Préparation
Année 2020–2021

Corrigé du problème d'Analyse de 2021

I. Questions préliminaires.

(I.0) On a

$$\forall n > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |h_n(x) - x| = \frac{1}{n}$$

donc

$$\forall n > 0, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |h_n(x) - x| = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

donc $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto h(x) = x$ répond à la question.

Par continuité de $x \mapsto x^2$, on en déduit que h_n^2 converge simplement vers h^2 sur $\mathbb{R}$.

On pose: $x_n = n$, $\forall n \geq 0$. Alors: $\forall n \geq 1$,

$$|h_n^2(x_n) - x_n^2| = \left|2 + \frac{1}{n^2}\right| \underset{n\to+\infty}{\to} 2 \neq 0$$

donc la convergence de $(h_n^2)_{n\geq 1}$ n'est pas unifurme sur $\mathbb{R}$.

On a:

$$\forall n > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leq |f_n(x) - f(x)||g_n(x)| + \\ +|f(x)||g_n(x) - g(x)|$$

avec

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| \leq |g_n(x) - g(x)| + |g(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| \leq C$$

où la suite de terme général $\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)|$ est bornée car convergente vers 0 par hypothèse et où $\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| < +\infty$ car $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ par hypothèse. De même $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < +\infty$ car $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ par hypothèse. Il en résulte qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de $n > 0$ t.q.:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| +$$

$$+C\sup_{x\in\mathbb{R}}|g_n(x)-g(x)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

(I.1) Soit $\alpha\in\mathbb{C}$ t.q. $a:=\mathrm{Re}(\alpha)>0$.

(I.1.a) Soit $f\in C_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et soit $t\in\mathbb{R}$. On a:

$$\int_0^\infty |e^{-\alpha s}f(t+s)|ds=\int_0^\infty e^{-as}|f(t+s)|ds\le\int_0^\infty e^{-as}ds\|f\|_\infty=\frac{1}{a}\|f\|_\infty$$

i.e. l'intégrale $K_\alpha(f)(t)$ est absolument convergente, donc convergente.

(I.1.b) De (I.1.a), on déduit que les applications $s\mapsto e^{-\alpha s}f(t_n+s)$, $n\ge 0$, et $s\mapsto e^{-\alpha s}f(t+s)$ sont mesurables sur $[0,+\infty[$. Par continuité de f, on a: $\forall s\in[0,+\infty[$,

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-\alpha s}f(t_n+s)=e^{-\alpha s}f(t+s)$$

avec

$$|e^{-\alpha s}f(t_n+s)|\le e^{-as}\|f\|_\infty \quad \text{et} \quad s\mapsto e^{-as}\in L^1(0,+\infty).$$

Du Théorème de convergence dominée, on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}K_\alpha(f)(t_n)=K_\alpha(f)(t).$$

(I.1.c) Pour tout $f\in C_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $K_\alpha(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ d'après (I.1.a) et $K_\alpha(f)\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$ d'après (I.1.b). De plus K_α est linéaire. Il reste à vérifer la continuité. On a:

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad |K_\alpha(f)(t)| \underset{(I.1.a)}{\le} \frac{1}{a}\|f\|_\infty \Rightarrow \|K_\alpha(f)\|_\infty\le\frac{1}{a}\|f\|_\infty$$

On en déduit que K_α est continue de $(C_b(\mathbb{R},\mathbb{C}),\|\cdot\|_\infty)$ dans $(C_b(\mathbb{R},\mathbb{C}),\|\cdot\|_\infty)$.

(I.1.d) De (I.1.c), on déduit que

$$\inf\{c\in\mathbb{R},\ \|K_\alpha(f)\|_\infty\le c\|f\|_\infty\}\le\frac{1}{a}.$$

On pose $\alpha=a+ib$. On remarque que: $\forall t\in\mathbb{R}$,

$$|K_\alpha(\mathrm{e}_b)(t)|=|\int_0^{+\infty}e^{-as}ds|=\frac{1}{a}$$

donc

$$\inf\{c\in\mathbb{R},\ \|K_\alpha(f)\|_\infty\le c\|f\|_\infty\}=\frac{1}{a}.$$

(I.2) Soit $\beta \in \mathbb{C}$ et soit $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

(I.2.a) L'équation différentielle $(E_{\beta,f})$ est linéaire en y et du premier ordre. D'après la théorie, l'équation homogène associée de solution z s'écrit:

$$z' = \beta z$$

et admet la solution générale définie sur $\mathbb{R}$: $t \mapsto z(t) = Ke^{\beta t}$ où $K \in \mathbb{C}$ est une constante. On cherche la solution générale de l'équation complète $(E_{\beta,f})$ sous la forme

$$y(t) = K(t)e^{\beta t}$$

où la fonction K est à déterminer. Par identification dans $(E_{\beta,f})$, on vérife que K est solution de $K'(t) = e^{-\beta t} f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. On en déduit: $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$K(t) = K_0 + \int_0^t e^{-\beta s} f(s) ds$$

où $K_0 \in \mathbb{C}$ est une constante indépendante de $t \in \mathbb{R}$. En reportant dans $y(t)$, on en déduit que la solution générale de $(E_{\beta,f})$ s'écrit:

$$y(t) = K_0 e^{\beta t} + \int_0^t e^{\beta(t-s)} f(s) ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale $y(0) = z_0$ impose: $K_0 = z_0$ et on en déduit l'unique solution:

$$y(t) = z_0 e^{\beta t} + \int_0^t e^{\beta(t-s)} f(s) ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(I.2.b) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soit $t \geq t_0$. On poe $\beta = b + ib'$. On a

$$e^{-\beta t} y(t) - e^{-\beta t_0} y(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-\beta s} f(s) ds$$

avec

$$\int_{t_0}^{+\infty} |e^{-\beta s} f(s)| ds = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-bs} |f(s)| ds \leq \int_{t_0}^{+\infty} e^{-bs} ds \|f\|_\infty =$$

$$= \frac{e^{-bt_0}}{b}\|f\|_\infty < +\infty.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} e^{-\beta s} f(s)ds$ est absolument convergente donc convergente. Par définition:

$$\int_{t_0}^{+\infty} e^{-\beta s} f(s)ds = \lim_{t\to+\infty} \int_{t_0}^{t} e^{-\beta s} f(s)ds = \ell - e^{-\beta t_0} y(t_0),$$

i.e.:

$$y(t_0) = e^{\beta t_0}\ell - K_\beta(f)(t_0).$$

(I.2.c) De (I.2.b), on déduit que la solution générale de $(E_{\beta,f})$ se réécrit:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = e^{\beta t}\ell - K_\beta(f)(t)$$

avec $\ell = \lim_{t\to+\infty} e^{-\beta t} y(t)$. On remarque que

$$\mathrm{Re}(\beta) > 0 \underset{(I.1.c)}{\Rightarrow} K_\beta(f) \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

et

$$b := \mathrm{Re}(\beta) > 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} |e^{\beta t}| = \lim_{t\to+\infty} |e^{bt}| = +\infty.$$

Donc $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est bornée ssi $\ell = 0$, i.e. ssi $y = -K_\beta(f)$.

(I.2.d) On suppose que $b = \mathrm{Re}(\beta) < 0$. On remarque que y est solution de $(E_{\beta,f})$ ssi $\check{y} : t \mapsto y(-t)$ est solution de $(E_{-\beta,-\check{f}})$ où $\check{f} : t \mapsto f(-t)$ est aussi dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ i.e.:

$$y = -K_\beta(f) \iff \check{y} = K_{-\beta}(\check{f})$$

soit:

$$y(t) = K_{-\beta}(\check{f})(-t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(I.2.e) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après (I.2.a), $(E_{i\lambda,\mathrm{e}_\lambda})$ admet pour solution générale;

$$t \mapsto y(t) = z_0 e^{i\lambda t} + \int_0^t e^{i\lambda(t-s)} e^{i\lambda s} ds = e^{i\lambda t}(z_0 + t)$$

qui n'est pas bornée dans $\mathbb{R}$.

(I.3)

(I.3.a) Soit $S \subset D_p$ fini. On a: $a_j \geq 0$, $\forall j \in J \Rightarrow$

$$\sharp S 2^{-p} \leq \sum_{j \in S} a_j \leq \sum_{j \in J} a_j < +\infty$$

donc

$$\sharp S \leq 2^p \sum_{j \in J} a_j < +\infty.$$

Ceci étant vrai pour toute partie finie $S \subset D_p$, on en déduit que D_p est fini et que:

$$\sharp D_p \leq 2^p \sum_{j \in J} a_j < +\infty.$$

En effet, si D_p est infini, soit $S \subset D_p$ une partie finie. Alors

$$\sharp S \leq 2^p \lfloor \sum_{j \in J} a_j \rfloor < +\infty$$

On pose $n = \lfloor \sum_{j \in J} a_j \rfloor$, $r = \sharp S$. Comme D_p est infini, on construit par récurrence $\{j_1, \cdots, j_{n-r+1}\} \subset D_p \setminus S$. Alors $S' := S \cup \{j_1, \cdots, j_{n-r+1}\} \subset D_p$ et $\sharp S' = n + 1 > 2^p \sum_{j \in J} a_j$. Contradiction.

(I.3.b) On remarque que $D = \cup_{p \geq 0} D_p$ est réunion dénombrable d'ensembles finis donc est dénombrable.

(I.3.c) Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence, il existe une partie finie $S_\varepsilon \subset J$ t.q. $0 \leq \sum_{j \in J \setminus S_\varepsilon} a_j < \varepsilon$. Comme D est infini et S_ε est fini, il existe $n_0 > 0$ t.q. $j(n) \notin S_\varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Sinon, on pourrait construire une suite croissante $n_k \nearrow +\infty$ t.q. $a_{j(n_k)} \in S_\varepsilon$, $\forall k \geq 0$, ce qui contredit S_ε fini. Il en résulte que

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq \sum_{k \geq n} a_{j(k)} \leq \sum_{k \geq n_0} a_{j(k)} \leq \sum_{j \in J \setminus S_\varepsilon} a_j < \varepsilon.$$

On en déduit que la suite $(s_n)_{n \geq 0}$ est convergente vers

$$\sum_{k \geq 0} a_{j(k)} = \sum_{j \in D} a_j = \sum_{j \in J} a_j.$$

(I.4)

(I.4.a) On suppose qu'il existe deux applications Λ_1, Λ_2 satisfaisant (P). Soit $f \in H$. Comme $H = \overline{H}_0$, il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0} \in H_0^{\mathbb{N}}$ t.q. $\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\| = 0$. Alors:

$$\forall n \geq 0, \quad \Lambda_1(f_n) = \Lambda_2(f_n).$$

Par hypothèse (P), Λ_1 et Λ_2 sont continues sur H, donc

$$\Lambda_1(f) = \lim_{n\to+\infty} \Lambda_1(f_n) = \lim_{n\to+\infty} \Lambda_2(f_n) = \Lambda_2(f),$$

i.e. $\Lambda_1 = \Lambda_2$.

(I.4.b) Par linéarité de ℓ: $\forall n, p \geq 0$,

$$|\ell(f_{n+p}) - \ell(f_n)| = |\ell(f_{n+p} - f_n)| \leq \|f_{n+p} - f_n)\|$$

donc la suite $(\ell(f_n))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, i.e. convergente puisque $\mathbb{C}$ est complet.

(I.4.c) D'après (I.4b), les suites $(\ell(f_n))_{n\geq 0}$ et $(\ell(g_n))_{n\geq 0}$ sont convergentes. D'autre part, la linéarité de ℓ entraîne:

$$\forall n \geq 0, \quad |\ell(f_n) - \ell(g_n)| = |\ell(f_n - g_n)| \leq \|f_n - g_n\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

i.e. les suites $(\ell(f_n))_{n\geq 0}$ et $(\ell(g_n))_{n\geq 0}$ sont convergentes vers une même limite notée $\Lambda(f)$.

