et $\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1} \in \mathcal{C}^*$. On a:

$$\deg\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) \underset{(b).ii)}{=} \deg(\varphi_2) + \deg\left(\frac{1}{\varphi_1}\right)$$

avec:

$$\deg(e_0) \underset{(b).i)}{=} 0 \quad \text{et} \quad e_0 = 1 = \varphi_1 \times \frac{1}{\varphi_1} \underset{(b).ii)}{\Rightarrow} \deg\left(\frac{1}{\varphi_1}\right) = -\deg(\varphi_1).$$

On en déduit:

$$\deg\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) = \deg(\varphi_2) - \deg(\varphi_1).$$

On a aussi:

$$\left|\frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} - 1\right| < 1 \Rightarrow \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Il en résulte, par définition de L:

$$\theta_2(t) - \theta_1(t) = L\left(\frac{\varphi_2(e^{it})}{\varphi_1(e^{it})}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

d'où, en particulier: $\deg(\varphi_2) - \deg(\varphi_1) = 0$.

(d) Soit $\varphi \in \mathcal{C}^*$, $\varphi \neq 0$, et soit $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite de $\mathcal{C}^*$ qui converge vers φ pour la norme $|\cdot|_\infty$. Par définition de $\mathcal{C}^*$, $\min_{\mathbb{S}^1}|\varphi| > 0$, donc il existe $\varepsilon_0 > 0$ t.q.:

$$|\varphi_\varepsilon - \varphi|_\infty < \min_{\mathbb{S}^1}|\varphi|, \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[.$$

Soit $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. On en déduit:

$$|\varphi_\varepsilon - \varphi| < \min_{\mathbb{S}^1}|\varphi| \leq |\varphi| \underset{(c)}{\Rightarrow} \deg(\varphi_\varepsilon) = \deg(\varphi).$$

Comme $\varphi \mapsto \deg(\varphi)$ est à valeurs discrètes, cela signifie que que cette application est continue sur $(\mathcal{C}^*, |\cdot|_\infty)$.

4. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et soit $\varphi \in \mathcal{C}^*_n$. Quitte à remplacer φ par φe_n^{-1}, on peut supposer que $n = 0$. Soit $\theta \in R(\varphi)$. Pour tout $s \in [0,1]$, on définit H_s sur $\mathbb{S}^1$ en posant:

$$H_s(e^{it}) = e^{s\theta(t)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Par construction, $H_s \in \mathcal{C}^*_0$, $\forall s \in [0,1]$. Soit $s \in [0,1]$ et soit $[0,1] \ni s_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} s$. On a: $\forall \varepsilon > 0$,

$$|H_{s_\varepsilon} - H_s| = |e^{(s_\varepsilon - s)\theta} - 1||e^{s\theta}| \leq |s_\varepsilon - s||\theta|_\infty e^{|\theta|_\infty} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$$

i.e. $s \mapsto H_s$, resp. $s \mapsto H_{1-s}$, est un chemin continu de $(\mathcal{C}^*, |\cdot|_\infty)$ reliant e_0, resp. φ, à φ, resp. e_0, dans $\mathcal{C}^*_0$. On en déduit que deux éléments quelconques $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^*_0$ peuvent être reliés par un chemin continu contenu dans $\mathcal{C}^*_0$ et passant par e_0, i.e. $\mathcal{C}^*_0$ est connexe par arcs.

Dans la cas général où $\varphi \in \mathcal{C}^*_n$, on remarque que $\varphi e_n^{-1} \in \mathcal{C}^*_0$ et que $\theta - n \in R(\varphi e_n^{-1})$. Pour tout $s \in [0,1]$, on définit:

$$H_s(e^{it}) = e^{s(\theta(t)-n)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Alors $H_s \in \mathcal{C}_0^*$ et $s \mapsto H_s e_n \in \mathcal{C}_n^*$ est un chemin continu contenu dans $\mathcal{C}_n^*$ reliant e_n à varphi dans $\mathcal{C}_n^*$. On conclut comme dans le cas $n = 0$ que $\mathcal{C}_n^*$ est connexe par arcs.

Soit $\Gamma \subset \mathcal{C}^*$ une composante connexe par arcs de $\mathcal{C}^*$ et soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma$. Par hypothèse, il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to \Gamma$, t.q. $\gamma(0) = \varphi_1$, $\gamma(1) = \varphi_2$. On remarque que $s \mapsto \deg(\gamma(s))$ est continue comme composée d'applications continues, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, donc constante. Soit $n = \deg(\gamma)$. Alors $\Gamma \subset \mathcal{C}_n^*$ et comme $\mathcal{C}_n^*$ est connexe par arcs, on en déduit que $\Gamma = \mathcal{C}_n^*$.

III. Espace de Hardy H^2

1. La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ étant une base hilbertienne de L^2, la sous-famille $(e_n)_{n\geq 0}$ est orthonormée. Par définition de H^2:

$$H^2 = \{f \in L^2,\ f = \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n) e_n\} = \overline{\mathrm{Vect}\{e_n,\ n \geq 0\}}.$$

On en déduit que H^2 est un sous-espace fermé de L^2 de base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 0}$. Par définition de Π:

$$\Pi(f) = \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n) e_n, \quad \forall f \in L^2.$$

2. Soit $f \in H^2$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On a: $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$|\hat{f}(n) z^n| \leq |f|_1 |z|^n$$

avec $|f|_1 < +\infty$ car $[-\pi, \pi]$ est borné. La série majorante converge ssi $|z| < 1$. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum \hat{f}(n) z^n$ est ≥ 1.

