

I. Préliminaires

1. Soit $n, m \in \mathbb{N}$. On a:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2}\right) dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \cos((n+m+1)\pi x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \cos((n-m)\pi x) dx \end{aligned}$$

Si $n \neq m$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2}\right) dx &= \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin((n+m+1)\pi x)}{(n+m+1)\pi} \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2} \frac{\sin((n-m)\pi x)}{(n-m)\pi} \Big|_{x=0}^{x=1} = 0 \end{aligned}$$

Si $n = m$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right)^2 dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \cos((2n+1)\pi x)) dx = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{(2n+1)\pi} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

D'où le résultat:

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ \frac{1}{2} & \text{si } n = m. \end{cases}$$

2. Soit $\lambda > 0$.

(a) On a:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0 &\iff \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{N} \iff \sqrt{\lambda} = \frac{2}{(2n+1)\pi}, \quad n \in \mathbb{N}. \\ &\iff \lambda = \left(\frac{2}{(2n+1)\pi}\right)^2\end{aligned}$$

(b) Soit à résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$\lambda y'' + y = 0, \quad y(1) = y'(0) = 0.$$

On a:

$$\lambda y'' + y = 0 \iff y'' + \frac{y}{\lambda} = 0.$$

On est ramené à résoudre une équation homogène du second ordre à coefficients constants d'équation caractéristique associée:

$$r^2 + \frac{1}{\lambda} = 0 \iff r = \pm \frac{i}{\sqrt{\lambda}}.$$

On en déduit la solution générale à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$y(t) = ae^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}} + be^{\frac{-it}{\sqrt{\lambda}}}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

De la formule:

$$y'(t) = \frac{i}{\lambda} \left(ae^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}} - be^{\frac{-it}{\sqrt{\lambda}}} \right)$$

on déduit que

$$\begin{aligned}y(1) = y'(0) = 0 &\iff \begin{cases} ae^{\frac{i}{\sqrt{\lambda}}} + be^{\frac{-i}{\sqrt{\lambda}}} &= 0, \\ a - b &= 0. \end{cases} \\ &\iff a = b \quad \text{et} \quad a \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0\end{aligned}$$

D'après (a), si λ est de la forme $\lambda = \left(\frac{2}{(2n+1)\pi}\right)^2$ avec $n \in \mathbb{N}$, alors il y a une infinité de solutions données par:

$$y = a \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) = a \cos\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2}\right), \quad a \in \mathbb{C}$$

Simon, i.e. si $\lambda \notin \left\{ \left(\frac{2}{(2n+1)\pi} \right)^2, n \in \mathbb{N} \right\}$, alors $y = 0$ est l'unique solution.

La solution générale étant toujours de classe $\mathcal{C}^\infty$, on en d'eduit que:

$$g(t) = \begin{cases} a \cos \left(\frac{(2n+1)\pi t}{2} \right), & a \in \mathbb{C} \quad \text{si } \lambda \in \left\{ \left(\frac{2}{(2n+1)\pi} \right)^2, n \in \mathbb{N} \right\} \\ 0 & \text{si } \lambda \notin \left\{ \left(\frac{2}{(2n+1)\pi} \right)^2, n \in \mathbb{N} \right\} \end{cases}$$

3. (a)

$$F' = f$$

(b) Soit $x \in]0, 1[$ et soit $h \in \mathbb{R}^*$ t.q. $x + h \in]0, 1[$. On note $I_{x, x+h}$ l'intervalle d'extrémités x et $x + h$. On a:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_{I_{x, x+h}} (f(t) - f(x)) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_{I_{x, x+h}} |f(t) - f(x)| dt \right| \end{aligned}$$

Comme f est continue sur le compact $[0, 1]$, f y est aussi uniformément continue d'après le théorème de Heine. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta > 0$ t.q.

$$|t - s| \leq \eta \Rightarrow |f(t) - f(s)| \leq \varepsilon, \quad \forall t, s \in [0, 1]$$

On peut toujours choisir $\eta > 0$ suffisamment petit pour avoir en outre: $[x - \eta, x + \eta] \subset]0, 1[$. Soit alors $0 < |h| < \eta$. On note $I_{x, x+h}$ l'intervalle d'extrémités x et $x + h$. Alors:

$$I_{x, x+h} \subset [x - \eta, x + \eta] \Rightarrow \forall t \in I_{x, x+h}, \quad |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$$

et

$$\left| \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ a été choisi arbitrairement petit, il en résulte que F est dérivable sur $]0, 1[$ de dérivée $F' = f$.

Soit $h \in]0, \eta[$. Alors

$$[0, h] \subset]0, \eta[\Rightarrow |f(t) - f(0)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [0, h],$$

d'où:

$$\left| \frac{1}{h}(F(h) - F(0)) - f(0) \right| = \frac{1}{h} \left| \int_0^h (f(t) - f(0)) dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_0^h |f(t) - f(0)| dt \leq \varepsilon.$$

De même soit $h \in]-\eta, 0[$. Alors:

$$[h, 0] \subset]-\eta, 0[\Rightarrow |f(t) - f(1)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [1 - h, 1]$$

d'où:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h}(F(1 + h) - F(1)) - f(1) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_{1-|h|}^1 (f(t) - f(1)) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_{1-|h|}^1 |f(t) - f(1)| dt \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Il en résulte, ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, que F est dérivable en $t = 0$ et en $t = 1$ de dérivées $f(0)$, resp. $f(1)$.

Finalement F est dérivable sur $[0, 1]$ de dérivée $F' = f$.