(I.4.d) Soit $f, g \in H$ et soit $(f_n)_{n\geq 0} \in H_0^{\mathbb{N}}$, resp. $(g_n)_{n\geq 0} \in H_0^{\mathbb{N}}$, t.q. $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$, resp. $\lim_{n\to+\infty} \|g_n - g\| = 0$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Par définition de Λ:

$$\Lambda(\lambda f + \mu g) = \lim_{n\to+\infty} \ell(\lambda f_n + \mu g_n)$$

avec, par linéarité de ℓ:

$$\forall n \geq 0, \quad \ell(\lambda f_n + \mu g_n) = \lambda \ell(f_n) + \mu \ell(g_n).$$

où les suites $(\ell(f_n))_{n\geq 0}$ et $(\ell(g_n))_{n\geq 0}$ sont convergentes vers $\Lambda(f)$ et $\Lambda(g)$ resp. Donc

$$\Lambda(\lambda f + \mu g) = \lim_{n\to+\infty} (\lambda \ell(f_n) + \mu \ell(g_n)) = \lambda \lim_{n\to+\infty} \ell(f_n) + \mu \lim_{n\to+\infty} \ell(g_n) =$$

$$= \lambda\Lambda(f) + \mu\Lambda(g),$$

i.e. Λ est $\mathbb{C}$-linéaire.

Soit $f \in H_0$. De (I.4.c) appliqué avec la suite constante de terme général $f_n = f$, $n \geq 0$, on déduit que $\Lambda(f) = \ell(f)$.

Soit $f \in H$ et soit $(f_n)_{n\geq 0} \in H_0^{\mathbb{N}}$ t.q. $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$. Par définition de Λ: $\Lambda(f) = \lim_{n\to+\infty} \ell(f_n)$ avec, par hypothèse sur ℓ:

$$\forall n \geq 0, \quad |\ell(f_n)| \leq \|f_n\|$$

avec $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\| = \|f\|$ par contnuité de lanorme sur H. Il en résulte:

$$|\Lambda(f)| = \lim_{n\to+\infty} |\ell(f_n)| \leq \lim_{n\to+\infty} \|f_n\| = \|f\|.$$

Donc Λ satisfait (P).

II. Polynômes trigonométriques généralisés.

(II.1) $\mathcal{P}$ est un sev de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ comme ensemble de combinaisons $\mathbb{C}$-linéaires finies des applications e_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, qui sont des éléments de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Soit $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On a:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}_\lambda(\cdot + b) = e^{i\lambda b}\mathrm{e}_\lambda \in \mathcal{P} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}_\lambda(b\cdot) = e_{b\lambda} \in \mathcal{P}$$

donc, $\mathcal{P}$ étant stable par combinaisons linéaires on en déduit que:

$$\forall f \in \mathcal{P}, \quad \forall b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f(\cdot + b) \in \mathcal{P} \quad \text{et} \quad f(b\cdot) \in \mathcal{P}.$$

De plus:

$$\forall \, \mu \in \mathbb{R}, \quad \overline{e}_\lambda \mathrm{e}_\mu = e_{\mu-\lambda} \in \mathcal{P}$$

donc

$$\forall f, g \in \mathcal{P}, \quad \overline{f}g \in \mathcal{P}$$

(II.2) Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété: pour toute famille $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ de n réels distincts, la famille $\{\mathrm{e}_{\lambda_1}, \cdots, \mathrm{e}_{\lambda_n}\}$ est libre. Alors $\mathcal{P}(1)$ est vraie du fait que e_λ n'est pas constante, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit

$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}\}$ une famille de $n+1$ réels distincts et soit $\alpha \in \mathbb{C}^{n+1}$ t.q. $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \mathrm{e}_{\lambda_k} = 0$. Alors:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{e}_{\lambda_k - \lambda_{n+1}} + \alpha_{n+1} = 0$$

et par dérivation on en déduit que:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{n+1}) \mathrm{e}_{\lambda_k - \lambda_{n+1}} = 0.$$

Par hypothèse, $\lambda_k - \lambda_{n+1} \neq \lambda_r - \lambda_{n+1}$, $\forall k \neq r$, donc l'hypothèse de récurrence entraîne:

$$\alpha_k (\lambda_k - \lambda_{n+1}) = 0, \quad \forall k \in [[1, n]]$$

avec $\lambda_k - \lambda_{n+1} \neq 0$, $\forall k \in [[1, n]]$, donc $\alpha_k = 0$, $\forall k \in [[1, n]]$. Il en résulte: $\alpha_{n+1} \mathrm{e}_{\lambda_{n+1}} = 0$, i.e. $\alpha_{n+1} = 0$, car $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Finalement, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, et par récurrence sur $n \geq 1$, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie $\forall n \geq 1$.

On en déduit que toute combinaison linéaire nulle d'une famille finie extraite de $(\mathrm{e}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ a ses coefficients nuls dans $\mathbb{C}$, i.e. que $(\mathrm{e}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est une base du $\mathbb{C}$-ev $\mathcal{P}$.

(II.3) Soit $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

(II.3.a) Soit $f, g \in \mathcal{P}$ et soit α, $\beta \in \mathbb{C}$. Par définition:

$$\alpha g + \beta g = \sum_{\lambda \in Sp(\alpha f + \beta g)} a(\alpha f + \beta g, \lambda) \mathrm{e}_\lambda$$

et on vérifie immédiatement que $Sp(f)^c \cap Sp(g)^c \subset Sp(\alpha f + \beta g)^c$, i.e. $Sp(\alpha f + \beta g) \subset Sp(f) \cup Sp(g)$. On en déduit, par définition de $Sp(\alpha f + \beta g)$:

$$\alpha g + \beta g = \sum_{\lambda \in Sp(f) \cup Sp(g)} a(\alpha f + \beta g, \lambda) \mathrm{e}_\lambda.$$

D'autre part:

$$\alpha g + \beta g = \alpha \sum_{\lambda \in Sp(f)} a(f, \lambda) \mathrm{e}_\lambda + \beta \sum_{\lambda \in Sp(g)} a(g, \lambda) \mathrm{e}_\lambda =$$

$$= \alpha \sum_{\lambda \in Sp(f)\cup Sp(g)} a(f,\lambda)\mathrm{e}_\lambda + \beta \sum_{\lambda \in Sp(f)\cup Sp(g)} a(g,\lambda)\mathrm{e}_\lambda$$
$$= \sum_{\lambda \in Sp(f)\cup Sp(g)} (\alpha a(f,\lambda) + \beta a(g,\lambda))\mathrm{e}_\lambda$$

car $Sp(f) \cup Sp(g)$ est fini, i.e. compte tenu de ce qui précède:

$$\alpha g + \beta g = \sum_{\lambda \in Sp(f)\cup Sp(g)} a(\alpha f + \beta g,\lambda)\mathrm{e}_\lambda = \sum_{\lambda \in Sp(f)\cup Sp(g)} (\alpha a(f,\lambda) + \beta a(g,\lambda))\mathrm{e}_\lambda.$$

Comme $(\mathrm{e}_\lambda)_{\in \mathbb{R}}$ est une base de $\mathcal{P}$, on peut identifier composante par composante:

$$\forall \lambda \in Sp(f) \cup Sp(g), \quad a(\alpha f + \beta g, \lambda) = \alpha a(f,\lambda) + \beta a(g,\lambda)$$

i.e, en rappelant que $Sp(\alpha f + \beta g) \subset Sp(f) \cup Sp(g)$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad a(\alpha f + \beta g, \lambda) = \alpha a(f,\lambda) + \beta a(g,\lambda),$$

ce qui montre que $f \in \mathcal{P} \mapsto a(f,\lambda)$ est $\mathbb{C}$-linéaire, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(II.3.b) Soit $f \in \mathcal{P}$. On a:

$$\overline{f} = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \overline{a(f,\lambda)}\,\overline{\mathrm{e}_\lambda}$$

avec

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \overline{\mathrm{e}_\lambda} = \mathrm{e}_{-\lambda} \Rightarrow \overline{f} = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \overline{a(f,\lambda)}\mathrm{e}_{-\lambda} = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \overline{a(f,-\lambda)}\mathrm{e}_\lambda$$

par symétrie de $\mathbb{R}$. Il en résulte:

$$\forall f \in \mathcal{P}, \quad a(\overline{f}, \lambda_0) = \overline{a(f,-\lambda_0)}.$$

Soit $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et soit $f \in \mathcal{P}$. On a:

$$f(\cdot + b) = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} a(f,\lambda) e_\lambda(\cdot + b)$$

avec:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad e_\lambda(t+b) = e^{i\lambda(b+t)} = e^{i\lambda b}\mathrm{e}_\lambda(t)$$

donc

$$f(\cdot+b)=\sum_{\lambda\in\mathbb{R}}a(f,\lambda)e^{i\lambda b}e_\lambda \Rightarrow \forall\lambda\in\mathbb{R},\quad a(f(\cdot+b),\lambda)=a(f,\lambda)e^{i\lambda b}$$

On en déduit:

$$\forall f\in\mathcal{P},\quad a(f(\cdot+b),\lambda_0)=a(f,\lambda_0)e^{i\lambda_0 b}$$

Soit $k\in\mathbb{N}$ soit $f\in\mathcal{P}$. On a:

$$f^{(k)}=\sum_{\lambda\in\mathbb{R}}a(f,\lambda)e_\lambda^{(k)}=\sum_{\lambda\in\mathbb{R}}a(f,\lambda)(i\lambda)^k e_\lambda \Rightarrow \forall\lambda\in\mathbb{R},\quad a(f^{(k)},\lambda)=(i\lambda)^k a(f,\lambda).$$

On en déduit:

$$\forall f\in\mathcal{P},\quad a(f^{(k)},\lambda_0)=(i\lambda_0)^k a(f,\lambda_0).$$

Soit $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et soit $f\in\mathcal{P}$. On a:

$$f(b\cdot)=\sum_{\lambda\in\mathbb{R}}a(f,\lambda)e_\lambda(b\cdot)$$

avec:

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \forall\lambda\in\mathbb{R},\quad e_\lambda(bt)=e^{i\lambda bt}=\mathrm{e}_{b\lambda}(t)$$

donc

$$f(b\cdot)=\sum_{\lambda\in\mathbb{R}}a(f,\lambda)\mathrm{e}_{b\lambda}\underset{\lambda'=\lambda b}{=}\sum_{\lambda'\in\mathbb{R}}a(f,\lambda'/b)\mathrm{e}_{\lambda'}$$

car $\lambda\mapsto b\lambda$ est une bijection de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ d'inverse $\lambda\mapsto\lambda/b$. On en déduit:

$$f(b\cdot)=\sum_{\lambda\in\mathbb{R}}a(f,\lambda/b)\mathrm{e}_\lambda \Rightarrow \forall\lambda\in\mathbb{R},\quad a(f(b\cdot),\lambda)=a(f,\lambda/b).$$

On en déduit:

$$\forall f\in\mathcal{P},\quad a(f(b\cdot),\lambda_0)=a(f,\lambda_0/b).$$

(II.3.c) On remarque que $(f,g)\mapsto\overline{f}g$ est une application sesquilinéaire de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$. La linéarité de $f\mapsto a(f,0)$ entraîne que $(f,g)\mapsto$

$a(\overline{f}g,0)$ est une forme sesquilinéaire hermitienne sur $\mathcal{P}$. On en déduit: $\forall f,g\in\mathcal{P}$,

$$a(\overline{f}g,0)=\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}}\overline{a(f,\lambda)}a(g,\mu)a(\overline{\mathrm{e}_\lambda}\mathrm{e}_\mu,0)\underset{(II.3.b)}{=}\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}}\overline{a(f,\lambda)}a(g,\mu)a(\mathrm{e}_{\mu-\lambda},0)$$

$$=\sum_{\lambda\in\mathbb{R}}\overline{a(f,\lambda)}a(g,\lambda)$$

et en particulier:

$$a(|f|^2,0)=\sum_{\lambda\in\mathbb{R}}\overline{a(f,\lambda)}a(f,\lambda)=\sum_{\lambda\in\mathbb{R}}|a(f,\lambda)|^2\in\mathbb{R}^+.$$

Il en résulte: $\forall f\in\mathcal{P}$,

$$a(|f|^2,0)=0\iff\forall\lambda\in\mathbb{R},\quad a(f,\lambda)=0\iff f=0.$$

Donc $(f,g)\mapsto a(\overline{f}g,0)=:\langle f,g\rangle$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathcal{P}$.