Soit $f \in H^2$. Sa décomposition dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 0}$ s'écrit:

$$f = \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n) e_n.$$

avec

$$\sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)|^2 < +\infty. \tag{2}$$

Soit $R \in [0,+\infty]$ le rayon de convergence de la série entière $\sum \hat{f}(n) z^n$.
Par définition:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} |\hat{f}(n)|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to+\infty} \left(|\hat{f}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2n}} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt{\left(|\hat{f}(n)|^2\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

Soit $(n_k)_{k\geq 0}$ extraite de $(n)_{n\geq 0}$ t.q.:

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt{\left(|\hat{f}(n_k)|^2\right)^{\frac{1}{n_k}}} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt{\left(|\hat{f}(n)|^2\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

Par continuité de $x \mapsto \sqrt{x}$, on en déduit:

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt{\left(|\hat{f}(n_k)|^2\right)^{\frac{1}{n_k}}} = \sqrt{\lim_{k\to+\infty} \left(|\hat{f}(n_k)|^2\right)^{\frac{1}{n_k}}} \leq \sqrt{\limsup_{n\to+\infty} \left(|\hat{f}(n)|^2\right)^{\frac{1}{n}}} \underset{(2)}{\leq} 1,$$

i.e.: $R \geq 1$.

Par construction: $\forall r \in]0,1[$,

$$f_r - f = \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n)(r^n - 1)e_n \Rightarrow |f_r - f|_2^2 = \sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)|^2 |r^n - 1|^2$$

avec:

$$\lim_{r\to 1^-} |r^n - 1|^2 = 0, \quad \forall n \geq 0,$$

et:

$$|\hat{f}(n)|^2 |r^n - 1|^2 \underset{0<r<1}{\leq} |\hat{f}(n)|^2.$$

La série majorante $\sum |\hat{f}(n)|^2$ étant convergente, on déduit du théorème de convergence dominée de Lebesgue séquentiel que:

$$\lim_{r\to 1^-} |f_r - f|_2^2 = 0 = \lim_{r\to 1^-} |f_r - f|_2.$$

3. (a) Soit $\varepsilon > 0$. On a:

$$0 \leq \ln\left(1 + \frac{|f|}{\varepsilon}\right) \leq \frac{|f|}{\varepsilon}$$

avec:

$$f \in H^2 \subset L^2 \subset L^1.$$

On en déduit:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln\left(1+\frac{|f|}{\varepsilon}\right)\right|dt=\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(1+\frac{|f|}{\varepsilon}\right)dt\leq\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f|}{\varepsilon}dt<+\infty.$$

Finalement:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\ln(|f(e^{it})|+\varepsilon)|dt\leq 2\pi|\ln\varepsilon|+\int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln\left(1+\frac{|f|}{\varepsilon}\right)\right|dt<+\infty.$$

i.e. $\ln(|f|+\varepsilon)\in L^1$.

(b) Soit $r\in[0,1[$ et soit $t\in\mathbb{R}$. On remarque:

$$|\ln(x)-\ln(y)|=\left|\int_x^y\frac{dt}{t}\right|\leq\frac{|x-y|}{\varepsilon},\quad\forall x,y\in[\varepsilon,+\infty[.$$

Il en résulte:

$$|\ln(|f_r(e^{it})|+\varepsilon)-\ln(|f(e^{it})|+\varepsilon)|\leq\frac{|f_r(e^{it})-f(e^{it})|}{\varepsilon}.$$

(c) De la décomposition de f dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 0}$ de H^2:

$$f=\sum_{n\geq 0}\hat{f}(n)e_n,$$

on déduit, avec les notations de 2., que $F\equiv f$ dans L^2 et que $\hat{f}(0)=F(0)$. Il en résulte:

$$\ln|\hat{f}(0)|=\ln|F(0)|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|F(re^{it})|dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|f_r(e^{it})|dt$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(|f_r(e^{it})|+\varepsilon)dt\underset{(b)}{\leq}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(|f(e^{it})|+\varepsilon)dt+\frac{|f_r-f|_1}{\varepsilon}$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(|f(e^{it})|+\varepsilon)dt+\frac{|f_r-f|_2}{\varepsilon}.$$

On en déduit:

$$\ln|\hat{f}(0)|\leq\limsup_{r\to 1^-}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(|f(e^{it})|+\varepsilon)dt+\frac{|f_r-f|_2}{\varepsilon}\right)$$

$$\underset{2.}{=}\lim_{r\to 1^-}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(|f(e^{it})|+\varepsilon)dt+\frac{|f_r-f|_2}{\varepsilon}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(|f(e^{it})|+\varepsilon)dt.$$

(d) L'application $x \mapsto \ln x$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^*+$, on déduit du théorème de convergence monotone de Lebesgue que:

$$\ln|\hat{f}(0)| \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln(|f(e^{it})|+\varepsilon)dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln(|f(e^{it})|+\varepsilon)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln(|f(e^{it})|)dt.$$

On pose:

$$A = \{t \in [-\pi,\pi],\ f(e^{it}) = 0\}$$

Si A est de mesure de Lebesgue non nulle, alors $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln(|f(e^{it})|)dt = -\infty$, en contradiction avec $\hat{f}(0) \neq 0$. Donc A est de mesure de Lebesgue nulle.