4. (a) Soit $x \in H$ Par définition du produit scalaire sur H :

$$\|T(x)\|_H^2 = \langle T(x), T(x) \rangle_H = \langle T^* \circ T(x), x \rangle_H \leq \|T^* \circ T(x)\|_H \|x\|_H$$

- (b) Soit $x \in H \setminus \{0\}$. De (a), on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{\|T(x)\|_H^2}{\|x\|_H^2} &\leq \frac{\|T^* \circ T(x)\|_H}{\|x\|_H} \leq \|T^* \circ T\| \\ &\Rightarrow \|T\|^2 \leq \|T^* \circ T\| \end{aligned}$$

En particulier:

$$\|T\|^2 \leq \|T^*\| \|T\| \Rightarrow \|T\| \leq \|T^*\|$$

On remarque que par définition de l'adjoint T^* de T : $\forall x, y \in H$,

$$\langle T^*(x), y \rangle_H = \overline{\langle y, T^*(x) \rangle_H} = \overline{\langle T(y), x \rangle_H} = \langle x, T(y) \rangle_H$$

i.e.: $T^{**} = T$. Donc, en échangeant les rôles de T et T^* dans ce qui précède:

$$\|T\|^2 = \|T^* \circ T\| \quad \text{et} \quad \|T\| = \|T^*\|.$$

5. Soit $x \in H$. Par définition de la base hilbertienne $(b_n)_{n \geq 0}$, x se décompose de façon unique sous la forme:

$$x = \sum_{n \geq 0} x_n b_n \quad \text{avec} \quad \sum_{n \geq 0} |x_n|^2 < +\infty.$$

On pose:

$$x^{(N)} = \sum_{n=0}^N x_n b_n, \quad \forall N \geq 0.$$

Par hypothèse sur D_Λ :

$$D_\Lambda(x^{(N)}) = \sum_{n=0}^N x_n \lambda_n b_n, \quad \forall N \geq 0.$$

On remarque que la suite $(D_\Lambda(x^{(N)}))_{N \geq 0}$ est de Cauchy dans H . En effet: $\forall N, p \geq 1$,

$$\|D_\Lambda(x^{(N+p)}) - D_\Lambda(x^{(N)})\|_H^2 = \sum_{n=N+1}^{N+p} |x_n|^2 |\lambda_n|^2 \leq \|\Lambda\|_\infty^2 \sum_{n=N+1}^{N+p} |x_n|^2.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N_0 > 0$ t.q.

$$\sum_{n \geq N_0} |x_n|^2 \leq \varepsilon, \quad \forall N \geq N_0$$

et soit $N \geq N_0$. On a: $\forall p \geq 1$,

$$\|D_\Lambda(x^{(N+p)}) - D_\Lambda(x^{(N)})\|_H^2 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n|^2 \leq \varepsilon$$

ce qui montre que la suite $(D_\Lambda(x^{(N)}))_{N \geq 0}$ est de Cauchy dans H , donc convergente vers:

$$D_\Lambda(x) := \sum_{n \geq 0} \lambda_n x_n b_n \in H.$$

Soit $L : H \rightarrow H$ une autre application linéaire continue prolongeant D_Λ sur H et soit $x = \sum_{n \geq 0} x_n b_n \in H$. Par hypothèse:

$$L(x^{(N)}) = D_\Lambda(x^{(N)}), \quad \forall N \geq 0$$

ce qui entraîne, par continuité de L et de D_Λ sur H :

$$\|L(x) - D_\Lambda(x)\|_H = \lim_{N \rightarrow +\infty} \|L(x^{(N)}) - D_\Lambda(x^{(N)})\|_H = 0,$$

i.e. $L \equiv D_\Lambda$ et D_Λ est définie de façon unique sur H .

Soit $x = \sum_{n \geq 0} x_n b_n \in H$. On a:

$$\|D_\Lambda(x)\|_H^2 = \sum_{n \geq 0} |\lambda_n|^2 |x_n|^2 \leq \|\Lambda\|_\infty^2 \underbrace{\sum_{n \geq 0} |x_n|^2}_{=\|x\|_H^2}$$

donc $\|D_\Lambda\| \leq \|\Lambda\|_\infty$.

On suppose par l'absurde que $\|D_\Lambda\| < \|\Lambda\|_\infty$. Par définition de la borne supérieure il existe $n_0 > 0$ t.q.

$$\|D_\Lambda\| < |\lambda_{n_0}| \leq \|\Lambda\|_\infty.$$

et alors:

$$\frac{\|D_\Lambda(b_{n_0})\|}{\|b_{n_0}\|} = |\lambda_{n_0}| > \|D_\Lambda\|$$

ce qui contredit la définition de $\|D_\Lambda\|$. Donc $\|D_\Lambda\| = \|\Lambda\|_\infty$

II. Fonctions Γ et B

1. (a) Soit $s > 0$. La fonction $t \mapsto t^{s-1}e^{-t} > 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Au voisinage de $t = 0$:

$$t^{s-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{s-1}$$

avec

$$\int_0^1 t^{s-1} dt < +\infty \iff 1 - s < 1 \iff s > 0.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha+s-1}e^{-t} = 0 \Rightarrow t^{s-1}e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$$

avec

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1$$

indépendamment de la valeur de $s > 0$. Finalement, Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

- (b) Soit $s > 0$. On remarque que $\Gamma(s+1)$ est bien défini. On intègre par partie dans $\Gamma(s+1)$ pour obtenir:

$$\Gamma(s+1) = -t^s e^{-t} \Big|_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} + s\Gamma(s) = -\lim_{t \rightarrow +\infty} t^s e^{-t} + s\Gamma(s) = s\Gamma(s).$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1)} = \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k)} = \prod_{k=1}^n k = n!$$

avec $\Gamma(1) = 1 \Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$.

- (d) L'application $s \mapsto t^{s-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Soit $0 < \alpha < R$ et soit $s \in]\alpha, R[$. On a: $\forall t \in]0, 1[$,

$$0 < t^{s-1} e^{-t} = e^{(1-s)|\ln t| - t} \leq e^{(1-\alpha)|\ln t| - t} = t^{\alpha-1} e^{-t}$$

avec

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} e^{-t} dt < +\infty \quad \text{d'après (a).}$$

De même: $\forall t > 1$,

$$0 < t^{s-1} e^{-t} = e^{(s-1)|\ln t| - t} \leq e^{(R-1)|\ln t| - t} = t^{R-1} e^{-t}$$

avec

$$\int_1^{+\infty} t^{R-1} e^{-t} dt < +\infty \quad \text{d'après (a).}$$

Du Théorème de convergence dominée de Lebesgue on déduit que Γ est continue sur $]\alpha, R[$, $\forall 0 < \alpha < R$, donc continue sur $]0, +\infty[$.

2. (a) Soit $s, s' > 0$. L'application $t \mapsto t^{s-1}(1-t)^{s'-1}$ est définie et continue sur $]0, 1[$. On a:

$$t^{s-1}(1-t)^{s'-1} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{s-1}$$

avec

$$\int_0^1 t^{s-1} dt < +\infty \iff 1-s < 1 \iff s > 0.$$

De même:

$$t^{s-1}(1-t)^{s'-1} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} (1-t)^{s'-1}$$

avec

$$\int_0^1 (1-t)^{s'-1} dt < +\infty \iff 1-s' < 1 \iff s' > 0.$$

Donc B est bien définie sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ d'après le théorème de comparaison.