(II.3.d) Soit $\lambda\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et soit $n\geq 1$. On a:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}_\lambda(k)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\lambda k}=\frac{1}{n}\frac{1-e^{i\lambda n}}{1-e^{i\lambda}}=\frac{e^{i\frac{n\lambda}{2}}}{ne^{i\frac{\lambda}{2}}}\frac{\sin(\frac{n\lambda}{2})}{\sin(\frac{\lambda}{2})}=\frac{1}{n}e^{i\frac{(n-1)\lambda}{2}}\frac{\sin(\frac{n\lambda}{2})}{\sin(\frac{\lambda}{2})}$$

Si $\lambda\in 2\pi\mathbb{Z}$, soit $\lambda=2\pi p$ avec $p\in\mathbb{Z}$, alors

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathrm{e}_\lambda(k)=e^{2ikp\pi}=1\Rightarrow\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}_\lambda(k)=1.$$

(II.3.e) Soit $n\geq 1$. On a:

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad f(\cdot+k)=\sum_{\lambda\in Sp(f)}e^{ik\lambda}a(f,\lambda)\mathrm{e}_\lambda$$

$$\Rightarrow g_n=\sum_{\lambda\in Sp(f)}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}_\lambda(k)a(f,\lambda)\mathrm{e}_\lambda$$

la double somme étant bien définie puisque finie. Il en résulte:

$$g_n=\sum_{\lambda\in Sp(f)\setminus 2\pi\mathbb{Z}}\frac{1}{n}e^{i\frac{(n-1)\lambda}{2}}\frac{\sin(\frac{n\lambda}{2})}{\sin(\frac{\lambda}{2})}a(f,\lambda)\mathrm{e}_\lambda+\sum_{\lambda\in Sp(f)\cap 2\pi\mathbb{Z}}a(f,\lambda)\mathrm{e}_\lambda.$$

Soit $\lambda \in Sp(f) \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On a:

$$\left| \frac{1}{n} e^{i\frac{(n-1)\lambda}{2}} \frac{\sin(\frac{n\lambda}{2})}{\sin(\frac{\lambda}{2})} \right| \leq \frac{1}{n \sin(\frac{\lambda}{2})} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $\lambda \in Sp(f) \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, il existe $n_\lambda > 0$ t.q.:

$$\forall n \geq n_\lambda, \quad \frac{1}{n \sin(\frac{\lambda}{2})} \leq \varepsilon.$$

On pose $N = \max_{\lambda \in Sp(f) \setminus 2\pi\mathbb{Z}} n_\lambda$. Alors

$$\forall n \geq N, \quad \left\| \sum_{\lambda \in Sp(f) \setminus 2\pi\mathbb{Z}} \frac{1}{n} e^{i\frac{(n-1)\lambda}{2}} \frac{\sin(\frac{n\lambda}{2})}{\sin(\frac{\lambda}{2})} a(f,\lambda) \mathrm{e}_\lambda \right\|_\infty \leq \sharp Sp(f) \varepsilon$$

i.e.:

$$\forall n \geq N, \quad \|g_n - \sum_{\lambda \in Sp(f) \cap 2\pi\mathbb{Z}} a(f,\lambda)\mathrm{e}_\lambda\|_\infty \leq \sharp Sp(f)\varepsilon.$$

Donc la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\sum_{\lambda \in Sp(f)\cap 2\pi\mathbb{Z}} a(f,\lambda)\mathrm{e}_\lambda$.

(II.3.f) Soit $f \in \mathcal{P}$. Si $Sp(f) \subset 2\pi/Z$, alors

$$f = \sum_{\lambda \in 2\pi\mathbb{Z}} a(f,\lambda)\mathrm{e}_\lambda.$$

Il en résulte:

$$f(\cdot + 1) = \sum_{\lambda \in 2\pi\mathbb{Z}} a(f,\lambda) e^{i\lambda} \mathrm{e}_\lambda$$

avec

$$\forall \lambda \in 2\pi\mathbb{Z}, \quad e^{i\lambda} = 1 \Rightarrow f(\cdot + 1) = f$$

i.e. f est 1-périodique.

Inversement, on suppose que f est 1-périodique. Alors: $\forall k \in \mathbb{N}$, $f(\cdot + k) = f$ et avec les notations de (II.3.e): $g_n = f$. Il en résulte que

$$f = \sum_{\lambda \in Sp(f)\cap 2\pi\mathbb{Z}} a(f,\lambda)\mathrm{e}_\lambda = \sum_{\lambda \in Sp(f)} a(f,\lambda)\mathrm{e}_\lambda$$

Comme $(\mathrm{e}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est une base de $\mathcal{P}$, il en résulte

$$\forall\lambda \in Sp(f)\setminus 2\pi\mathbb{Z},\quad a(f,\lambda)=0$$

i.e. $Sp(f)\setminus 2\pi\mathbb{Z}=\emptyset$ et $Sp(f)\subset 2\pi\mathbb{Z}$.
Soit $r>0$. Alors f est r-périodique ssi $f(r\cdot)$ est 1-périodique, i.e. ssi $Sp(f(r\cdot))\subset 2\pi\mathbb{Z}$. On a:

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\quad a(f(r\cdot),\lambda)=a(f,\lambda/r)$$

donc

$$a(f(r\cdot),\lambda)=0 \iff \lambda/r\in Sp(f)^c$$
$$\lambda/r\in Sp(f) \iff \lambda\in rSp(f)\Rightarrow Sp(f(r\cdot))=rSp(f)$$

donc

$$Sp(f(r\cdot))\subset 2\pi\mathbb{Z} \iff Sp(f)\subset 2\pi r^{-1}\mathbb{Z}.$$

(II.4) Soit $r>0$.

(II.4.a) La linéarité de L est immédiate. Soit $f\in\mathcal{P}$. On a:

$$f(\cdot+r)=\sum_{\lambda\in\mathbb{R}}a(f,\lambda)\mathrm{e}_\lambda(\cdot+r)=\sum_{\lambda\in\mathbb{R}}a(f,\lambda)e^{i\lambda r}\mathrm{e}_\lambda\in\mathcal{P}$$

donc Lf est dans $\mathcal{P}$ comme différence de deux éléments de $\mathcal{P}$. Il en résulte que L est un endomorphisme de $\mathcal{P}$.

(II.4.b) On a

$$f\in\mathrm{Ker}(L) \iff f(\cdot+r)=f \iff f\quad \text{est } r\text{-périodique}$$

$$\underset{(II.3.f)}{\iff} Sp(f)\subset 2\pi r^{-1}\mathbb{Z}$$

(II.4.c) Soit $f\in\mathcal{P}$. On a:

$$Lf=\sum_{\lambda\in Sp(f)}(e^{i\lambda r}-1)a(f,\lambda)\mathrm{e}_\lambda$$

donc

$$\forall\lambda\in 2\pi r^{-1}\mathbb{Z},\quad e^{i\lambda r}=1\Rightarrow a(Lf,\lambda)=0$$

donc $2\pi r^{-1}\mathbb{Z}\subset Sp(Lf)^c$, i.e. $Sp(f)\cap 2\pi r^{-1}\mathbb{Z}=\emptyset$.

Inversement, soit $f \in \mathcal{P}$ t.q. $Sp(f) \cap 2\pi r^{-1}\mathbb{Z} = \emptyset$. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{P}$ t.q. $Lg = f$. Alors:

$$a(f,\lambda) = (e^{i\lambda r} - 1)a(g,\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

On en déduit:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad a(f,\lambda) = 0 \iff \lambda \in 2\pi r^{-1}\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad a(g,\lambda) = 0$$

et $Sp(f) \cap 2\pi r^{-1}\mathbb{Z} = \emptyset \Rightarrow$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad a(f,\lambda) = 0 \iff a(g,\lambda) = 0$$

i.e. $Sp(g) = Sp(f)$. Il en résulte:

$$Lg = f \iff g = \sum_{\lambda \in Sp(f)} \frac{a(f,\lambda)}{(e^{i\lambda r} - 1)} \mathrm{e}_\lambda$$

Finalement:

$$\mathrm{Im}(L) = \{f \in \mathcal{P},\ Sp(f) \cap 2\pi r^{-1}\mathbb{Z} = \emptyset\}.$$

(II.5) Soit $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap]0, +\infty[$. Soit $c_0, c_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ t.q. $|c_1| \leq |c_0|$. On pose $f = c_0 \mathrm{e}_{2\pi} + c_1 \mathrm{e}_{2\pi\varphi}$.

(II.5.a) Comme $\varphi \notin \mathbb{Q}$, la famille $(\mathrm{e}_{2\pi}, \mathrm{e}_{2\pi\varphi})$ est libre dans $\mathcal{P}$. On en déduit que $f \in \mathcal{P}$ et $Sp(f) = \{2\pi, 2\pi\varphi\}$.

On suppose qu'il existe $r > 0$ t.q. $Sp(f) \subset 2\pi r^{-1}\mathbb{Z}$. Alors, il existe $k, p \in \mathbb{Z}$ t.q.

$$2\pi = 2\pi k \quad \text{et} \quad 2\pi\varphi = 2\pi p.$$

On en déduit: $2\pi k\varphi = 2\pi p$, i.e. $k\varphi = p$, en contradiction avec $\varphi \notin \mathbb{Q}$.

De (II.3.f), on déduit que $f \in \mathcal{P}$ n'est pas périodique.

(II.5.b) Soit $t \in [0,1]$ et soit $s \in G$. Par définition de G, il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ t.q.:$s = m + n\varphi$. On a:

$$e^{2i\pi s} = e^{2i\pi(m+n\varphi)} = e^{2i\pi n\varphi}$$

$$\Rightarrow c_0e^{2i\pi t}+c_1e^{2i\pi\varphi t}e^{2i\pi s}=c_0e^{2i\pi t}+c_1e^{2i\pi\varphi t}e^{2i\pi n\varphi}=$$
$$=c_0e^{2i\pi t}+c_1e^{2i\pi\varphi(t+n)}=c_0\mathrm{e}_{2\pi}(t)+c_1\mathrm{e}_{2\pi\varphi}(t+n)$$
$$=f(t+n)$$

car $\mathrm{e}_{2\pi}(t+n)=e^{2i\pi(t+n)}=e^{2i\pi t}=\mathrm{e}_{2\pi}(t)$. Donc $c_0e^{2i\pi t}+c_1e^{2i\pi\varphi t}e^{2i\pi s}\in A$.

On vérifie immédiatement que G est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $r>0$ t.q.: $G=r\mathbb{Z}$. Alors il existe $k,p\in\mathbb{Z}$ t.q. $1=kr$ et $\varphi=pr$. On en déduit: $kr\varphi=pr$ et $r\neq 0\Rightarrow k\varphi=p$ en contradiction avec $\varphi\notin\mathbb{Q}$. Donc G est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$.