IV. Opérateurs de Toeplitz

1. (a) On remarque que:

$$|\varphi f|_2 \leq |\varphi|_\infty |f|_2 < \infty$$

et donc $\varphi f \in L^2$. On en déduit que $\Pi(\varphi f) \in H^2$ est bien défini. Soit $f \in H^2 \setminus \{0\}$. On a:

$$|T_\varphi(f)|_2 = |\Pi(\varphi f)|_2 \leq |\varphi f|_2 \leq |\varphi|_\infty |f|_2$$

donc

$$|||T_\varphi||| \leq \frac{|T_\varphi(f)|_2}{|f|_2} \leq |\varphi|_\infty < +\infty,$$

i.e. $T_\varphi \in \mathcal{L}(H^2)$.

(b) Soit $i, j \in \mathbb{N}$. Par définition: $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{\varphi e_j}(n) = \int \varphi e_j e_{-n} = \int \varphi e_{j-n} = \hat{\varphi}(n-j).$$

On en déduit la décomposition de φe_j dans L^2:

$$\varphi e_j = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n-j) e_n.$$

Il en résulte, par définition de la projection orthogonale sur $H^2 \subset L^2$:

$$T_\varphi(e_j) = \Pi(\varphi e_j) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{\varphi}(n-j)e_n \Rightarrow$$

$$\langle e_i, T_\varphi(e_j)\rangle = \int \Pi(\varphi e_j)e_{-i} = \hat{\varphi}(i-j).$$

On remarque que $T : \varphi \mapsto T_\varphi$ est linéaire sur le $\mathbb{C}$-ev $\mathcal{C}$. On est donc ramené à étudier $\mathrm{Ker}(T)$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}$ t.q. $T_\varphi = 0$. En particulier:

$$0 = \langle e_i, T_\varphi(e_j)\rangle = \hat{\varphi}(i-j), \quad \forall . i,j \in \mathbb{N}.$$

Comme l'application $(i,j) \mapsto i-j$ est surjective de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$, on en déduit que $\hat{\varphi}(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, i.e.: $\varphi = 0$ par injectivité de la transformation de Fourier sur $\mathcal{C}$, et T est injective.

(c) Soit $i, j \in \mathbb{N}$. On a:

$$\langle e_i, T_{\overline{\varphi}}(e_j)\rangle = \hat{\overline{\varphi}}(i-j)$$

avec:

$$\overline{\varphi} = \overline{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n)e_n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\hat{\varphi}(n)}e_{-n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\hat{\varphi}(-n)}e_n$$

car la décomposition dans L^2 est une série normalement convergente. On en déduit, par unicité de la décomposition dans L^2:

$$\hat{\overline{\varphi}}(n) = \overline{\hat{\varphi}(-n)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

ce qui entraîne:

$$\langle e_i, T_{\overline{\varphi}}(e_j)\rangle = \hat{\overline{\varphi}}(j-i) = \overline{\langle e_j, T_\varphi(e_i)\rangle} = \int e_j\overline{T_\varphi(e_i)} = \langle T_\varphi(e_i), e_j\rangle = \langle e_i, T^*_\varphi(e_j)\rangle$$

i.e.: $T^*_\varphi = T_{\overline{\varphi}}$.

2. (a) On a:

$$\int |u| = \int |\varphi||f||g| \leq |\varphi|_\infty |f|_2 |g|_2 < +\infty$$

i.e. $u \in L^1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition:

$$\hat{u}(n) = \int \varphi f \overline{g} e_{-n} = \int \varphi f \overline{g e_n} = \langle g e_n, \varphi f \rangle$$

avec:$\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{ge_n}(k) = \int g e_n e_{-k} = \int g e_{n-k} = \hat{g}(k-n) = 0 \quad \text{dès que} \quad k \leq n.$$

$$\Rightarrow g e_n \in H^2.$$

Il en résulte:

$$\hat{u}(n) = \langle g e_n, \underbrace{T_\varphi(f)}_{=0} \rangle = 0.$$

(b) On a: $\overline{u} = \overline{\varphi} \overline{f} g$ avec $g \in \mathrm{Ker}(T_{\overline{\varphi}})$ d'après 1.(c). Le même raisonnement que dans (a) avec u remplacé par $\overline{u}$ montre ue:

$$\hat{\overline{u}}(n) = 0, \quad \forall n \geq 0.$$

Il en résulte:

$$\overline{\hat{u}(n)} = \hat{\overline{u}}(-n) = 0, \quad \forall n \leq 0.$$

i.e. $\hat{u}(n) = 0$, $\forall n \leq 0$. Combiné avec (a), ce résultat entraâine $\hat{u}(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, i.e. $u = 0$ dans $L^1 \subset L^2$.

(c) On suppose que T_φ et T_φ^* ne sont pas injectifs et que $g \in \mathrm{Ker}(T_\varphi^*)$. D'après (b), $u = 0$ dans L^1. Il en résulte que $u(e^{it}) = 0$ p.p. dans $[-\pi, \pi]$. Si f et g ne sont pas nuls, alors $f(e^{it}) \neq 0$ et $g(e^{it}) \neq 0$ p.p. dans $[-\pi, \pi]$ d'après III.3. Il en résulte que $\varphi(e^{it}) = 0$ p.p. dans $[-\pi, \pi]$, i.e. $\varphi = 0$ dans $\mathbb{S}^1$ par continuité, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Donc l'un au moins des opérateurs T_φ et T_φ^* est injectif.

On suppose que T_φ n'est pas injectif. Alors T_φ^* est injectif d'après ce qui précède, i.e. $\mathrm{Ker}(T_\varphi^*) = \{0\}$. D'après III.1., H^2 est un espace de Hilbert comme sev fermé de l'espace de L^2. On en déduit:

$$H^2 = \{0\}^\perp = \mathrm{Ker}(T_\varphi^*)^\perp = \mathrm{Im}(T_\varphi)^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Im}(T_\varphi)}$$

i.e. l'image de T_φ est dense dans H^2.