(b) i. Soit $(x', y') \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. On a:

$$\begin{cases} xy &= x', \\ x(1-y) &= y' \end{cases} \iff \begin{cases} x &= x' + y', \\ y &= \frac{x'}{x' + y'} \end{cases}$$

On vérifie qu'il y a une solution unique (x, y) et que cette solution est dans $]0, +\infty[\times]0, 1[$. Donc φ est une bijection de $]0, +\infty[\times]0, 1[$ sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. De plus φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[\times]0, 1[$ ainsi que sa réciproque φ^{-1} sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

ii. Soit $s > 0, s' > 0$. On a, d'après le théorème de Fubini:

$$B(s, s')\Gamma(s+s') = \int_{]0, +\infty[\times]0, 1[} (tu)^{s-1} ((1-t)u)^{s'-1} u e^{-u} du dt$$

Le changement de variable $(v, w) = \varphi(u, t)$ est bien défini d'après (a). Le Jacobien associé est défini par:

$$\frac{D(v, w)}{D(u, t)} = \begin{vmatrix} t & u \\ 1-t & -u \end{vmatrix} = -u.$$

On en déduit:

$$B(s, s')\Gamma(s+s') = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} v^{s-1} w^{s'-1} e^{-(v+w)} dv dw$$

i.e., en appliquant à nouveau le théorème de Fubini:

$$B(s, s')\Gamma(s+s') = \underbrace{\int_0^{+\infty} v^{s-1} e^{-v} dv}_{=\Gamma(s)} \underbrace{\int_0^{+\infty} w^{s'-1} e^{-w} dw}_{=\Gamma(s')} = \Gamma(s)\Gamma(s').$$

3. (a) Soit $n \geq 1$. On a:

$$I_n(0) = \int_0^1 e^{-2i\pi n u} du = \frac{1}{2i\pi n} (1 - e^{-2i\pi n}) = 0.$$

(b) Soit $\alpha \in]0, 1[$ et soit $n \geq 1$. On intègre par parties. Alors:

$$\alpha > 0 \Rightarrow I_n(\alpha) = -\frac{1}{2i\pi n} + \frac{\alpha}{2i\pi n} I_n(\alpha - 1)$$

avec

$$|I_n(\alpha - 1)| \leq \int_0^1 u^{\alpha-1} du = \frac{1}{\alpha}$$

donc

$$n|I_n(\alpha)| \leq \frac{1}{\pi} < +\infty$$

i.e.

$$I_n(\alpha) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

(c) Comme f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et que $C_\varepsilon \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, on a:

$$\int_{C_\varepsilon} f(z) dz = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

avec

$$\int_{C_\varepsilon} f(z) dz = \int_{[1, \varepsilon]} f(z) dz + \int_{\tilde{\gamma}_\varepsilon} f(z) dz + \int_{[-i\varepsilon, -i]} f(z) dz + \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

On a:

$$\int_{[1, \varepsilon]} f(z) dz = - \int_\varepsilon^1 u^\alpha e^{-2i\pi n u} du \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -I_n(\alpha).$$

$$\int_{\tilde{\gamma}_\varepsilon} f(z) dz = i\varepsilon \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(\varepsilon e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$$

avec

$$|f(\varepsilon e^{i\theta})| = \varepsilon^\alpha e^{2\pi n \varepsilon \sin \theta} \leq \varepsilon^\alpha, \quad \forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0].$$

donc $\alpha > -1 \Rightarrow$

$$\left| \int_{\tilde{\gamma}_\varepsilon} f(z) dz \right| \leq C \varepsilon^{\alpha+1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

$$\int_{[-i\varepsilon, -i]} f(z) dz = -i \int_\varepsilon^1 f(-it) dt = -i e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}} \int_\varepsilon^1 t^\alpha e^{-2\pi n t} dt$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} i e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}} \int_0^1 t^\alpha e^{-2\pi n t} dt = e^{-\frac{i\pi}{2}(\alpha+1)} \int_0^1 t^\alpha e^{-2\pi n t} dt \\ \int_{\gamma_1} f(z) dz &= i \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = i \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^{i(\alpha+1)\theta} e^{-2i\pi n e^{i\theta}} d\theta = R_n(\alpha). \end{aligned}$$

On en déduit, quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$0 = -I_n(\alpha) + e^{-\frac{i\pi}{2}(\alpha+1)} \int_0^1 t^\alpha e^{-2\pi n t} dt + R_n(\alpha),$$

i.e.:

$$I_n(\alpha) = e^{-\frac{i\pi}{2}(\alpha+1)} \int_0^1 t^\alpha e^{-2\pi n t} dt + R_n(\alpha).$$

(d) Soit $n \geq 1$. On a:

$$|R_n(\alpha)| \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^{2\pi n \sin \theta} d\theta.$$

Soit $\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2}[$. La croissance de $\theta \mapsto \sin \theta$ sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ entraîne

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\varepsilon} e^{2\pi n \sin \theta} d\theta \leq \frac{\pi}{2} e^{-2\pi n \sin \varepsilon} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right).$$

De plus:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + o_{\theta \rightarrow 0}(\theta^3)$$

donc il existe $K_\varepsilon > 0$ t.q.:

$$\sin \theta \leq \theta + K_\varepsilon |\theta|^3 \quad \forall \theta \in [-\varepsilon, 0].$$

Il en résulte:

$$\int_{-\varepsilon}^0 e^{2\pi n \sin \theta} d\theta \leq e^{K_\varepsilon \varepsilon^3} \int_{-\varepsilon}^0 e^{2\pi n \theta} d\theta = \frac{K_\varepsilon \varepsilon^3}{2\pi n} (1 - e^{-2\pi n \varepsilon}) \leq \frac{K_\varepsilon \varepsilon^3}{2\pi n}.$$

Finalement:

$$|R_n(\alpha)| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{K_\varepsilon \varepsilon^3}{2\pi n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right).$$