(II.5.c) Soit $t,s\in[0,1]$ et soit $\varepsilon>0$.On pose:

$$c_0=|c_0|e^{2i\pi\alpha},\quad c_1=|c_1|e^{2i\pi\beta}$$

On a:

$$|c_0|e^{2i\pi t}+|c_1|e^{2i\pi s}=c_0e^{2i\pi(t-\alpha)}+c_1e^{2i\pi(s-\beta)}.$$

Soit $k=\lfloor t-\alpha\rfloor$. Alors $k\in\mathbb{Z}$ et $k\leq t-\alpha<k+1$. On pose $t'=t-\alpha-k$. Alors $t'\in[0,1]$ et

$$|c_0|e^{2i\pi t}+|c_1|e^{2i\pi s}=c_0e^{2i\pi t'}+c_1e^{2i\pi(s-\beta)}=c_0e^{2i\pi t'}+c_1e^{2i\pi(\varphi t'+s-\beta-\varphi t')}.$$

Par densité de G dans $\mathbb{R}$, il existe $m,n\in\mathbb{Z}$ t.q.

$$|s-\beta-\varphi t'-m-n\varphi|<\varepsilon.$$

On en déduit:

$$|c_0|e^{2i\pi t}+|c_1|e^{2i\pi s}=c_0e^{2i\pi t'}+c_1e^{2i\pi(\varphi t'+m+n\varphi+O(\varepsilon))}=$$
$$=c_0e^{2i\pi t'}+c_1e^{2i\pi\varphi t'}e^{2i\pi n\varphi}(1+O(\varepsilon))$$

avec $c_0e^{2i\pi t'}+c_1e^{2i\pi\varphi t'}e^{2i\pi n\varphi}\in A$ d'après (II.5.b) et $|c_1e^{2i\pi\varphi t'}e^{2i\pi n\varphi}=|c_1|\leq|c_0|$ borné indépendamment de $t,s\in[0,1]$. En prenant $\varepsilon>0$ arbitrairement petit on en déduit que $|c_0|e^{2i\pi t}+|c_1|e^{2i\pi s}\in\overline{A}=A$, i.e. $B\subset A$.

(II.5.d) L'anneau D est caractérisé par son cercle médian $|z| = |c_0|$ et son diamètre $2|c_1|$.

Le cercle C est caractérisé par son centre le point $|c_0|$ sur l'axe réel et sont rayon $|c_1|$. Il est contenu dans D et tangeant à D aux points $|c_0| \pm |c_1|$ sur l'axe réel.

Soit $z_0 \in B$ et soit z_1 un point sur le cercle centré en 0 de rayon $|z_0|$. Alors il existe $\theta \in [0,1]$ t.q. $z_1 = z_0 e^{2i\pi\theta}$. Par définition de B, il existe $s, t \in [0,1]$ t.q. $z_0 = |c_0|e^{2i\pi t} + |c_1|e^{2i\pi s}$. On en déduit:

$$z_1 = |c_0|e^{2i\pi(t+\theta)} + |c_1|e^{2i\pi(s+\theta)} = |c_0|e^{2i\pi\{t+\theta\}} + |c_1|e^{2i\pi\{s+\theta\}}$$

où on a posé:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \{x\} := x - \lfloor x \rfloor.$$

Par construction: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{x\} \in [0,1[$, donc en utilisant la définition de B, on en déduit que $z_1 \in B$.

On remarque que

$$C = \{z \in B, \quad t = 0\} \subset B.$$

Soit $z \in D$ et soit $r = |z|$. Il existe deux points $z^\pm \in C$ t.q. $|z^\pm| = r$. En effet: $\forall s \in \mathbb{R}$,

$$||c_0| + |c_1|e^{2i\pi s}| = r \iff |c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_0||c_1|\cos(s) = r^2 \iff$$

$$\iff \cos(s) = \frac{r^2 - |c_0|^2 + |c_1|^2}{2|c_0||c_1|}.$$

L'équation obtenue admet au moins une solution $t \in [0, 2\pi]$ car

$$\frac{r^2 - |c_0|^2 + |c_1|^2}{2|c_0||c_1|} + 1 = \frac{r^2 - |c_0|^2 + |c_1|^2 + 2|c_0||c_1|}{2|c_0||c_1|} = \frac{r^2 - (|c_0| - |c_1|)^2}{2|c_0||c_1|} \geq 0$$

et

$$\frac{r^2 - |c_0|^2 + |c_1|^2}{2|c_0||c_1|} - 1 = \frac{r^2 - |c_0|^2 + |c_1|^2 - 2|c_0||c_1|}{2|c_0||c_1|} = \frac{r^2 - (|c_0| + |c_1|)^2}{2|c_0||c_1|} \leq 0$$

et $s \mapsto \cos(s)$ est une bijection de $[0, \pi] \subset [0, 2\pi] \to [-1, 1]$. La parité de $s \mapsto \cos(s)$ entraîne qu'il y a exactement deux solutions $s^\pm \in [-\pi, \pi]$. On pose:

$$z^\pm = |c_0| + |c_1|e^{2i\pi s^\pm}$$

De ce qui précède on déduit que:

$$z^{\pm} \in C \subset B \quad \text{et} \quad |z| = |z^{\pm}| \Rightarrow z \in B.$$

Ceci étant vrai pour tout $z \in D$, on en déduit que $D \subset B$.
Soit $t \in \mathbb{R}$. Par inégalité triangulaire, on obtient immédiatement:

$$|f(t)| \leq |c_0| + |c_1|$$

et

$$|f(t)| \geq ||c_0| - |c_1|| = |c_0| - |c_1|$$

i.e.: $f(t) \in D$, $\forall t \in \mathbb{R}$. De plus, D est fermé comme image réciproque du fermé $[|c_0|-|c_1|, |c_0|+|c_1|]$ par l'application continue $z \mapsto |z|$. Donc: $A = \overline{\{f(t),\ t \in \mathbb{R}\}} \subset \overline{D} = D$.
En résumé: $A \subset D \subset B \underset{(II.5.c)}{\subset} A$, i.e. $A = B = D$.

III. Limites uniformes de Polynômes trigonométriques généralisés.

(III.1)

(III.1.a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'application e_λ est continue sur $\mathbb{R}$, dont $t \mapsto \int_0^t \mathrm{e}_\lambda(s)ds$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{e}_\lambda(s)ds$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme produit d'applications continues sur $\mathbb{R}^*$. Il en résulte que m_λ est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée d'applications continues sur $\mathbb{R}^*$.
Soit $t \in \mathbb{R}^*$. On a:

$$|m_\lambda(t) - 1| = \frac{1}{|t|}\left|\int_0^{|t|}(\mathrm{e}_\lambda(s) - 1)ds\right| \leq \frac{1}{|t|}\int_0^{|t|}|\mathrm{e}_\lambda(s) - 1|ds.$$

Si $\lambda \neq 0$, alors:

$$|m_\lambda(t)-1| \leq \frac{1}{|t|}\int_0^{|t|}\left|\frac{1}{\lambda}\int_0^s e^{i\lambda t}dt\right|ds \leq \frac{1}{|t||\lambda|}\int_0^{|t|}\int_0^s dtds = \frac{|t|}{2|\lambda|} \underset{t\to 0}{\to} 0$$

i.e. $\lim_{t\to 0} m_\lambda(t) = 1 = m_\lambda(0)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$. Si $\lambda = 0$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad m_0(t) = \frac{1}{|t|}\int_0^{|t|}ds = 1 = m_0(0).$$

Finalement: $\lim_{t\to 0} m_\lambda(t) = 1 = m_\lambda(0)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Donc m_λ est continue sur $\mathbb{R}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
On a: $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$|m_\lambda(t)| \leq \frac{1}{|t|}\int_0^{|t|} ds = 1$$

i.e. $m_\lambda \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $t \in \mathbb{R}^*$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Le calcul donne immédiatement:

$$m_\lambda(t) = \frac{1}{i\lambda|t|}(e^{i\lambda|t|} - 1).$$

De plus: $\forall t \in \mathbb{R}^*$,

$$m_0(t) = \frac{1}{|t|}\int_0^{|t|} 1 ds = 1 = m_0(0).$$

On en déduit que $m_0 \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et que m_0 est continue sur $\mathbb{R}^*$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Par dérivabilité de e_λ, on a:

$$\lim_{t\to 0} m_\lambda(t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{i\lambda|t|}(e^{i\lambda|t|} - 1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{i\lambda|t|}(\mathrm{e}_\lambda(|t|) - \mathrm{e}_\lambda(0)) =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{i\lambda t}(\mathrm{e}_\lambda(t) - \mathrm{e}_\lambda(0)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{i\lambda t}(\mathrm{e}_\lambda(t) - \mathrm{e}_\lambda(0)) = \frac{1}{i\lambda}\mathrm{e}'_\lambda(0) = 1$$

Donc $m_\lambda \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
On a aussi:

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad |m_\lambda(t)| = \frac{1}{|\lambda t|}|e^{i\lambda|t|} - 1| = \frac{1}{|lt|}\left|\int_0^{|t|} i\lambda e^{i\lambda s} ds\right| \leq 1$$

donc $\|m_\lambda\|_\infty \leq 1$ et $m_\lambda \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
On a: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|m_\lambda\|_\infty \leq 1$ et $m_\lambda(0) = 1$ donc $\|m_\lambda\|_\infty = 1$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On a:

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad |m_\lambda(t)| \leq \frac{1}{|\lambda t|}|e^{i\lambda|t|} - 1| \leq \frac{2}{|\lambda t|} \underset{t\to+\infty}{\to} 0,$$

i.e.: $\lim_{t\to+\infty} m_\lambda(t) = 0$.

(III.1.b) Soit $f \in \mathcal{P}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a: $\forall t > 0$,

$$M(\mathrm{e}_{-\lambda} f, t) = M(\mathrm{e}_{-\lambda} f, |t|) = \frac{1}{|t|} \int_0^{|t|} \mathrm{e}_{-\lambda}(s) f(s) ds =$$

$$= \sum_{\mu \in Sp(f)} a(f, \mu) \frac{1}{|t|} \int_0^{|t|} \mathrm{e}_{\mu-\lambda}(s) ds = \sum_{\mu \in Sp(f)} a(f, \mu) m_{\mu-\lambda}(t)$$

donc (III.1.b)$\Rightarrow$

$$M(\mathrm{e}_{-\lambda} f, t) - a(f, \lambda) = \sum_{\mu \in Sp(f) \setminus \{\lambda\}} a(f, \mu) m_{\mu-\lambda}(t) \underset{t \to +\infty}{\to} 0$$

(III.1.c) Soit $f \in \mathcal{P}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a:

$$\forall t > 0, \quad |M(\mathrm{e}_{-\lambda} f, t)| = \frac{1}{|t|} \left| \int_0^t \mathrm{e}_{-\lambda}(s) f(s) ds \right| \leq \frac{1}{|t|} \int_0^{|t|} |f(s)| ds \leq \|f\|_\infty$$

donc

$$|a(f, \lambda)| \underset{(III.1.b)}{=} \lim_{t \to +\infty} |M(\mathrm{e}_{-\lambda} f, t)| \leq \|f\|_\infty.$$

(III.2) Soit $f, g \in \overline{P}$ et soit $(f_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$, resp. $(g_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$, t.q. $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\| = 0$, resp. $\lim_{n \to +\infty} \|g_n - g\| = 0$. Alors, $\lim_{n \to +\infty} \|\overline{f}_n - \overline{f}\| = 0$ et (I.0) entraîne: $\lim_{n \to +\infty} \|\overline{f}_n g_n - \overline{f} g\| = 0$, d'où on déduit que $\overline{f} g \in \overline{P}$.