V. Opérateurs compacts et opérateurs de Toeplitz

1. (a) Soit $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(H)$. On a: $\overline{T_1(B) - T_2(B)} \underset{T_1 et T_2 compacts}{\subset} \overline{T_1(B)} + \overline{T_2(B)}$ image du compact $\overline{T_1(B)} \times \overline{T_2(B)}$ par l'application $(x, y) \mapsto x + y$ à valeurs dans H^2 séparé, donc $\overline{T_1(B)} + \overline{T_2(B)}$ est compact. On en déduit que $\overline{T_1(B) - T_2(B)}$ est compact comme fermé inclus dans un compact. Donc $T_1 - T_2 \in \mathcal{K}(H)$ et $\mathcal{K}(H)$ est un sous-groupe additif de $\mathcal{L}(H)$.

   Soit $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(H)$ et soit $(y_n)_{n\geq 0} \in \overline{(T_1 - T_2)(B)}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \geq 0$, il existe $x_n \in B$ t.q.

$$\|y_n - (T_1 - T_2)(x_n)\| < \frac{1}{n+1}.$$

   En particulier $T_1(x_n) \in T_1(B) \subset \overline{T_1(B)}$ et $\overline{T_1(B)}$ est compact par hypothèse, donc il existe une suite extraite $(T_1(x_{\varphi_1(n)}))_{n\geq 0}$ convergente vers $z_1 \in H$. De même, $T_2(x_{\varphi_1(n)}) \in T_2(B) \subset \overline{T_2(B)}$ avec $\overline{T_2(B)}$ compact par hypothèse, donc il existe une suite extraite $(T_2(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}))_{n\geq 0}$ convergente vers $z_2 \in H$. Par construction:

$$T_1(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}) - T_2(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}) \underset{n\to+\infty}{\to} z_1 - z_2 \in H.$$

   Il en résulte:

$$\begin{aligned}\|y_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}) - z_1 + z_2\| &\leq \|y_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}) - T_1(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}) + T_2(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})\| + \\ &\quad + \|T_1(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}) - T_2(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}) - z_1 + z_2\| \\ &\leq \frac{1}{\varphi_1\circ\varphi_2(n) + 1} + \|T_1(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}) - T_2(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}) - z_1 + z_2\| \\ &\leq \frac{1}{n+1} + \|T_1(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}) - T_2(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}) - z_1 + z_2\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

   i.e.:

$$y_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}) \underset{n\to+\infty}{\to} z_1 - z_2 \in H.$$

   Donc $T_1 - T_2 \in \mathcal{K}(H)$ et $\mathcal{K}(H)$ est un sous-groupe additif de $\mathcal{L}(H)$.

   Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ et soit $S \in \mathcal{L}(H)$. Soit $(y_n)_{n\geq 0} \in \overline{S \circ T(B)}^{\mathbb{N}}$ et soit $(x_n)_{n\geq 0} \in B^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\|y_n - S \circ T(x_n)\| < \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \geq 0.$$

Comme $T(x_n) \in T(B) \subset \overline{T(B)}$ avec $\overline{T(B)}$ compact par hypothèse, il existe une suite extraite $(T(x_{\varphi(n)}))_{n\geq 0}$ convergente vers $y \in H$. Par continuité de $S \in \mathcal{L}(H)$, on en déduit que

$$S \circ T(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\to} S(y) \in H.$$

et donc que $y_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} S(y) \in H$. Donc $S \circ T \in \mathcal{K}(H)$.

Soit $(y_n)_{n\geq 0} \in \overline{T \circ S(B)}^{\mathbb{N}}$ et soit $(x_n)_{n\geq 0} \in B^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\|y_n - T \circ S(x_n)\| < \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \geq 0.$$

On a:

$$\|S(x_n)\| \leq \|S\| \Rightarrow \frac{x_n}{\|S\|} \in B, \quad \forall n \geq 0.$$

Alors $\|S\|^{-1} T \circ S(x_n) \in T(B) \subset \overline{T(B)}$ avec $\overline{T(B)}$ compact par hypothèse, il existe une suite extraite $(\|S\|^{-1} T \circ S(x_{\varphi(n)}))_{n\geq 0}$ convergente vers $y \in H$. On en déduit que

$$\|S\|^{-1} T \circ S(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\to} y \in H.$$

et donc que $y_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} \|S\| y \in H$. Donc $T \circ S \in \mathcal{K}(H)$. Finalement, $\mathcal{K}(H)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(H)$.

Soit $T \in \mathcal{K}_0(H)$. Alors $\overline{T(B)}$ est une partie fermée de $\mathrm{Im}(T)$. Soit $y \in \overline{T(B)}$ et soit $(x_n)_{n\geq 0} \in B^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\|y - T(x_n)\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Alors:

$$\|T(x_n)\| \leq \|T\|, \quad \forall n \geq 0.$$

On en déduit:

$$\|y\| = \lim_{n\to+\infty} \|T(x_n)\| \leq \|T\|,$$

i.e. $\overline{T(B)}$ est une partie bornée de H. Finalement, $\overline{T(B)}$ est fermé et borné dans $\mathrm{Im}(T)$ qui est un ev de dimension finie, donc $\overline{T(B)}$ est compact et $T \in \mathcal{K}(H)$. Il en résulte que $\mathcal{K}_0(H) \subset \mathcal{K}(H)$.