(e) Soit $\alpha \in]-1, 0[$. De (c) et (d) on déduit que

$$I_n(\alpha) - R_n(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\frac{i\pi}{2}(\alpha+1)} \int_0^1 u^\alpha e^{-2\pi n u} du$$

avec: $\forall n \geq 1$,

$$\int_0^1 u^\alpha e^{-2\pi n u} du \underset{t=2\pi n u}{=} \frac{1}{(2\pi n)^{\alpha+1}} \int_0^{2\pi n} t^\alpha e^{-t} dt.$$

Compte tenu de 1.(a):

$$\alpha + 1 > 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi n} t^\alpha e^{-t} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \Gamma(\alpha + 1),$$

et donc:

$$I_n(\alpha) - R_n(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\frac{i\pi}{2}(\alpha+1)} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(2\pi n)^{\alpha+1}}$$

De plus:

$$\alpha < 0 \Rightarrow n^{\alpha+1} R_n(\alpha) = O(n^\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

donc

$$I_n(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\frac{i\pi}{2}(\alpha+1)} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(2\pi n)^{\alpha+1}}$$

III. L'opérateur d'intégration sur $C([0, 1])$

1. (a) D'après I.3.(a), $J(f)$ est dérivable donc continue sur $[0, 1]$ pour tout $f \in C([0, 1])$. La linéarité de l'intégration permet de conclure que J est une application linéaire de $C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$.

Soit $f \in C([0, 1])$. On a:

$$|J(f)(x)| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq x \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty, \quad \forall x \in [0, 1],$$

donc

$$\|J(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty,$$

i.e. J est continue de norme $\|J\| \leq 1$. Le choix $f = 1 : t \mapsto 1$ donne:

$$J(f)(x) = x, \quad \forall x \in [0, 1] \Rightarrow \|J(f)\|_\infty = 1.$$

avec $\|f\|_\infty = 1$ et donc

$$\frac{\|J(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = 1.$$

Finalement: $\|J\| = 1$.

- (b) Comme J est linéaire on est ramené à montrer que $\text{Ker}(J) = \{0\}$.
Soit $f \in C([0, 1])$ t.q. $J(f) = 0$. Par dérivation et compte tenu de I.3.(a): $J(f)' = 0 = f$, donc $\text{Ker}(J) = \{0\}$.
- (c) L'application g définie sur $[0, 1]$ par:

$$g(x) = \left| x + \frac{1}{2} \right|, \quad \forall x \in [0, 1]$$

est continue mais non dérivable en $x = -\frac{1}{2}$, donc n'a pas d'antécédant par J dans $C([0, 1])$. Donc J n'est pas surjective.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et soit $f \in C([0, 1])$ t.q. $J(f) = \lambda f$. D'après I.3.(a), f est dérivable de dérivée:

$$f' = \frac{1}{\lambda} J(f)' = \frac{1}{\lambda} f \Rightarrow f' \in C([0, 1])$$

donc $f \in C^1([0, 1])$ et f est solution de l'équation différentielle du premier ordre:

$$\lambda y' - y = 0.$$

3. D'après 1.(b), J est injective, donc 0 n'est pas valeur propre de J . Donc si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de J alors $\lambda \neq 0$ et si $f \in C([0, 1])$ est valeur propre de J , d'après 2., f est une solution non nulle du problème de Cauchy:

$$\lambda y' - y = 0, \quad y(0) = 0.$$

Contradiction, donc J n'a pas de valeur propre.

4. (a) Soit $f \in C([0, 1])$ et soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété:

$$J^n(f) \in C^n([0, 1]) \quad \text{avec} \quad (J^n(f))^{(k)} = J^{n-k}(f), \quad k = 0, \dots, n.$$

On remarque que

$$J^0(f) = f \in C^0([0, 1])$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a:

$$J^{n+1}(f) = J(J^n(f)).$$

D'après I.3.(a), $J^{n+1}(f)$ est dérivable de dérivée:

$$J^{n+1}(f)' = J^n(f) \underset{\mathcal{P}(n)}{\in} C^n([0, 1]) \Rightarrow J^{n+1}(f) \in C^{n+1}([0, 1]).$$

Soit $k > 1$. On a:

$$\begin{aligned} (J^{n+1}(f))^{(k)} &= ((J(J^n(f)))')^{(k-1)} \underset{I.3.(a)}{=} (J^n(f))^{(k-1)} \\ &\underset{\mathcal{P}(n)}{=} J^{n-k+1}(f) \end{aligned}$$

i.e. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence sur $n \geq 0$ on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $\forall n \geq 0$;

(b) Soit $n \geq 1$ et soit $0 \leq k < n$. D'après (a):

$$(J^n(f))^{(k)}(0) = J^{n-k}(f)(0) \underset{n-k \geq 1}{=} J(J^{n-k-1}(f))(0) = 0$$

(c) Soit $n \geq 1$ et soit $x \in [0, 1]$. Comme $J^n(f)$ est de classe C^n sur $[0, 1]$, on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral sur $[0, x]$ ce qui donne:

$$\begin{aligned} J^n(f)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \underbrace{(J^n(f))^{(k)}(0)}_{\underset{(b)}{=} 0} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \underbrace{(J^n(f))^{(n)}(t)}_{\underset{(a)}{=} f} dt \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt \end{aligned}$$

5. (a) Soit $f \in C([0, 1])$ avec $\|f\|_\infty \leq 1$ et soit $x, y \in [0, 1]$, $x \leq y$. On a:

$$|J(f)(x) - J(f)(y)| = \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \int_x^y \underbrace{|f(t)|}_{\leq 1} dt \leq y - x = |x - y|$$

i.e. $J(f)$ est lipschitzienne de rapport 1.

(b) Soit $x \in [0, 1]$ et soit $f \in C([0, 1])$ t.q. $\|f\|_\infty \leq 1$. D'après (a):

$$|J(f)(x)| = |J(f)(x) - J(f)(0)| \underset{(a)}{\leq} |x| \leq 1.$$

On en déduit que l'ensemble

$$\{J(f)(x), \quad f \in C([0, 1]), \quad \|f\|_\infty \leq 1\} \subset \{z \in \mathbb{C}, \quad |z| \leq 1\}$$

est borné dans $\mathbb{C}$ donc relativement compact.