(III.3) $\overline{P}$ est un sev fermé de l'espace de Banach $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, donc $\overline{P}$ est un espace de Banach. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après (I.4) appliqué avec $H_0 = \mathcal{P}$, $H = \overline{P}$ et $\ell = a(\cdot, \lambda)$, l'application $f \mapsto a(f, \lambda)$ se prolonge de façon unique en une application linéaire encore notée $a(\cdot, \lambda)$ vérifiant (P).

(III.4) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $f \in \overline{\mathcal{P}}$.

Soit $(f_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ t.q. $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

(III.4.a) Soit $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ et soit $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On remarque que $\overline{\mathcal{P}} \subset C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et donc les aplications $f(\cdot + b)$, $f(b \cdot)$ et $\overline{f}$ sont bien définies. On a: $\forall n \geq 0$,

$$\|f_n(\cdot + b) - f(\cdot + b)\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty$$

$$\|f_n(b \cdot) - f(b \cdot)\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty$$

$$\|\overline{f}_n-\overline{f}\|_\infty=\|f_n-f\|_\infty$$

donc les suites $(f_n(\cdot+b))_{n\geq 0}$, $(f_n(b\cdot))_{n\geq 0}$,$(\overline{f}_n)_{n\geq 0}$ convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f(\cdot+b)$, $f(b\cdot)$, $\overline{f}$ resp.

(III.4.b) D'après (II.3.b), on a: $\forall n\geq 0$,

$$a(\overline{f}_n,\lambda_0)=\overline{a(f_n,-\lambda_0)},\quad a(f_n(\cdot+b),\lambda_0)=e^{i\lambda_0 b}a(f_n,\lambda_0),$$

$$a(f_n^{(k)},\lambda_0)=(i\lambda_0)^k a(f_n,\lambda_0),\quad a(f_n(b\cdot),\lambda_0))=a(f_n,\lambda_0/b).$$

De (III.3) on déduit que $\lim_{n\to+\infty}a(f_n,\lambda)=a(f,\lambda)$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$. De (II.3) et de (III.4.a), on déduit de même que:

$$\lim_{n\to+\infty}a(\overline{f}_n,\lambda_0)=a(\overline{f},\lambda_0),\qquad \lim_{n\to+\infty}a(f_n(\cdot+b,\lambda_0)=a(f(\cdot+b),\lambda_0),$$

$$\lim_{n\to+\infty}a(f_n(b\cdot),\lambda_0)=a(f(b\cdot),\lambda_0).$$

Finalement:

$$a(\overline{f},\lambda_0)=\lim_{n\to+\infty}a(\overline{f}_n,\lambda_0)=\lim_{n\to+\infty}\overline{a(f_n,-\lambda_0)}=\overline{a(f,-\lambda_0)}$$

$$a(f(\cdot+b),\lambda_0)=\lim_{n\to+\infty}a(f_n(\cdot+b,\lambda_0)=\lim_{n\to+\infty}e^{i\lambda_0 b}a(f_n,\lambda_0)=e^{i\lambda_0 b}a(f,\lambda_0),$$

$$a(f(b\cdot),\lambda_0)=\lim_{n\to+\infty}a(f_n(b\cdot),\lambda_0)=\lim_{n\to+\infty}a(f_n,\lambda_0/b)=a(f,\lambda_0/b).$$

(III.4.c) Soit $t>0$. On a: $\forall n\geq 0$,

$$|M(\mathrm{e}_{-\lambda}f,t)-a(f,\lambda)|=\left|\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{e}_{-\lambda}(s)f(s)ds-a(f,\lambda)\right|$$

$$\leq\left|\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{e}_{-\lambda}(s)f(s)ds-\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{e}_{-\lambda}(s)f_n(s)ds\right|+\left|\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{e}_{-\lambda}(s)f_n(s)ds-a(f_n,\lambda)\right|+$$
$$+|a(f_n,\lambda)-a(f,\lambda)|$$

avec

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{e}_{-\lambda}(s)f(s)ds-\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{e}_{-\lambda}(s)f_n(s)ds\right|=\left|\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{e}_{-\lambda}(s)(f(s)-f_n(s))ds\right|$$

$$\underset{t>0}{\leq}\frac{1}{t}\int_0^t|f(s)-f_n(s)|ds\leq\|f-f_n\|_\infty,$$

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{e}_{-\lambda}(s)f_n(s)ds - a(f_n,\lambda)\right| = |M(\mathrm{e}_{-\lambda}f_n,t) - a(f_n,\lambda)|.$$

Il en résulte:

$$|M(\mathrm{e}_{-\lambda}f,t)-a(f,\lambda)| \leq \|f-f_n\|_\infty+|M(\mathrm{e}_{-\lambda}f_n,t)-a(f_n,\lambda)|+|a(f_n,\lambda)-a(f,\lambda)|.$$

(III.4.d) Par hypothèse $\lim_{n\to+\infty}\|f_n-f\|_\infty = 0$ et d'après (III.4.a), $\lim_{n\to+\infty} a(f_n,\lambda) = a(f,\lambda)$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n_0 > 0$ t.q.:

$$\forall n \geq n_0, \quad \|f - f_n\|_\infty + |a(f_n,\lambda) - a(f,\lambda)| < \varepsilon.$$

On fixe $n \geq n_0$. D'après (II.1.b):

$$\lim_{t\to+\infty} M(\mathrm{e}_{-\lambda}f_n,t) = a(f_n,\lambda).$$

On en déduit:

$$0 \leq \limsup_{t\to+\infty} |M(\mathrm{e}_{-\lambda}f,t) - a(f,\lambda)| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci étant vrai $\forall\varepsilon > 0$, il en résulte que

$$\limsup_{t\to+\infty} |M(\mathrm{e}_{-\lambda}f,t) - a(f,\lambda)| = \lim_{t\to+\infty} |M(\mathrm{e}_{-\lambda}f,t) - a(f,\lambda)| = 0$$

(III.4.e) Soit $f \in \overline{\mathcal{P}} \cap C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ t.q. $f' \in \overline{\mathcal{P}}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après (III.4.d):

$$f' \in \overline{\mathcal{P}} \Rightarrow a(f',\lambda) = \lim_{t\to+\infty} M(\mathrm{e}_{-\lambda}f',t)$$

avec, en intégrant par parties: $\forall t > 0$, $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \Rightarrow$

$$M(\mathrm{e}_{-\lambda}f',t) = \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{e}_{-\lambda}(s)f'(s)ds = \frac{i\lambda}{t}\int_0^t \mathrm{e}_{-\lambda}(s)f(s)ds+\frac{1}{t}(\mathrm{e}_{-\lambda}(t)f(t)-f(0))$$

où

$$\left|\frac{1}{t}(\mathrm{e}_{-\lambda}(t)f(t) - f(0))\right| \leq \frac{2}{t}\|f\|_\infty \underset{t\to+\infty}{\rightarrow} 0.$$

On en déduit:

$$a(f',\lambda) = \lim_{t\to+\infty} M(\mathrm{e}_{-\lambda}f',t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{i\lambda}{t}\int_0^t \mathrm{e}_{-\lambda}(s)f(s)ds = i\lambda a(f,\lambda)$$

IV. Egalité de Bessel pour les coefficients de Fourier généralisés.

(IV.1)

(IV.1.a) On a:

$$\forall n \geq 0, \quad |b_n \mathrm{e}_{\lambda_n}|_\infty \leq |b_n|$$

avec $\sum_{n\geq 0} |b_n| < +\infty$ par hypothèse. Comme la série de fonctions est à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui est complet, on en déduit que la série de fonctins $\sum b_n \mathrm{e}_{\lambda_n}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
Par définition des séries convergentes dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a:

$$\lim_{N\to+\infty} \|g - \sum_{n=0}^{N} b_n \mathrm{e}_{\lambda_n}\|_\infty$$

avec $\forall N \geq 0$, $\sum_{n=0}^{N} b_n \mathrm{e}_{\lambda_n} \in \mathcal{P}$ car $\mathcal{P}$ est un $\mathbb{C}$-ev, donc $g \in \overline{\mathcal{P}}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après (III.3):

$$a(g, \lambda) = \lim_{N\to+\infty} a(\sum_{n=0}^{N} b_n \mathrm{e}_{\lambda_n}, \lambda) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} b_n a(\mathrm{e}_{\lambda_n}, \lambda).$$

Si $\lambda \notin \{\lambda_n, \ n \geq 0\}$, alors: $a(\mathrm{e}_{\lambda_n}, \lambda) = 0$, $\forall n \geq 0$, et donc $ag, \lambda) = 0$. Sinon, il existe un unique $n_0 \geq 0$ t.q. $\lambda = \lambda_{n_0}$ et alors:

$$\forall N \geq n_0, \quad \sum_{n=0}^{N} b_n a(\mathrm{e}_{\lambda_n}, \lambda) = b_{n_0}$$

donc $a(g, \lambda) = a(g, \lambda_{n_0}) = b_{n_0}$.

(IV.1.b) On a: $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^2} e^{\frac{it}{n^2}}.$$

La série étant normalement convergnte, il en est de même de la série conjuguée et on en déduit: $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Re}(g(t)) = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^2} \cos\left(\frac{t}{n^2}\right),$$

$$\mathrm{Im}(g(t)) = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^2} \sin\left(\frac{t}{n^2}\right),$$

On en déduit:

$$g(t) - g(0) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\left(\cos\left(\frac{t}{n^2}\right) - 1\right) + i\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{t}{n^2}\right)$$

puis:

$$g(t) = g(0) \iff \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\left(1 - \cos\left(\frac{t}{n^2}\right)\right) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{t}{n^2}\right) = 0$$

avec

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n^2}\left(1 - \cos\left(\frac{t}{n^2}\right)\right) \geq 0$$

donc

$$g(t) = g(0) \Rightarrow \forall n \geq 1, \quad \cos\left(\frac{t}{n^2}\right) = 1$$

i.e.:

$$t \in \cap_{n\geq 1} 2\pi n^2 \mathbb{Z} = \{0\}$$

et $t = 0$ est l'unique solution de $g(t) = g(0)$.

On suppose que g et périodique de période $r > 0$. Alors $g(r) = g(0)$ en contradiction avec ce qui précède.

(IV.1.c) Soit $t \in \mathbb{R}$. Par définition de l'exponentielle:

$$g(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \sum_{k\geq 0} \frac{(it)^k}{k! n^{2k}}$$

avec

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0} \frac{1}{n^2} \frac{|t|^k}{k! n^{2k}} = \sum_{k\geq 0} \frac{|t|^k}{k!} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2+2k}} =: \sum_{k\geq 0} u_k |t| k.$$

Le calcul montre que

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{2+2k}} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2k+2}} = \frac{1}{2k+1} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2+2k}}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2k+1} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2+2k}} \leq 1 + \frac{1}{2k+1} = \frac{2k+2}{2k+1}.$$

On en déduit: $\forall k \geq 0$,

$$\frac{1}{2k+1} \leq k!u_k \leq \frac{2k+2}{2k+1}$$

et donc $k!u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} 1$. Il en résulte:

$$\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \underset{k\to+\infty}{\to} 0.$$

Donc la série entière $\sum u_k z^k$ est convergente de rayon de convergence infini et pour $z = it$ elle coïncide avec le développement en série entière de $g(t)$ au voisinage de $t = 0$.

(IV.2) Soit $f \in H$.