(b) Soit $T \in \overline{\mathcal{K}(H)}$ et soit $\varepsilon > 0$. Soit $T_\varepsilon \in \mathcal{K}(H)$ t.q. $\|T - T_\varepsilon\| < \varepsilon$. Par définition de $\mathcal{K}(H)$, il existe une $I_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $x_0, \cdots, x_{I_\varepsilon} \in H$ t.q.

$$T_\varepsilon(B) \subset \cup_{i=0}^{I_\varepsilon} B_\varepsilon(x_i)$$

où $B_\varepsilon(x_i) := x_i + \varepsilon B$ est la boule fermée de rayon $\varepsilon > 0$ centrée en $x_i \in H$. Soit $x \in B$ et soit x_i, $0 \leq i \leq I_\varepsilon$, t.q.

$$\|T_\varepsilon(x) - x_i\| < \varepsilon.$$

Alors

$$\|T(x) - x_i\| \leq \|T - T_\varepsilon\| + \|T_\varepsilon(x) - x_i\| < 2\varepsilon$$

i.e. $T(B) \subset \cup_{i=0}^{I_\varepsilon} B_{2\varepsilon}(x_i)$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\overline{T(B)}$ est compact, i.e. que $T \in \mathcal{K}(H)$.

2. (a) Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}$ et soit

$$\varphi_i = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}_i(n) e_n, \quad i \in \{1, 2\}$$

leurs décompositions respectives dans la base $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Par hypothèse, $\hat{\varphi}_1(n) = 0$, resp. $\hat{\varphi}_2(n) = 0$, sauf pour un nombre fini d'entiers $n \in \mathbb{Z}$. Soit $f \in H^2$. On a:

$$T_{\varphi_1} T_{\varphi_2}(f) - T_{\varphi_1 \varphi_2}(f) = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}_1(m) \hat{\varphi}_2(n) (T_{e_m} T_{e_n} - T_{e_{m+n}})(f),$$

avec: $\forall k, \ell \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{e_\ell f}(k) = \int f e_\ell e_{-k} = \int f e_{\ell - k} = \hat{f}(k - \ell) \Rightarrow f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k - \ell) e_k$$

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$. De ce qui précède on déduit:

$$T_{e_m} T_{e_n}(f) = \Pi(e_m T_{e_n}(f)) = \sum_{k \geq 0} \widehat{T_{e_n}(f)}(k - m) e_k =$$

$$= \sum_{k \geq \max(0,m)} \widehat{T_{e_n}(f)}(k - m) e_k = \sum_{k \geq \max(0,m)} \hat{f}(k - m - n) e_k$$

$$T_{e_{m+n}}(f) = \sum_{k \geq 0} \hat{f}(k - m - n) e_k.$$

Il reste:

$$(T_{e_m}T_{e_n}-T_{e_{m+n}})(f) = \begin{cases} -\sum_{0\le k<m}\hat{f}(k-m-n)e_k & \text{si} \quad m>0, \\ 0 & \text{si} \quad m\le 0. \end{cases}$$

i.e.:

$$(T_{e_m}T_{e_n}-T_{e_{m+n}})(f) \in \mathrm{Vect}\{e_0,\cdots,e_{|m|}\}, \quad \forall m,n\in\mathbb{Z}.$$

Comme φ_1 et φ_2 sontdes combinaisons linéares finies de $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on en déduit que l'opérateur $T_{\varphi_1}T_{\varphi_2}-T_{\varphi_1\varphi_2}$ a son image de dimension finie, i.e. est dans $\mathcal{K}_0(H^2)$.

(b) Soit $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{C}$. D'après le Théorème de Weiertrass: $\mathcal{C}=\overline{\mathcal{P}}^{|\cdot|_\infty}$. Soit $f\in H^2$. On remarque que:

$$|T_{\varphi_1}(f)-T_{\varphi_2}(f)|_2 = |\Pi((\varphi_1-\varphi_2)f)|_2 \le |(\varphi_1-\varphi_2)f|_2 \le |\varphi_1-\varphi_2|_\infty |f|_2$$

i.e.:

$$\|T_{\varphi_1}-T_{\varphi_2}\| \le |\varphi_1-\varphi_2|_\infty.$$

Soit $\varepsilon>0$ et soit $\varphi_1^\varepsilon\in\mathcal{P}$, $\varphi_2^\varepsilon\in\mathcal{P}$ t.q.:

$$|\varphi_i-\varphi_i^\varepsilon|_\infty<\varepsilon, \quad i\in\{1,2\}.$$

Alors:

$$\|T_{\varphi_1}T_{\varphi_2}-T_{\varphi_1^\varepsilon}T_{\varphi_2^\varepsilon}\| \le |\varphi_1-\varphi_1^\varepsilon|_\infty\|T_{\varphi_2}\| + |\varphi_2-\varphi_2^\varepsilon|_\infty(\|T_{\varphi_1}\|+\varepsilon) \le$$

$$\le \varepsilon(\|T_{\varphi_1}\|+\|T_{\varphi_2}\|+\varepsilon)$$

$$\|T_{\varphi_1\varphi_2}-T_{\varphi_1^\varepsilon\varphi_2^\varepsilon}\| \le |\varphi_1\varphi_2-\varphi_1^\varepsilon\varphi_2^\varepsilon|_\infty \le \varepsilon(|\varphi_1|+|\varphi_2|+\varepsilon)$$

Finalement:

$$\|T_{\varphi_1}T_{\varphi_2}-T_{\varphi_1\varphi_2}-T_{\varphi_1^\varepsilon}T_{\varphi_2^\varepsilon}+T_{\varphi_1^\varepsilon\varphi_2^\varepsilon}\| \le 2\varepsilon(|\varphi_1|+|\varphi_2|+\varepsilon) \le C\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon>0$ est arbitraire, on en déduit de (a) que:

$$T_{\varphi_1}T_{\varphi_2}-T_{\varphi_1\varphi_2} \in \overline{\mathcal{K}_0(H^2)} \subset \overline{\mathcal{K}(H^2)} \underset{1.(b)}{=} \mathcal{K}(H^2)$$