De plus, d'après (a): $\forall x, y \in [0, 1], \forall f \in C([0, 1])$ t.q. $\|f\|_\infty \leq 1$,

$$|J(f)(x) - J(f)(y)| \leq |x - y|$$

i.e. l'image par J de la boule unité de $C([0, 1])$ est équicontinue sur $[0, 1]$. Du Théorème d'Ascoli on déduit que l'image par J de la boule unité de $C([0, 1])$ est un compact de $C([0, 1])$, i.e. que l'application J est compacte.

IV. L'opérateur d'intégration sur $L^2(0, 1)$.

1. (a) Soit $f \in L^2(0, 1)$ et soit $x, y \in [0, 1], x \leq y$. On a:

$$\begin{aligned} |V(f)(x) - V(f)(y)| &= \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \int_x^y |f(t)| dt \leq \sqrt{y-x} \left(\int_x^y |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{y-x} \|f\|_2. \end{aligned}$$

On en déduit que $V(f)$ est continue sur $[0, 1]$ et donc $V(L^2(0, 1)) \subset C([0, 1])$.

On remarque que: $\forall f \in C([0, 1])$,

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq \|f\|_\infty^2 < +\infty$$

i.e. que $C([0, 1]) \subset L^2(0, 1)$. On en déduit, par linéarité de l'intégration, que V est une application linéaire de $L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$.

Soit $f \in L^2(0, 1)$. On a:

$$\|V(f)\|^2 = \int_0^1 |V(f)(x)|^2 dx = \|V(f)\|^2 = \int_0^1 \left| \int_0^x f(t) dt \right|^2 dx \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 \left| \int_0^x f(t) dt \right|^2 dx \leq \int_0^1 \left(\int_0^x dt \right) \left(\int_0^x |f(t)|^2 dt \right) dx \leq \\
&\leq \int_0^1 x \|f\|_2^2 dx \leq \|f\|_2^2 \\
&\Rightarrow \|V(f)\|_2 \leq \|f\|_2.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|V\| = \sup_{f \in L^2(0,1) \setminus \{0\}} \frac{\|V(f)\|_2}{\|f\|_2} \leq 1 < +\infty$$

i.e. que $V : (L^2(0,1), \|\cdot\|_2) \rightarrow (L^2(0,1), \|\cdot\|_2)$ est continue de norme ≤ 1 .

(b) Soit $f, g \in L^2(0,1)$. On a:

$$\int_0^1 V(f)(x) \overline{g(x)} dx = \int_0^1 \int_0^x f(t) \overline{g(x)} dt dx$$

avec:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^x |f(t)| |\overline{g(x)}| dt dx = \int_0^1 \int_0^x |f(t)| dt |g(x)| dx \leq \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)| dt \right) |g(x)| dx \leq \|f\|_2 \|g\|_2 < +\infty.
\end{aligned}$$

On en déduit, d'après le théorème de Fubini:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 V(f)(x) \overline{g(x)} dx = \int_0^1 \int_0^x f(t) \overline{g(x)} dt dx = \iint_{\{0 \leq t \leq x \leq 1\}} f(t) \overline{g(x)} dt dx = \\
&= \iint_{\{0 \leq t \leq x \leq 1\}} f(t) \overline{g(x)} dx dt = \int_0^1 \int_t^1 f(t) \overline{g(x)} dx dt = \int_0^1 f(t) \underbrace{\left(\int_t^1 g(x) dx \right)}_{=V^*(g)(t)} dt,
\end{aligned}$$

i.e., par définition de l'adjoint:

$$V^*(f)(x) = \int_x^1 f(t) dt, \quad \forall f \in L^2(0,1), \quad \text{p.p.t } x \in]0,1[$$

2. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et soit $h \in L^2(0, 1) \setminus \{0\}$ t.q. $V^* \circ V(h) = \lambda h$. Par hypothèse, en notant $H = L^2(0, 1)$:

$$\langle V^* \circ V(h), h \rangle_H = \lambda \langle h, h \rangle_H = \lambda \|h\|_2^2.$$

D'autre part, par définition de l'adjoint:

$$\langle V^* \circ V(h), h \rangle_H = \|V(h)\|_2^2 \Rightarrow \lambda \|h\|_2^2 = \|V(h)\|_2^2,$$

i.e.:

$$\lambda =_{h \neq 0} \frac{\|V(h)\|_2^2}{\|h\|_2^2} \in]0, +\infty[.$$

- (b) Soit $f \in C([0, 1])$ un représentant continu de h , i.e. vérifiant $f(x) = h(x)$ p.p.t. $x \in [0, 1]$. En particulier:

$$\lambda f(x) = V^* \circ V(f)(x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

Soit $x \in [0, 1]$. Compte tenu de 1.(b):

$$\lambda f(x) = \int_x^1 V(f)(t) dt = \int_0^1 V(f)(t) dt - V^2(f)(x)$$

avec, par définition de l'adjoint:

$$\int_0^1 V(f)(t) t dt = \int_0^1 f(t) V^*(1)(t) dt = \int_0^1 f(t) \left(\int_t^1 ds \right) dt = \int_0^1 (1-t) f(t) dt$$

Il en résulte:

$$\lambda f = \underbrace{\int_0^1 (1-t) f(t) dt}_{=: c_f} - V^2(f).$$

- (c) Par définition de V^* et de f :

$$\lambda f(1) = V^*(V(f))(1) = 0 \xRightarrow{\lambda \neq 0} f(1) = 0.$$

De (b) et de III.4.(a), on déduit que f est de classe C^2 de dérivées:

$$\lambda f' = -V(f) \Rightarrow \lambda f'(0) = -V(f)(0) = 0 \xRightarrow{\lambda \neq 0} f'(0) = 0$$

$$\lambda f'' = -V^0(f) = -f.$$

D'après I.2.(b), les valeurs admissibles pour $\lambda > 0$ sont les réels:

$$\lambda_n = \left(\frac{2}{(2n+1)\pi} \right)^2, \quad n \geq 0,$$

le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_n étant la droite vectorielle de vecteur directeur l'application:

$$t \mapsto \cos \left(\frac{(2n+1)\pi t}{2} \right).$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Par définition:

$$\begin{aligned} \hat{G}(n) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G(x) e^{-2i\pi n x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} g(2x) e^{-i(2n+1)\pi x} dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 g(-2x) e^{-i(2n+1)\pi x} dx = \\ &\stackrel{t=2x}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 g(t) e^{-i(n+\frac{1}{2})\pi t} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 g(t) e^{i(n+\frac{1}{2})\pi t} dt = \\ &= \int_0^1 g(t) \cos \left(\frac{(2n+1)\pi t}{2} \right) dt \end{aligned}$$