(IV.2.a) Soit $S \subset J$ fini et non-vide. Soit $g \in \mathrm{Vect}\{f_j,\ j \in S\}$. Alors $g = P_S g = \sum_{j\in S} \langle f_j, g\rangle f_j$ et on a

$$\langle f - P_S f, g\rangle = \langle f - P_S f, P_S g\rangle = \langle f, P_S g\rangle - \langle P_S f, P_S g\rangle$$

avec

$$\langle P_S f, P_S g\rangle = \sum_{j,k\in S} \overline{\langle f_j, f\rangle} \langle f_k, g\rangle \langle f_j, f_k\rangle = \sum_{j\in S} \overline{\langle f_j, f\rangle} \langle f_j, g\rangle$$

car $\langle f_j, f_k\rangle = \delta_{jk}$, $\forall j, k \in S$ par hypothèse sur S.
De plus:

$$\langle f, P_S g\rangle = \sum_{j\in S} \langle f_j, g\rangle \langle f, f_j\rangle = \sum_{j\in S} \langle f_j, g\rangle \overline{\langle f_j, f\rangle} = \langle P_S f, P_S g\rangle$$

donc $\langle f - P_S f, g\rangle = 0$.
On a:

$$q(f-g) = \langle f-g, f-g\rangle = \langle f - P_S f, f - P_S f\rangle +$$

$$+\langle f - P_S f, P_S f - g\rangle + \overline{\langle f - P_S f, P_S f - g\rangle} + \langle P_S f - g, P_S f - g\rangle$$

avec $P_S f - g \in \mathrm{Vect}\{f_j,\ j \in S\} \Rightarrow \langle f - P_S f, P_S f - g\rangle = 0$, donc

$$q(f-g) = \langle f - P_S f, f - P_S f\rangle + \langle P_S f - g, P_S f - g\rangle =$$
$$= q(f - P_S f) + q(P_S f - g) \geq q(f - P_S f)$$

par positivité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
D'après le raisonnement précédent:

$$q(f-g) = q(f - P_S f) + q(P_S f - g).$$

En prenant $g = 0 \in \mathrm{Vect}\{f_j,\ j \in S\}$, on obtient:

$$q(f) = q(f - P_S f) + q(P_S f).$$

(IV.2.b) La positivité de q et l'orthonormalité de la famille $(f_j)_{j\in J}$ entraînent:

$$q(f) \geq q(P_S f) = \sum_{j\in S} |\langle f, f_j\rangle|^2.$$

Ceci étant vrai pour toute famille $S \subset J$ finie et non-vie, on en déduit:

$$q(f) \geq \sup_{S\subset J,\, S \text{ finie et non-vide}} \sum_{j\in S} |\langle f, f_j\rangle|^2 = \sum_{j\in J} |\langle f, f_j\rangle|^2$$

(IV.2.c) Par définition de $\mathrm{Vect}\{f_j,\ j \in J\}$, l existe une suite $(S_n)_{n\geq 0}$ de parties finies et non-vides de J t.q.: $g_n \in \mathrm{Vect}\{f_j,\ j \in S_n\}$, $\forall n \geq 0$. De (IV.2.a) on déduit:

$$\forall n \geq 0, \quad q(f - g_n) \geq q(f - P_{S_n} f) \geq 0 \quad \text{et} \quad q(f) = q(f - P_{S_n} f) + q(P_{S_n} f).$$

Alors:

$$\lim_{n\to+\infty} q(f - g_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} q(f - P_{S_n} f) = 0 \quad \text{et} \quad q(f) = \lim_{n\to+\infty} q(P_{S_n} f).$$

De plus: $\forall n \geq 0$,

$$q(f) \geq \sum_{j\in J} |\langle f, f_j\rangle|^2 \geq \sum_{j\in S_n} |\langle f, f_j\rangle|^2 = q(P_{S_n} f)$$

avec $\lim_{n\to+\infty} q(P_{S_n} f) = q(f)$. Du Théorème d'encadrement des gendarmes on déduit que

$$q(f) = \sum_{j\in J} |\langle f, f_j\rangle|^2.$$

(IV.3)

(IV.3.a) Soit $t > 0$. On vérifie immédiatement que $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ est une forme sesquilinéaire. De plus: $\forall f, g \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$,

$$\overline{\langle f, g \rangle_t} = M(\overline{\overline{f}g}, t) = M(f\overline{g}, t) = \langle g, f \rangle_t$$

i.e. $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ est une forme hermitienne. De plus:

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \langle f, f \rangle_t = M(|f|^2, t) \geq 0$$

i.e. $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ est une forme hermitienne positive.
Soit $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par:

$$f_t(s) = \begin{cases} \sin(\pi(s-t)) & \text{si} \quad s \geq t, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $f_t \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \setminus \{0\}$ et $\langle f_t, f_t \rangle_t = 0$. Donc la forme hermitienne $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ n'est pas définie.

(IV.3.b) Soit $f, g \in \overline{\mathcal{P}}$. D'après (III.2), $\overline{f}g \in \overline{\mathcal{P}}$ et d'après (III.4.d), $a(\overline{f}g, 0)$ est bien défini. D'après (III.4.d), $\forall f, g \in \overline{\mathcal{P}}$,

$$a(\overline{f}g, 0) = \lim_{t \to +\infty} M(e_0 \overline{f}g, t) = \lim_{t \to +\infty} M(\overline{f}g, t) = \lim_{t \to +\infty} \langle f, g \rangle_t.$$

Par passage à la limite dans (IV.3.a), on vérifie directement que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme hermitienne positive.

(IV.3.c) Soit $f \in \overline{\mathcal{P}}$. Avec les notations de (IV.2),

$$a(|f|^2, 0) = q(f) = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} |\langle \mathrm{e}_\lambda, f \rangle|^2 = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} |\langle \mathrm{e}_\lambda, f \rangle|^2$$

avec: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\langle \mathrm{e}_\lambda, f \rangle = a(\overline{e}_\lambda f, 0) = a(e_{-\lambda} f, 0) \underset{(III.4.c)}{=} \lim_{t \to +\infty} M(e_{-\lambda} f, t) \underset{(III.4.c)}{=} a(f, \lambda).$$

Il en résulte:

$$a(|f|^2, 0) = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} |a(f, \lambda)|^2.$$

De (I.3.b) et de la définition de $Sp(f)$, on déduit que $Sp(f)$ est dénombrable.

(IV.3.d) Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On supose que $E_{i\mu,f}$ admet une solution $\in \overline{\mathcal{P}}$ de classe C^1. Alors: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$a(y', \lambda) = i\mu a(y, \lambda) + a(g\mathrm{e}_\mu, \lambda)$$

avec

$$a(y', \lambda) \underset{(III.4.e)}{=} i\lambda a(y, \lambda)$$

$$a(g\mathrm{e}_\mu, \lambda) \underset{(III.4.d)}{=} \lim_{t \to +\infty} M(\mathrm{e}_{-\lambda} g\mathrm{e}_\mu, t) = a(g, \lambda - \mu).$$

Il en résulte:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad i(\lambda - \mu) a(y, \lambda) = a(g, \lambda - mu) \underset{(IV.1.a)}{=} \begin{cases} \lambda_n & \text{si} \quad \lambda = \mu + \lambda_n, \\ 0 & \text{sinon} \quad . \end{cases}$$

On en déduit:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\mu\}, \quad a(y, \lambda) = \begin{cases} -i & \text{si} \quad \lambda = \mu + \lambda_n, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De (IV.3.c), on déduit que

$$a(|y|^2, 0) = |a(y, \mu)|^2 + \sum_{n \geq 1} |a(y, \mu + \lambda_n)|^2 = \sum_{n \geq 0} |a(y, \mu + \lambda_n)|^2 < +\infty$$

en contradiction avec $a(y, \mu + \lambda_n) = -i$, $\forall n \geq 1$.

(IV.3.e) Soit $f \in \overline{\mathcal{P}}$. D'après (IV.3.c):

$$a(|f|^2, 0) = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} |a(f, \lambda)|^2 < +\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $S_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ fini t.q.

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus S_\varepsilon} |a(f, \lambda)|^2 < \varepsilon.$$

Comme S_ε est fini, c'est aussi une partie bornée de $\mathbb{R}$ et il existe $R > 0$ t.q. $S_\varepsilon \subset [-R, R]$. Soit alors $|\lambda| > R$. On a:

$$|a(f, \lambda)|^2 \leq \sum_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus S_\varepsilon} |a(f, \lambda)|^2 < \varepsilon.$$

Il en résulte que

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty} a(f,\lambda)=0$$

et en particulier:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} a(f,\lambda)=\lim_{\lambda\to-\infty} a(f,\lambda)=0.$$

(IV.4) Soit $\beta\in\mathbb{C}$ et soit $f\in\overline{\mathcal{P}}$.

(IV.4.a) Le calcul montre directement que: $\forall\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\mathrm{Re}(\beta)>0\Rightarrow\beta\neq i\lambda \quad \text{et} \quad K_\beta \mathrm{e}_\lambda=\frac{\mathrm{e}_\lambda}{\beta-i\lambda}\in\mathcal{P}.$$

La $\mathbb{C}$- linéarité de K_β entraîne: $f\in\mathcal{P}\Rightarrow K_\beta f\in\mathcal{P}$.

(IV.4.b) De (IV.4.a) et de (I.1.c), on déduit que $f\in\overline{\mathcal{P}}\Rightarrow K_\beta f\in\overline{\mathcal{P}}$.

(IV.4.c) On suppose que $\mathrm{Re}(\beta)>0$. D'après (I.2.c), $y=-K_\beta f$ est l'unique solution bornée de $(E_{\beta,f})$. De (IV.4.b) on déduit que $y\in\overline{\mathcal{P}}$.
Si $\mathrm{Re}(\beta)<0$ alors d'après (I.2.d), $y=K_{-\beta}\check{f}$ est l'unique solution bornée de $(E_{\beta,f})$. De (IV.4.b) on déduit à nouveau que $y\in\overline{\mathcal{P}}$.

(IV.4.d) Soit $f\in\mathcal{P}$. D'après (I.2.a) a solution générale de $(E_{i\lambda_0,f})$ s'écrit:

$$y(t)=K_0e^{i\lambda_0 t}+\int_0^t e^{i\lambda_0(t-s)}f(s)ds,\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

i.e.:

$$y=K_0\mathrm{e}_{\lambda_0}+t\langle \mathrm{e}_{\lambda_0},f\rangle_t\mathrm{e}_{\lambda_0}=K_0\mathrm{e}_{\lambda_0}+t\sum_{\lambda\in Sp(f)}a(f,\lambda)\langle \mathrm{e}_{\lambda_0},\mathrm{e}_\lambda\rangle_t\mathrm{e}_{\lambda_0}=$$

$$=K_0\mathrm{e}_{\lambda_0}+ta(f,\lambda_0)\mathrm{e}_{\lambda_0}.$$

On en déduit que y est bornée ssi $a(f,\lambda_0)=0$, i.e. ssi $\lambda_0\notin Sp(f)$.

(IV.5)

(IV.5.a) Soit $f\in\mathcal{F}_1$. D'après le Théorème de Fejer, il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}\in\mathrm{Vect}\{\mathrm{e}_{2k\pi},\ k\in\mathbb{Z}\}^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\lim_{n\to+\infty}\|f-f_n\|_\infty=0.$$

Par construction: $f_n \in \mathcal{P}$, $\forall n \geq 0$, donc $f \in \overline{\mathcal{P}}$.
soit $r > 0$ et soit $f \in \mathcal{F}_r$. Alors $f_r := f(r\cdot) \in \mathcal{F}_1 \subset \overline{\mathcal{P}}$. De (III.4.b), on déduit que $f = f_r(r^{-1}\cdot) \in \overline{\mathcal{P}}$.