3. (a) Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in \mathrm{Ker}(I+K)^{\mathbb{N}} \cap B^{\mathbb{N}}$. Alors: $x_n = -K(x_n) = K(-x_n)$ avec $-x_n \in B$, $\forall n \geq 0$, donc $x_n \in K(B) \subset \overline{K(B)}$. Par hypothèse sur K, $\overline{K(B)}$ est un compact donc il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ convergente vers $x \in \overline{K(B)}$. Par continuité de K et de la norme, on a: $x = -K(x)$ et $x \in B$, i.e. $x \in \mathrm{Ker}(I+K) \cap B$. Comme ceci est vrai pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0} \in \mathrm{Ker}(I+K)^{\mathbb{N}} \cap B^{\mathbb{N}}$, on en déduit que la boule unité fermée de $\mathrm{Ker}(I+K)$ est compacte i.e. que $\mathrm{Ker}(I+K)$ est de dimension finie.

(b) Soit $y \in \overline{\mathrm{Im}(I+K)}$ et soit $(x_n)_{n\geq 0} \in H^{\mathbb{N}}$ t.q. $x_n + K(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} y$. Pour tout $n \geq 0$, $(I+K)(x_n) = (I+K)(x'_n)$ avec $x'_n \in \mathrm{Ker}(I+K)^{\perp}$ projection orthogonale de x_n sur $\mathrm{Ker}(I+K)^{\perp}$. On suppose que $|x'_n| \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et on pose:

$$u_n = \frac{x'_n}{|x'_n|}, \quad \forall n \geq 0.$$

Alors

$$|(I+K)(u_n)| \leq \frac{|x_n + K(x_n)|}{|x'_n|} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

De plus $u_n \in B \Rightarrow K(u_n) \in K(B)$. Par compacité, il existe une suite extraite $(K(u_{\varphi(n)}))_{n\geq 0}$ convergente vers $v \in H$ et alors $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} -v$ t.q. $|v| = 1$. Par construction, $u_n \in \mathrm{Ker}(I+K)^{\perp}$ et $\mathrm{Ker}(I+K)^{\perp}$ est fermé donc $v \in \mathrm{Ker}(I+K)^{\perp}$. Par continuité de K: $-v - K(v) = 0$, i.e. $v \in \mathrm{Ker}(I+K)$. Donc $v = 0$, ce qui contredit $|v| = 1$. Donc la suite $(x'_n)_{n\geq 0}$ est bornée dans $\mathrm{Ker}(I+K)^{\perp}$. Soit $M > 0$ t.q. $y'_n := \frac{x'_n}{M} \in B$. Par compacité de $\overline{K(B)}$, on en déduit qu'il existe une suite extraite $(K(y'_{\varphi(n)}))_{n\geq 0}$ convergente vers $y' \in \overline{K(B)}$. Alors $y'_{\varphi(n)} \to M^{-1}y - y'$ et $x'_{\varphi(n)} \to y - My' =: x'$. Par continuité de K: $x' + Kx' = y \in \mathrm{Im}(I+K)$, i.e. $\mathrm{Im}(I+K)$ est fermé dans H.

(c) Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in B^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \geq 0$, on considère $f_n : \Gamma \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \langle x_n, x\rangle$. Soit $\Phi = \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et soit $x \in \Gamma$. On pose $\Phi(x) = \{f_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$. On remarque que: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| \leq |x_n||x| \leq |x|$$

donc $\Phi(x)$ est borné dans $\mathbb{C}$, ainsi que $\overline{\Phi(x)}$. Il en résulte que $\overline{\Phi(x)}$ est un compact de $\mathbb{C}$.

On a aussi: $\forall n \geq 0$, $\forall x, y \in \Gamma$,

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |x - y|$$

donc Φ est équicontinue sur Γ. Du Théorème d'Ascoli, on déduit que $\overline{\Phi}$ est une partie compacte de $\mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{C})$. Donc il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ uniformément convergente sur Γ vers $f \in \mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{C})$.

En particulier la suite $(f_{\varphi(n)} \circ K)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur B vers $f \circ K$. Pour tout $n \geq 0$, $g_n := f_{\varphi(n)} \circ K$ se prolonge naturellement à H en un élément du dual H^* de H en posant:

$$g_n(x) = \langle x_{\varphi(n)}, K(x) \rangle, \quad \forall x \in H$$

et on a aussi:

$$g_n(x) = \langle K^* x_{\varphi(n)}, x \rangle, \quad \forall x \in H.$$

En remarquant que:

$$|g_n|_\infty = \sup_{x \in B} |g_n(x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|g_n(x)|}{|x|}$$

on en déduit que $(g_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans H^*, donc convergente vers $g \in H^*$, de la forme:

$$g(x) = \langle y, x \rangle, \quad \forall x \in H$$

où $y \in H$, d'après le Théorème de représentation de Riesz. On a:

$$\|g_n - g\| = |K^* x_{\varphi(n)} - y|, \quad \forall n \geq 0$$

et donc la suite $(K^* x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ est convergente dans H vers $y \in H$.