(b) Soit $g \in L^2(0, 1)$ t.q. $\langle g, f_n \rangle_H = 0, \forall n \geq 0$. De (a), on déduit que $\hat{G}(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{Z}, n \leq -1$. Alors $|n| = -n \geq 1$ et

$$\begin{aligned} \hat{G}(n) &= \int_0^1 g(t) \cos \left(\frac{(-2|n|+1)\pi t}{2} \right) dt = \int_0^1 g(t) \cos \left(\frac{(2|n|-1)\pi t}{2} \right) dt = \\ &= \int_0^1 g(t) \cos \left(\frac{(2(|n|-1)+1)\pi t}{2} \right) dt = \hat{G}(|n|-1) \stackrel{|n|-1 \geq 0}{=} 0 \end{aligned}$$

i.e. $\hat{G}(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. Comme $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(0, 1)$, il en résulte que $G = 0$, d'où en particulier:

$$g(2t) = 0, \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{2} \right]$$

i.e.: $g = 0$ p.p. dans $[0, 1]$. Il en résulte que

$$\overline{\text{Vect}\{f_n, n \in \mathbb{Z}\}}^\perp = \{0\}$$

et donc

$$\overline{\text{Vect}\{f_n, n \in \mathbb{Z}\}} = \overline{\text{Vect}\{f_n, n \in \mathbb{Z}\}}^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = L^2(0, 1).$$

Comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi orthonormée d'après I.1, on en déduit que c'est une base hilbertienne de $L^2(0, 1)$.

4. En appliquant I.5. avec $H = L^2(0, 1)$, $D_\Lambda = V$, $b_n = f_n$, $\forall n \geq 0$, on obtient

$$\|V^* \circ V\| = \|\Lambda\|_\infty = \sup_{n \geq 0} \left(\frac{2}{(2n+1)\pi} \right)^2 = \frac{4}{\pi^2}.$$

5. De I.4., on déduit que

$$\|V\| = \sqrt{\|V^* \circ V\|} = \frac{2}{\pi}.$$

V. Un semi-groupe d'opérateurs

1. Soit $w \in L^1(0, 1)$ et soit $f \in L^p(0, 1)$ avec $p \geq 1$, On a: $\forall x \in [0, 1]$,

$$|w * f(x)| \leq \int_0^x |w(x-t)| |f(t)| dt \leq \int_0^1 |w(x-t)| |f(t)| dt =: \tilde{f}(x)$$

En prolongeant w et f par 0 en-dehors de $]0, 1[$, on déduit des propriétés du produit de convolution sur $\mathbb{R}$ que $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R})$, et donc que $w * f \in L^p(0, 1)$.

2. (a) Soit $s > 0$ et soit $f \in L^2(0, 1)$. On remarque que $p_{s-1} \in L^1(0, 1)$. De 1., on déduit que $p_{s-1} * f$ est bien définie sur $[0, 1]$ et que $p_{s-1} * f \in L^2(0, 1)$. Il en résulte que $V_s(f) = \frac{1}{\Gamma(s)} p_{s-1} * f$ est bien définie sur $[0, 1]$ et que $V_s(f) \in L^2(0, 1)$. Par linéarité de l'intégration, V_s est une application linéaire de $L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$. De 1., on déduit aussi que

$$\|V_s(f)\|_2 = \frac{1}{\Gamma(s)} \|p_{s-1} * f\|_2 \leq \frac{\|p_{s-1}\|_1}{\Gamma(s)} \|f\|_2$$

avec

$$\|p_{s-1}\|_1 = \int_0^1 t^{s-1} ds = \frac{1}{s} > 0$$

donc

$$\begin{aligned}\|V_s(f)\|_2 &\leq \frac{1}{s\Gamma(s)}\|f\|_2 \stackrel{II.1.(b)}{=} \frac{1}{\Gamma(s+1)}\|f\|_2 \\ \Rightarrow \|V_s\| &\leq \frac{1}{\Gamma(s+1)}.\end{aligned}$$

(b) Soit $n \geq 0$ et soit $s > 0$. On a:

$$V_s(p_n) = \frac{p_{s-1} * p_n}{\Gamma(s)}$$

avec: $\forall x \in [0, 1]$,

$$p_{s-1} * p_n(x) = \int_0^x (x-t)^{s-1} t^n dt = \left[-t^n \frac{(x-t)^s}{s} \right]_{t=0}^{t=x} + \frac{n}{s} p_s * p_{n-1}(x) = \frac{n}{s} p_s * p_{n-1}(x)$$

d'où:

$$V_s(p_n) = n \frac{p_s * p_{n-1}}{s\Gamma(s)} \stackrel{II.1.(b)}{=} n \frac{p_s * p_{n-1}}{\Gamma(s+1)}.$$

On en déduit, par récurrence sur $n \geq 0$:

$$V_s(p_n) = n! \frac{p_{s+n-1} * p_0}{\Gamma(s+n)}$$

avec: $\forall x \in [0, 1]$,

$$p_{s+n-1} * p_0(x) = \int_0^x (x-t)^{s+n-1} dt = \frac{x^{s+n}}{s+n}$$

donc

$$V_s(p_n) = \frac{n!}{(s+n)\Gamma(s+n)} p_{n+s} = \frac{n!}{\Gamma(s+n+1)} p_{n+s}.$$

(c) On a:

$$\|V_s(p_n) - p_n\|_2 = \left\| \left(\frac{n!}{\Gamma(n+s+1)} p_s - 1 \right) p_n \right\|_2 \leq \left\| \frac{n!}{\Gamma(n+s+1)} p_s - 1 \right\|_2$$

avec

$$\left\| \frac{n!}{\Gamma(n+s+1)} p_s - 1 \right\|_2^2 = \int_0^1 \left(\frac{n!}{\Gamma(n+s+1)} p_s(x) - 1 \right)^2 dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(\frac{n!}{\Gamma(n+s+1)} \right)^2 x^{2s} dx - 2 \int_0^1 \frac{n!}{\Gamma(n+s+1)} x^s dx + 1 \\
&= \left(\frac{n!}{\Gamma(n+s+1)} \right)^2 \frac{1}{(2s+1)} - \frac{2}{(s+1)} \frac{n!}{\Gamma(n+s+1)} + 1
\end{aligned}$$

avec, compte tenu de II.1.(d):