(IV.5.b) Soit $n \in \mathbb{Z}$. L'applicatiion $f \in \mathcal{F}_1 \mapsto c_n(f)$ et linéaire par linéarité de l'intégrale. On a: $\forall f \in \mathcal{F}_1$,

$$|c_n(f)| \leq \int_0^1 |f(t)|dt \leq \int_0^1 dt\|f\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

(IV.5.c) Soit $r > 0$ et soit $f \in \mathcal{F}_r$. On a:

$$a(f, 2\pi n/r) \underset{(III.4.b)}{=} a(f(r\cdot), 2\pi n) \underset{(III.4.d)}{=} \lim_{t\to+\infty} M(\mathrm{e}_{-2\pi n} f(r\cdot), t)$$

avec $\mathrm{e}_{-2\pi n} f(r\cdot) \in \mathcal{F}_1$. Il en résulte: $\forall t > 0$,

$$M(\mathrm{e}_{-2\pi n} f(r\cdot), t) = \frac{1}{t}\left(\lfloor t \rfloor M(\mathrm{e}_{-2\pi n} f(r\cdot), 1) + \int_0^{\{t\}} \mathrm{e}_{-2\pi n}(s) f(rs)ds\right)$$

$$\Rightarrow |M(\mathrm{e}_{-2\pi n} f(r\cdot), t) - M(\mathrm{e}_{-2\pi n} f(r\cdot), 1)| \leq$$

$$\leq \left|\frac{\lfloor t \rfloor}{t} - 1\right| |M(\mathrm{e}_{-2\pi n} f(r\cdot), 1)| + \frac{1}{t}\int_0^1 \|f\|_\infty ds \leq \frac{2}{t}\|f\|_\infty \underset{t\to+\infty}{\to} 0,$$

i.e.:

$$M(\mathrm{e}_{-2\pi n} f(r\cdot), t) = M(\mathrm{e}_{-2\pi n} f(r\cdot), 1) = M(\mathrm{e}_{-2\pi n/r} f, r).$$

Finalement:

$$a(f, 2\pi n/r) = M(\mathrm{e}_{-2\pi n/r} f, r).$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 2\pi r^{-1}\mathbb{Z}$. D'après le Théorème de Fejer, il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0} \in \mathrm{Vect}\{\mathrm{e}_{2k\pi},\ k \in \mathbb{Z}\}^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\lim_{n\to+\infty} \|f(r\cdot) - f_n\|_\infty = 0.$$

D'après (III.3):

$$a(f, l) \underset{(III.4.b)}{=} a(f(r\cdot), \lambda/r) \underset{(III)}{=} \lim_{n\to+\infty} a(f_n, \lambda/r)$$

avec $\lambda/r \notin 2\pi\mathbb{Z}$, donc

$$\forall n \geq 0, \quad f_n \in \mathrm{Vect}\{\mathrm{e}_{2k\pi},\ k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow a(f_n, \lambda/r) = 0$$

donc $a(f, \lambda) = 0$,

V. Fonctions presque périodiques.

(V.1) On suppose f périodique de période $r > 0$. Alors $r \in \cap_{\varepsilon>0} T(f,\varepsilon)$.

Inversement, on suppose que $\cap_{\varepsilon>0} T(f,\varepsilon) \neq \{0\}$. Soit $r \in \cap_{\varepsilon>0} T(f,\varepsilon)$, $r \neq 0$. On a:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \|f(\cdot + r) - f\|_\infty < \varepsilon$$

donc $f(\cdot + r) = f$, i.e. f est périodique de période r.

(V.2)

(V.2.a) Soit $L > 0$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}$, $A \cap [x, x+L] \neq \emptyset$. Alors:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A \cap [x, x+L] \neq \emptyset \quad \text{et} \quad A \subset B \Rightarrow B \cap [x, x+L] \neq \emptyset.$$

Donc B est relativement dense.

(V.2.b) Soit $E \subset \mathbb{R}$ relativement dense et soit $L > 0$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}$, $E \cap [x, x+L] \neq \emptyset$. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de longueur $\geq L$. Il existe $a \in I$ t.q. $[a, a+L] \subset I$. Par hypothèse sur E, $[a, a+L] \cap E \neq \emptyset$. Soit alors $b \in [a, a+L] \cap E$. On en déduit que $b \in [a, a+L] \cap E \subset I \cap E$, i.e. $I \cap E \neq \emptyset$.

Inversement, on suppose que pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ de longueur $\geq L$, $E \cap I \neq \emptyset$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[x, x+L] \cap E \neq \emptyset$, i.e. E est relativement dense.

(V.2.c) (i) Sot $b > 0$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$b \left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor \in [x, x+b] \cap b\mathbb{Z}.$$

donc $b\mathbb{Z}$ est relativement dense.

(ii) Soit $E = \{\pm n^2, \quad n \geq 0\}$. On remarque que: $\forall n \geq 0$, $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$. Soit $L > 0$. Il existe $n_0 > 0$ t.q. $\forall n \geq n_0$, $2n+1 > L$. Soit $n \geq n_0$. Par construction $L < (n+1)^2 - n^2$. Soit $\varepsilon > 0$ t.q.: $L + \varepsilon < (n+1)^2 - n^2$. On a:

$$[n^2 + \varepsilon, n^2 + \varepsilon + L] \subset]n^2, (n+1)^2[.$$

Autrement dit, pour tout $L > 0$, il existe un intervalle de longueur L qui ne rencontre pas E. Donc E n'est pas relativement dense.

(iii) Soit $E = \{\pm\sqrt{n}, \quad n \geq 0\}$. On remarque que:

$$\forall n \geq 0, \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 1.$$

Soit $x > 0$ et soit $n = \lfloor x^2 \rfloor$. Alors $n \leq x^2 < n+1$.L'application $t \mapsto \sqrt{t}$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a: $\sqrt{n} \leq x \leq \sqrt{n+1} \leq 1 + \sqrt{n} \leq x + 1$, i.e. $\sqrt{n} \in [x, x+1] \cap E$.
Si $x < 0$, alors $n = \lfloor x^2 \rfloor \Rightarrow -\sqrt{n} \in [x-1, x] \cap E$. Donc E est relativement dense.

(iv) Soit $E \subset \mathbb{R}$ un compact. Alors E est borné, donc il existe $R > 0$ t.q. $E \subset [-R, R]$. Soit $x > R$. Alors $\forall L > 0$, $[x, x+L] \cap E = \emptyset$. Donc E n'est pas relativement dense.

(V.3) Soit $r > 0$ et soit $f \in \mathcal{F}_r$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $n = \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor$. Alors: $r > 0 \Rightarrow$

$$n \leq \frac{x}{r} < n+1 \iff nr \leq x < (n+1)r \iff x - r < nr \leq x$$

i.e. $nr \in [x-1, x]$. De plus, par définition de la période:

$$f(\cdot + nr) = f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad nr \in [x-1, x] \cap T(f, \varepsilon)$$

Finalement:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad [x-1, x] \cap T(f, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

i.e. $f \in \mathcal{B}$.

(V.4) Soit $f \in C_b((\mathbb{R}, \mathbb{C})$ définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

Alors $\|f\|_\infty = 1$ et le calcul direct montr qu

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

donc f est uniformément cotinue sur $\mathbb{R}$. On remarque que: $\forall a > 0$,

$$|f(2+a) - f(2)| = \left| \frac{1}{2+a} - \frac{1}{2} \right|$$

et l'étude des variations de $a \in [0, +\infty[\mapsto \dfrac{1}{2+a} - \dfrac{1}{2}$ montre qu'il existe $a_0 > 0$ t.q.:

$$\forall a \geq a_0, \quad \|f(\cdot + a) - f\|_\infty \geq \left|\frac{1}{2+a} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{4}.$$

d'où on déduit que:

$$\forall \varepsilon \in]0, \frac{1}{4}[, \quad \forall x \in [a_0, +\infty[, \quad [x, +\infty[\cap T(f, \varepsilon) = \emptyset.$$

et f n'est pas presque périodique.

(V.5) On a: $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\|g(\cdot + x) - g\|_\infty = \|f(b \cdot + a + x) - f(b \cdot + a)\|_\infty \leq \|f(\cdot + x) - f\|_\infty$$

donc: $\forall \varepsilon > 0$, $T(f, \varepsilon) \subset T(g, \varepsilon)$. En particulier: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$,

$$[x, x+L_{\varepsilon,f}] \cap T(f, \varepsilon) \subset [x, x+L_{\varepsilon,f}] \cap T(g, \varepsilon) \quad \text{et} \quad [x, x+L_{\varepsilon,f}] \cap T(f, \varepsilon) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow [x, x + L_{\varepsilon,f}] \cap T(g, \varepsilon) \neq \emptyset$$

i.e. $g \in \mathcal{B}$.

(V.6) Soit $f, g \in \mathcal{N}$ et soit α, $\beta \in \mathbb{C}$. Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soit $(a_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ une suite extraite t.q. $(f(\cdot + a_{\varphi(n)})_) n \geq 0$ soit uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{f} \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Quitte à remplacer $(a_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ par une suite extraire $(a_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \geq 0}$, on peut supposer que la suite $(g(\cdot + a_{\varphi(n)})_) n \geq 0$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{g} \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On pose: $h = \alpha f + \beta g$. Alors: $\forall n \geq 0$

$$\|h(\cdot + a_{\varphi(n)}) - (\alpha \tilde{f} + \beta \tilde{g})\|_\infty \leq |\alpha| \|f(\cdot + a_{\varphi(n)}) - \tilde{f}\|_\infty +$$

$$+ |\beta| \|g(\cdot + a_{\varphi(n)}) - \tilde{g}\|_\infty$$

avec, par hypothèse:

$$\lim_{n \to +\infty} \|f(\cdot + a_{\varphi(n)}) - \tilde{f}\|_\infty = \lim_{n \to +\infty} \|g(\cdot + a_{\varphi(n)}) - \tilde{g}\|_\infty = 0.$$

On en déduit que la suite $(h(\cdot + a_{\varphi(n)})_) n \geq 0$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{f} + \beta \tilde{g} \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, i.e. que $h \in \mathcal{N}$. Donc $\mathcal{N}$ est un sev de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

On a aussi:

$$\|\overline{f}g(\cdot + a_{\varphi(n)}) - \overline{\tilde{f}}\tilde{g}\|_\infty \leq \|\overline{f}(\cdot + a_{\varphi(n)}) - \overline{\tilde{f}}\|_\infty \| \|g(\cdot + a_{\varphi(n)})\|_\infty +$$

$$+\|\overline{\tilde{f}}\|_\infty \|g(\cdot + a_{\varphi(n)}) - \tilde{g}\|_\infty$$

$$= \|f(\cdot + a_{\varphi(n)}) - \tilde{f}\|_\infty \| \|g\|_\infty + \|\tilde{f}\|_\infty \|g(\cdot + a_{\varphi(n)}) - \tilde{g}\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

donc $\overline{f}g \in \mathcal{N}$.

(V.7) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On a:

$$\forall n \geq 0, \quad \mathrm{e}_\lambda(\cdot + a_n) = e^{ia_n}\mathrm{e}_\lambda \quad \text{avec} \quad |e^{ia_n}| = 1.$$

La sphère unité $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ de $\mathbb{C}$ est un compact de $\mathbb{C}$ donc il existe une suite extraite $(a_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ et $a \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{n\to+\infty} |e^{ia_{\varphi(n)}} - e^{ia}| = 0$. On en déduit que

$$\|\mathrm{e}_\lambda(\cdot + a_{\varphi(n)}) - \mathrm{e}_\lambda\|_\infty = |e^{ia_{\varphi(n)}} - e^{ia}| \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

i.e. que $\mathrm{e}_\lambda \in \mathcal{N}$.