(d) On a:

$$\mathrm{Im}(I + K)^\perp = \mathrm{Ker}(I + K^*).$$

D'après (c), $K^* \in \mathcal{K}(H)$. Donc, en tremplaçant K par K^* dans le raisonnement de la question et le raisonnement de (a), on en dd́uit que $\mathrm{Ker}(I + K^*)$ est de dimension finie, i.e que $\mathrm{Im}(I + K)$ est de codimension finie égale à la dimension de $\mathrm{Ker}(I + K^*)$.

VI. Opérateurs de Fredholm et opérateurs de Toeplitz

1. (a) Comme V est fermé, le théorème de projection orthogonale sur les espaces de Hilbert donne:

$$H = V \oplus V^{\perp}.$$

De même:

$$H = \overline{W} \oplus \overline{W}^{\perp}$$

avec:

$$\overline{W}^{\perp} = W^{\perp\perp\perp} = (W^{\perp})^{\perp\perp} = \overline{W^{\perp}} = W^{\perp}$$

car l'orthogonal est toujours fermé. Donc on a en fait:

$$H = \overline{W} \oplus W^{\perp}.$$

avec $V \subset W \Rightarrow W^{\perp} \subset V^{\perp}$ et $\dim V^{\perp} = \mathrm{codim} V < +\infty$ par hypothèse, donc $\dim W^{\perp} < +\infty$. Soit $(e_0, \cdots, e_w)$ une bon de $W^{\perp}$, complétée en une bon $(e_0, \cdots, e_v)$, $v \geq w$, de $V^{\perp}$. Comme $\overline{W}$ est un sev fermé de H, c'est un espace de Hilbert. Soit $(e_n)_{n>w}$ une base hilbertienne de $\overline{W}$. De plus, $W \subset V$ par hypothèse, et V est fermé. Donc $\overline{W} \subset V$. On peut donc compléter $(e_n)_{n>w}$ en une base hilbertienne $(e_n)_{n>v}$ de V. Finalement:

$$H = \underbrace{\overline{\mathrm{Vect}\{e_n,\ n > v\}}}_{=V} \oplus \underbrace{\mathrm{Vect}\{e_{w+1}, \cdots, e_v\} \oplus \underbrace{\mathrm{Vect}\{e_0, \cdots, e_w\}}_{=W^{\perp}}}_{=V^{\perp}},$$

avec en outre:

$$V \subset W \subset V \oplus \mathrm{Vect}\{e_{w+1}, \cdots, e_v\} = \overline{W}.$$

Nécessairement, par le théorème de complétion d'une base, quitte à modifier les premiers vecteurs de $\mathrm{Vect}\{e_{w+1}, \cdots, e_v\}$, W est de la forme:

$$W = V \oplus \mathrm{Vect}\{e_{w+1}, \cdots, e_k\} \quad \text{avec} \quad w + 1 \leq k \leq v$$

i.e. W est fermé. Donc $k = v$ et $\overline{W} = W$ est fermé, de codimension finie.

(b) D'après V.3.(a), $\dim \operatorname{Ker}(I+K_1) = \dim \operatorname{Ker}(S_1T) < +\infty$. Comme de plus $\operatorname{Ker}(T) \subset \operatorname{Ker}(S_1T)$, on en déduit que $\dim \operatorname{Ker}(T) < +\infty$. D'après V.3(b), $\operatorname{Im}(I + K_2) = \operatorname{Im}(TS_2)$ est fermé, de codimension finie d'après V.3.(d). D'après (a) appliqué avec $V = \operatorname{Im}(TS_2)$ et $W = \operatorname{Im}(T)$, on en déduit que $\operatorname{Im}(T)$ est fermé de codimension finie. Finalement, $T \in \mathcal{F}(H)$.

2. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^*$. On remarque que $T_1 = I$. De V.2.(b), on déduit que

$$T_\varphi T_{1/\varphi} - I \in \mathcal{K}(H^2) \quad \text{et} \quad T_{1/\varphi} T_\varphi - I \in \mathcal{K}(H^2).$$

De VI.1.(b) appliqué avec $T = T_\varphi$ et $S_1 = S_2 = T_{1/\varphi}$ on déduit que $T_\varphi \in \mathcal{F}(H^2)$.

3. On a: $ST - I = T_0^{-1}PT - I = T_0^{-1}T - I$, par définition de P. Comme $\operatorname{Ker}(T)$ est farmé, on a: $H = \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Ker}(T)^\perp$. Soit $x \in H$ et soit $x = x' + x'' \in \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Ker}(T)^\perp$ la décomposition de x. On a:

$$T_0^{-1}T(x) = T_0^{-1}T(x'') \underset{x'' \in \operatorname{Ker}(T)^\perp}{=} T_0^{-1}T_0(x'') = x'' \Rightarrow T_0^{-1}T(x) - x = -x' \in \operatorname{Ker}(T).$$

Il en résulte que $\operatorname{Im}(ST - I) \subset \operatorname{Ker}(T)$ avec $\dim \operatorname{Ker}(T) < +\infty$ par hypothèse sur T, donc $ST - I \in \mathcal{K}_0(H)$.

Par hypothèse sur T, $\operatorname{Im}(T)$ est fermé donc $H = \operatorname{Im}(T)^\perp \oplus \operatorname{Im}(T)$. On a: $TS - I = TT_0^{-1}P - I = T_0T_0^{-1}P - I = P - I$. Soit $x \in H$ et soit $x = x' + x'' \in \operatorname{Im}(T)^\perp \oplus \operatorname{Im}(T)$ la décomposition de x. On a:

$$Px = x'' \Rightarrow (P - I)(x) = -x' \in \operatorname{Im}(T)^\perp.$$

Par hypothèse sur T, $\operatorname{Im}(T)^\perp$ est de dimension finie égale à $\operatorname{codim}\operatorname{Im}(T)$, donc $\operatorname{Im}(TS - I) \subset \operatorname{Im}(T)^\perp$ est de diemension finie, i.e. $TS - I \in \mathcal{K}_0(H)$.