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{n!}{\Gamma(n+s+1)} = \frac{n!}{\Gamma(n+1)} \stackrel{II.1.(c)}{=} \frac{n!}{n!} = 1$$

On en déduit:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\| \frac{n!}{\Gamma(n+s+1)} p_s - 1 \right\|_2^2 = 0$$

puis, par le Théorème des Gendarmes:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|V_s(p_n) - p_n\|_2 = 0.$$

- (d) Soit $f \in L^2(0, 1)$ et soit $g \in C([0, 1])$ un représentant continu de f .
 Soit $\varepsilon > 0$. D'après le Théorème de densité de Stone-Weierstrass,
 il existe un polynôme $P_\varepsilon \in \mathbb{C}[X]$ t.q.

$$\|g - P_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Alors:

$$\begin{aligned}
\|V_s(f) - f\|_2 &= \|V_s(g) - g\|_2 \leq \|V_s(g) - V_s(P_\varepsilon)\|_2 + \|V_s(P_\varepsilon) - P_\varepsilon\|_2 + \|P_\varepsilon - V_s(P_\varepsilon)\|_2 \\
&\stackrel{v.2.(a)}{\leq} \left(\frac{1}{\Gamma(s+1)} + 1 \right) \underbrace{\|g - P_\varepsilon\|_2}_{\leq \varepsilon} + \|P_\varepsilon - V_s(P_\varepsilon)\|_2
\end{aligned}$$

On pose: $N_\varepsilon = \deg(P_\varepsilon)$ et

$$P_\varepsilon = \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} a_n p_n.$$

Alors, par linéarité de V_s :

$$\|P_\varepsilon - V_s(P_\varepsilon)\|_2 = \left\| \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} a_n (V_s(p_n) - p_n) \right\|_2 \leq \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |a_n| \|V_s(p_n) - p_n\|_2 \xrightarrow[s \rightarrow 0^+]{(c)} 0$$

On en déduit:

$$\limsup_{s \rightarrow 0^+} \|V_s(f) - f\|_2 \leq \left(\frac{1}{\Gamma(1)} + 1 \right) \varepsilon \stackrel{II.1.(c)}{=} 2\varepsilon.$$

Ceci étant vrai $\forall \varepsilon > 0$, on en déduit que

$$\limsup_{s \rightarrow 0^+} \|V_s(f) - f\|_2 = \liminf_{s \rightarrow 0^+} \|V_s(f) - f\|_2 = \lim_{s \rightarrow 0^+} \|V_s(f) - f\|_2 = 0$$

(e) Soit $s_1, s_2 > 0$ et soit $f \in L^2(0, 1)$. On a:

$$V_{s_1} \circ V_{s_2}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)} \int_0^x (x-t)^{s_1-1} \int_0^t (t-u)^{s_2-1} f(u) du dt$$

avec

$$0 \leq \int_0^x (x-t)^{s_1-1} \int_0^t (t-u)^{s_2-1} |f(u)| du dt < +\infty.$$

Du Théorème de Fubini on déduit:

$$\begin{aligned} V_{s_1} \circ V_{s_2}(f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)} \iint_{\{0 \leq u \leq t \leq x\}} (x-t)^{s_1-1} \int_0^t (t-u)^{s_2-1} f(u) dt du = \\ &= \frac{1}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)} \int_0^x \int_u^x (x-t)^{s_1-1} (t-u)^{s_2-1} dt f(u) du. \end{aligned}$$

Soit $u \in [0, x]$. On a:

$$\begin{aligned} \int_u^x (x-t)^{s_1-1} (t-u)^{s_2-1} dt &= \int_u^x (x-u-(t-u))^{s_1-1} (t-u)^{s_2-1} dt = \\ &\stackrel{v=t-u}{=} \int_0^{x-u} (x-u-v)^{s_1-1} v^{s_2-1} dv \stackrel{v=(x-u)\zeta}{=} (x-u)^{s_1+s_2-1} \underbrace{\int_0^1 (1-\zeta)^{s_1-1} \zeta^{s_2-1} d\zeta}_{=B(s_1, s_2)} = \\ &= p_{s_1+s_2-1}(x-u) B(s_1, s_2) \end{aligned}$$

Il en résulte:

$$V_{s_1} \circ V_{s_2}(f)(x) = \frac{B(s_1, s_2)}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)} \int_0^x p_{s_1+s_2-1}(x-u) f(u) du$$

$$\stackrel{II.2.(b).ii}{=} \frac{1}{\Gamma(s_1 + s_2)} p_{s_1+s_2-1} * f(x)$$

i.e.:

$$V_{s_1} \circ V_{s_2}(f) = \frac{1}{\Gamma(s_1 + s_2)} p_{s_1+s_2-1} * f = V_{s_1+s_2}(f).$$

et $(V_s)_{s>0}$ est un semi-groupe.

3. (a) Par hypothèse la suite $(T_1(x_n))_{n \geq 0}$ est dans un compact de H donc il existe une suite extraite $(x_{\varphi_1(n)})_{n \geq 0}$ et $y_1 \in H$ t.q.:

$$T_1(x_{\varphi_1(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y_1 \quad \text{dans } H.$$

De même il existe une suite extraite $(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)})_{n \geq 0}$ et $y_2 \in H$ t.q.:

$$T_2(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y_2 \quad \text{dans } H.$$

Par récurrence sur $k \geq 0$, il existe une suite extraite $(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)})_{n \geq 0}$ et $y_k \in H$ t.q.:

$$T_k(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y_k \quad \text{dans } H.$$

On pose:

$$\varphi(n) = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_n(n), \quad \forall n \geq 0.$$

Alors, pour tout $k \geq 0$, la suite $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ est extraite de $(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)})_{n \geq 0}$ et on en déduit:

$$T_k(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y_k \quad \text{dans } H.$$