(V.8) On suppose dans un pemier temps que $f \in \mathcal{N}$. Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite. Par hypothèse, il existe une suite extraite $(a_{\varphi(n)})_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et il existe $g \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ t.q.

$$\lim_{n\to+\infty} \|f(\cdot + a_{\varphi(n)}) - g\|_\infty = 0,$$

i.e. A vérifie le critère de Bolzano-Weierstrass et donc A est un compact de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

On remarque que

$$A \subset \cup_{a\in\mathbb{R}} B\left(f(\cdot + a), \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

D'après le critère de Borel-Lebesgue, il existe $a_1, \cdots, a_n$ t.q.

$$A \subset \cup_{k=1}^{n} B(f(\cdot + a_k), \varepsilon/3).$$

Dans le cas général, soit $a \in \mathbb{R}$. Par hypothèse sur f:

$$f(\cdot + a) \in B\left(h(\cdot + a), \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

D'après ce qui précède, il existe $a_1, \cdots, a_n$ t.q.

$$\{h(\cdot + a), \quad a \in \mathbb{R}\} \subset \cup_{k=1}^n B\left(h(\cdot + a_k), \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Soit $i_a \in [[1, n]]$ t.q. $h(\cdot + a) \in B\left(h(\cdot + a_{i_a}), \frac{\varepsilon}{3}\right)$. Alors

$$f(\cdot + a) \in B\left(h(\cdot + a_{i_a}), \frac{2\varepsilon}{3}\right) \subset B(f(\cdot + a_{i_a}), \varepsilon).$$

Finalement:

$$A \subset \cup_{k=1}^n B(f(\cdot + a_k), \varepsilon).$$

(V.9) Soit $f \in \overline{\mathcal{N}}$ et soit A associé à f dans (5). Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de l'adhérence il existe $h_\varepsilon \in \mathcal{N}$ t.q. $f - h_\varepsilon\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. D'après (V.8), il existe $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ t.q.

$$A \subset \cup_{k=1}^n B(f(\cdot + a_k), \varepsilon),$$

i.e. A satisfait la propriété de Borel-Lebesgue dans $(C_b(\mathbb{R}), \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$. On en déduit que A est un compact de $(C_b(\mathbb{R}), \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$. D'après le critère de Bolzano-Weierstrass, pour toute suite $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ il existe une suite extraite $(a_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ et il existe $g \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ t.q.:

$$\lim_{n \to +\infty} \|f(\cdot + a_{\varphi(n)}) - g\|_\infty = 0,$$

i.e. $f \in \mathcal{N}$. Donc $\overline{\mathcal{N}} = \mathcal{N}$ et $\mathcal{N}$ est fermé.

(V.10) Soit $f \in \mathcal{N}$.

(V.10.a) Soit $\varepsilon > 0$'et soit A associé à f dans (5). D'aoprès (V.8), il existe $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ t.q.

$$A \subset \cup_{k=1}^n B(f(\cdot + a_k), \varepsilon).$$

Soit alors $a \in \mathbb{R}$ et soit $k \in [[1, n]]$ t.q. $f(\cdot + a) \in B(f(\cdot + a_k), \varepsilon)$ i.e. t.q.:

$$\|f(\cdot + a) - f(\cdot + a_k)\|_\infty < \varepsilon$$

avec

$$\|f(\cdot + a) - f(\cdot + a_k)\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + a) - f(x + a_k)| \underset{y = x + a_k}{=} \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(y + a - a_k) - f(y)|$$

car $x \mapsto x + a_k$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Il en résulte:

$$\|f(\cdot + a) - f(\cdot + a_k)\|_\infty = \|f(\cdot + a - a_k) - f\|_\infty < \varepsilon$$

i.e. $a - a_k \in T(f, \varepsilon)$.

(V.10.b) On pose:

$$L = \max_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $k \in [[1, n]]$ t.q. $a - a_k \in T(f, \varepsilon)$. On a: $a - a_k \in [a - L, a + L] \cap T(f, \varepsilon)$, i.e.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad [a - L, a + L] \cap T(f, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

On en déduit que tut ntervale $I \subset \mathbb{R}$ de longueur $2L$ a une intersection non vide avec $T(f, \varepsilon)$, i.e. que $T(f, \varepsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $f \in \mathcal{B}$, i.e. $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}$.

(V.11) On déduit de (V.7) et de la stucture d'ev de $\mathcal{N}$ montrée dans (V.6) que $\mathcal{P} \subset \mathcal{N}$. Il en résulte:

$$\overline{\mathcal{P}} \subset \overline{\mathcal{N}} \underset{(V.9)}{=} \mathcal{N} \underset{(V.10)}{\subset} \mathcal{B}.$$

VI. Injectivité des coefficients de Fourier généralisés.

(VI.1) D'après (IV.5.b), on a: $c_n(f - g) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. De la formle de Parseval (2), on déduit alors:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f - g)|^2 = \int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt = 0.$$

Par définition $\mathcal{F}_1 \subset C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ donc $|f - g|^2 \geq 0$ est continue. On en déduit que $f - g = 0$, i.e. $f = g$.

(VI.2) Soit $g \in \overline{\mathcal{P}} \setminus \{0\}$ t.q. $g \geq 0$.

(VI.2.a) Comme $g \neq 0$, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $g(t_0) > 0$. Par continuité de g en t_0 il existe $\delta > 0$ t.q. $g|_{[t_0, t_0 + \delta]} > 0$. Comme $[t_0, t_0 + \delta]$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$, c'est un compact. La continuité de g entraîne que g admet une borne inférieure sur ce compact et qu'elle y est atteinte: il existe $t_1 \in [t_0, t_0 + \delta]$ t.q. $g(t_1) = \min_{t \in [t_0, t_0 + \delta]} g(t) =: 2\varepsilon > 0$.

(VI.2.b) D'après (V.11), $g \in \mathcal{B}$. Donc il existe $L > 0$ t.q.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad [t, t+L] \cap T(g, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit $b' \in [t - t_0, t - t_0 + L] \cap T(g, \varepsilon)$. Par définition de $T(g, \varepsilon)$:

$$\|g(\cdot + b') - g\|_\infty \leq \varepsilon.$$

On en déduit: $g(\cdot + b') \geq g - \varepsilon$ et en particulier:

$$\inf_{s \in [t_0, t_0+\delta]} g(s + b') \geq \inf_{s \in [t_0, t_0+\delta]} g(s) - \varepsilon \underset{(V.2.a)}{\geq} 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$$

On pose: $b = b' + t_0$. Alors $b \in [t, t+L]$ et

$$\inf_{s \in [t_0, t_0+\delta]} g(s+b') = \inf_{s \in [t_0, t_0+\delta]} g(s+b-t_0) = \inf_{s \in [0,\delta]} g(s+b) = \inf_{s \in [b, b+\delta]} g(s).$$

Finalement: $b \in [t, t+L]$ et $\inf_{s \in [b, b+\delta]} g(s) \geq \varepsilon$.

(VI.2.c) Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après (VI.2.b), il existe $b_k \in [2kL, 2kL + L]$ t.q. $\inf_{s \in [b_k, b_k+\delta]} g(s) \geq \varepsilon$. Alors $[b_k, b_k + \delta] \subset [2kL, 2kL + L + \delta] \subset [2kL, 2kL + 2L]$ et on en déduit:

$$\int_{2kL}^{2kL+2L} g(t)dt \underset{g \geq 0}{\geq} \int_{b_k}^{b_k+\delta} g(t)dt \geq \delta\varepsilon.$$

D'après (III.4.d),

$$a(g, 0) = \lim_{t \to +\infty} M(\mathrm{e}_0 g, t) = \lim_{t \to +\infty} M(g, t).$$

Soit $t > 0$ et soit $N > 0$ t.q. $2NL \leq t < 2(N+1)L$. On a:

$$M(g,t) = \frac{1}{t} \int_0^t g(s)ds \underset{g \geq 0}{\geq} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{2kL}^{2(k+1)L} g(s)ds \geq \frac{N}{t}\delta\varepsilon$$

De plus:

$$2NL \leq t < 2(N+1)L \iff 2(N-1)L \leq t - 2L < 2NL$$

$$\underset{t>0}{\iff} 2L\frac{(N-1)}{t} \leq 1 - \frac{2L}{t} < 2L\frac{N}{t} \Rightarrow \frac{N}{t} > \frac{1}{2L} - \frac{1}{t}.$$

On déduit:

$$M(g,t) \geq \left(\frac{1}{2L} - \frac{1}{t}\right)\delta\varepsilon$$

puis:

$$a(g,0) = \lim_{t\to+\infty} M(g,t) \geq \frac{\delta\varepsilon}{2L} > 0.$$

(VI.3) On remarque que par linéarité:

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \quad a(f_1 - f_2, \lambda) \underset{(III.3)}{=} a(f_1,\lambda) - a(f_2,\lambda) = 0.$$

D'après (III.2), $|f_1 - f_2|^2 \in \overline{\mathcal{P}}$. De (IV.3.c) on déduit que

$$a(|f_1 - f_2|^2, 0) = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} |a(f_1 - f_2, \lambda)|^2 = 0.$$

Alors (VI.2.c) appliqué à $g = |f_1 - f_2|^2$ entraîne: $|f_1 - f_2|^2 = 0$, i.e. $f_1 = f_2$.

(VI.4) On pose $Sp(f) = \{\lambda_1, \cdot, \lambda_N\}$ et $g = \sum_{k=1}^N a(f,\lambda_k)\mathrm{e}_{\lambda_k}$. Pa construction: $g \in \mathcal{P} \subset \overline{\mathcal{P}}$ et $a(f,\lambda) = a(g,\lambda)$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$. De (VI.3) on déduit que $f = g \in \mathcal{P}$.

(VI.5) Soit $f \in \overline{\mathcal{P}}$ de spectre $Sp(f) = \{\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

(VI.5.a) On a:

$$\forall n \geq 0, \quad \|a(f,\lambda_n)\mathrm{e}_{\lambda_n}\|_\infty = |a(f,\lambda_n)|$$

où la série majorante est convergente. Comme $(C_b(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach, on en déduit que la série $\sum a(f,\lambda_n)\mathrm{e}_{\lambda_n}$ est normalement convergente dans $C_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Doit $g = \sum_{n\geq 0} a(f,\lambda_n)\mathrm{e}_{\lambda_n}$ sa somme. Par construction: $g \in \overline{\mathcal{P}}$ et $a(g,\lambda) = a(f,\lambda)$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$. De (VI.4) on déduit que $f = g$.

(VI.5.b) D'après (III.4.e): $\forall\lambda \in \mathbb{R}$,

$$a(f',\lambda) = i\lambda a(f,\lambda) \quad \text{et} \quad 0 \notin Sp(f) \Rightarrow a(f,\lambda) = \frac{1}{\lambda} a(f',\lambda).$$

On en déduit: $\forall N > 0$,

$$\sum_{n=0}^N |a(f,\lambda_n)| = \sum_{n=0}^N \frac{1}{|\lambda_n|}|a(f',\lambda_n)| \leq \left(\sum_{n=0}^N \frac{1}{\lambda_n^2}\right)^{1/2} (\sum_{n=0}^N |a(f',\lambda_n)|^2)^{1/2}.$$

Comme $f' \in \mathcal{P}$, il existe $n_0 > 0$ t.q. $\forall n \geq n_0$, $a(f', \lambda_n) = 0$. Il en résulte: $\forall N > 0$,

$$\sum_{n=0}^{N} |a(f, \lambda_n)| \leq \left(\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n^2} \right)^{1/2} (\sum_{n=0}^{n_0} |a(f', \lambda_n)|^2)^{1/2} < +\infty.$$

De (VI.5.a) on déduit que $f = \sum_{n \geq 0} a(f, \lambda_n) \mathrm{e}_{\lambda_n}$ et que la série est normalement convergente.