4. (a) On remarque que

$$\|SJ\| \leq \|S\|\|J\| < 1 \quad \text{et} \quad \|JS\| \leq \|J\|\|S\| < 1$$

ce qui entraîne que $I + SJ$ et $I + JS$ sont inversibles.

La calcul direct montre que nécessairement:

$$K' = (I + SJ)^{-1}K \quad \text{et} \quad L' = L(I + JS)^{-1}.$$

Comme $K \in \mathcal{K}_0(H)$, $\mathrm{Im}((I+SJ)^{-1}K)$ est de même dimension finie que $\mathrm{Im}(K)$, i.e. $K' \in \mathcal{K}_0(H)$.
De plus: $\mathrm{Im}(L') \subset \mathrm{Im}(L)$ donc $L' \in \mathcal{K}_0(H)$ par hypothèse sur L.
On en déduit:

$$(I+SJ)^{-1}S(T+J) - I = K' \in \mathcal{K}_0(H) \subset \mathcal{K}(H)$$

$$(T+J)S(I+JS)^{-1} - I = L' \in \mathcal{K}_0(H) \subset \mathcal{K}(H).$$

De 1.(b) appliqué avec $S_1 = (I+SJ)^{-1}S$ et $S_2 = S(I+JS)^{-1}$, on déduit que $T+J \in \mathcal{F}(H)$.

(b) Par hypothèse: $ST-I \in \mathcal{K}_0(H) \underset{V.1.(a)}{\subset} \mathcal{K}(H)$ et $TS_I \in \mathcal{K}_0(H) \underset{V.1.(a)}{\subset} \mathcal{K}(H)$. De 1.(b), on déduit que $S \in \mathcal{F}(H)$.
Il en résulte:

$$\mathrm{ind}(S(T+J)) \underset{i)}{=} \mathrm{ind}(S) + \mathrm{ind}(T+J) = \mathrm{ind}((I+SJ)(I+K'))$$

$$\underset{i)}{=} \mathrm{ind}(I+SJ) + \mathrm{ind}(I+K') = \mathrm{ind}(I+K') \underset{ii)}{=} 0$$

$\mathrm{ind}(ST) \underset{i)}{=} \mathrm{ind}(S) + \mathrm{ind}(T) = \mathrm{ind}(I+K) \underset{ii)}{=} 0.$

Finalement:

$$\mathrm{ind}(S)+\mathrm{ind}(T) = \mathrm{ind}(S)+\mathrm{ind}(T+J) = 0 \Rightarrow \mathrm{ind}(T) = \mathrm{ind}(T+J) = -\mathrm{ind}(S).$$

5. (a) Soit $f \in H^2$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Le calcul montre que:

$$e_n f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k-n) e_k$$

d'où on déduit:

$$Te_n(f) = \sum_{k \geq 0} \hat{f}(k-n) e_k.$$

Si $n \geq 0$, alors:

$$Te_n(f) = \sum_{k \geq n} \hat{f}(k-n) e_k,$$

donc:

$$\mathrm{Im}(T_{e_n})^{\perp} = \mathrm{Vect}\{e_k,\ 0 \leq k < n\} \Rightarrow \mathrm{codim}_{H^2}(T_{e_n}) = n.$$

De plus:

$$Te_n(f) = 0 \iff \hat{f}(k-n) = 0, \quad \forall k \geq n$$

i.e.: $\mathrm{Ker} T_{e_n} = \{0\}$, et finalement: $\mathrm{ind}(T_{e_n}) = 0 - n = -n$.
Si $n < 0$, alors

$$T_{e_n}(f) = \sum_{k \geq 0} \hat{f}(k-n) e_k,$$

donc $\mathrm{Im}(T_{e_n})^\perp = \{0\}$ et $\mathrm{codim}_{H^2}(T_{e_n}) = 0$. De plus:

$$T_{e_n}(f) = 0 \iff f = \sum_{0 \leq k < |n|} \hat{f}(k) e_k$$

donc $\dim \mathrm{Ker}(T_{e_n}) = |n| = -n$. Finalement: $\mathrm{ind}(T_{e_n}) = -n - 0 = -n$.
Dans tous les cas:

$$\mathrm{ind}(T_{e_n}) = -n \underset{II.3.(b)}{=} -\deg(e_n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}..$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. De II.4 et de 4.(b), on déduit:

$$\mathrm{ind}(T_\varphi) + \deg(\varphi) = \mathrm{ind}(T_{e_n}) + \deg(e_n) = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_n^*.$$

(b) Soit $\varphi \in \mathcal{C}^*$. On a: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$T_\varphi(e_n) = \sum_{k \geq 0} \hat{\varphi}(k-n) e_k.$$

Comme $(e_n)_{n \geq 0}$ et une base hilbertienne de H^2 et que $(k,n) \mapsto k - n$ est surjective de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$, on en déduit que $\mathrm{Im}(T_\varphi)^\perp = \{0\}$, i.e. $\mathrm{codim}_{H^2}(T_\varphi) = 0$.
De plus

$$\dim \mathrm{Ker}(T_\varphi) = \mathrm{ind}(T_\varphi) + \mathrm{codim}_{H^2}(T_\varphi) \underset{5.(a)}{=} -\deg(\varphi).$$

(c) Soit $\varphi \in \mathcal{C}$. De (b), on déduit que T_φ est inversible ssi $\deg(\varphi) = 0$.