- (b) Soit $k, p \geq 0$. Avec les notations de (a):

$$\|y_{k+p} - y_k\|_H = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_{k+p}(x_{\varphi(n)}) - T_k(x_{\varphi(n)})\|_H \leq \|T_{k+p} - T_k\|$$

où la suite $(T_k)_{k \geq 0}$ est convergente vers T donc de Cauchy. On en déduit que la suite $(y_k)_{k \geq 0}$ est de Cauchy dans H donc convergente vers une limite $y \in H$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $k_0 > 0$ t.q.:

$$\|T - T_k\| + \|y_k - y\|_H \leq \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0$$

et soit $k \geq k_0$. On a:

$$\begin{aligned} \|T(x_{\varphi(n)}) - y\|_H &\leq \|T(x_{\varphi(n)}) - T_k(x_{\varphi(n)})\|_H + \|T_k(x_{\varphi(n)}) - y_k\|_H + \|y_k - y\|_H \\ &\leq \|T - T_k\| + \|T_k(x_{\varphi(n)}) - y_k\|_H + \|y_k - y\|_H \leq 2\varepsilon + \|T_k(x_{\varphi(n)}) - y_k\|_H. \end{aligned}$$

On en déduit:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|T(x_{\varphi(n)}) - y\|_H \leq 2\varepsilon.$$

Ceci est vrai $\forall \varepsilon > 0$, donc

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|T(x_{\varphi(n)}) - y\|_H = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|T(x_{\varphi(n)}) - y\|_H = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T(x_{\varphi(n)}) - y\|_H = 0,$$

et la suite $(T(x_n))_{n \geq 0}$ est dans un compact de H . La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ étant arbitrairement choisie dans la boule unité de H , on en déduit que l'application T est compacte.

4. (a) L'application K_n est linéaire par linéarité de l'intégration. Soit $f \in L^2(0, 1)$. On a:

$$|K_n(f)(x)| \leq \|f\|_2 \|Q_n(x - \cdot)\|_2, \quad \forall x \in [0, 1],$$

donc:

$$\int_0^1 |K_n(f)(x)|^2 dx \leq \|f\|_2^2 \int_0^1 \|Q_n(x - \cdot)\|_2^2 dx$$

avec, d'après le Théorème de Fubini:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|Q_n(x - \cdot)\|_2^2 dx &= \int_0^1 \int_0^1 |Q_n(x - u)|^2 du dx \stackrel{y=x-u}{=} \int_0^1 \int_{x-1}^x |Q_n(y)|^2 dy dx \\ &\leq \int_{-1}^1 |Q_n(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

Il en résulte:

$$\int_0^1 |K_n(f)(x)|^2 dx \leq \|f\|_2^2 \int_{-1}^1 |Q_n(y)|^2 dy < +\infty,$$

i.e. $K_n(f) \in L^2(0, 1)$ et

$$\|K_n(f)\|_2 \leq \|f\|_2 \|Q_n\|_{L^2(-1,1)}.$$

Donc K_n est continue de $L^2(0, 1)$ dans $L^2(0, 1)$.

Soit $f \in L^2(0, 1)$ et soit $n \geq 0$. On remarque que pour presque tout $u \in [0, 1]$, l'application $x \mapsto Q_n(x - u)$ est continue sur $[0, 1]$ et que:

$$|f(u)Q_n(x - u)| \leq |f(u)| \sup_{|y| \leq 1} |Q_n(y)|$$

avec $f \in L^2(0, 1)$ par hypothèse. D'après le Théorème de Convergence Dominée de Lebesgue $K_n(f)$ est continue sur $[0, 1]$, donc $K_n(L^2(0, 1)) \subset C([0, 1])$. Soit $x \in [0, 1]$. On a: $\forall f \in L^2(0, 1)$,

$$|K_n(f)(x)| \leq \|f\|_2 \|Q_n(x - \cdot)\|_2$$

donc

$$\{K_n(f)(x), \quad f \in L^2(0, 1), \quad \|f\|_2 \leq 1\}$$

est relativement compact dans $\mathbb{C}$. De plus, $\forall x, y \in [0, 1], \forall f \in L^2(0, 1)$,

$$\begin{aligned} |K_n(f)(x) - K_n(f)(y)| &= \left| \int_0^1 f(u)(Q_n(x - u) - Q_n(y - u))du \right| \leq \\ &\leq \|f\|_2 \|Q_n(x - \cdot) - Q_n(y - \cdot)\|_2. \end{aligned}$$

L'application Q_n est continue sur $\mathbb{R}$, donc uniformément continue sur le compact $[-1, 1]$. On en déduit que l'ensemble

$$\{K_n(f), \quad f \in L^2(0, 1), \quad \|f\|_2 \leq 1\}$$

est uniformément équicontinue sur $[0, 1]$. Il en résulte que K_n transforme la boule unité de $L^2(0, 1)$ en un compact de $C([0, 1])$ d'après le Théorème d'Ascoli. Soit $(f_k)_{k \geq 0} \in L^2(0, 1)^{\mathbb{N}}$ t.q. $\|f_k\|_2 \leq 1, \forall k \geq 0$. Il existe donc une suite extraite $(f_{\varphi(k)})_{k \geq 0}$ et une application $g \in C([0, 1]) \subset L^2(0, 1)$ t.q.:

$$K_n(f_{\varphi(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} g \quad \text{dans} \quad C([0, 1]).$$

On a aussi: $\forall k \geq 0$,

$$\|K_n(f_{\varphi(k)}) - g\|_2 \leq \|K_n(f_{\varphi(k)}) - g\|_{\infty} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

i.e. $K_n(f_{\varphi(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} g$ dans $L^2(0, 1)$. Donc K_n transforme la boule unité de $L^2(0, 1)$ en un compact de $L^2(0, 1)$, i.e. l'application linéaire continue K_n est compacte de $L^2(0, 1)$ dans $L^2(0, 1)$.

(b) Soit $s > 0$, soit $n \geq 0$ et soit $f \in L^2(0, 1)$. Soit $x, u \in [0, 1]$. On remarque que:

$$0 \leq u \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x - u \leq 1 - u \leq 1$$

$$0 \leq x \leq u \leq 1 \Rightarrow 0 \leq u - x \leq 1 - x \leq 1$$

d'où on déduit que

$$V_s(f)(x) = \int_0^1 \psi_s(x - u) f(u) du.$$

Il en résulte:

$$\begin{aligned} |V_s(f)(x) - K_n(f)(x)| &= \left| \int_0^1 (\psi_s(x - u) - Q_n(x - u)) f(u) du \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 |\psi_s(x - u) - Q_n(x - u)| |f(u)| du \\ &\leq \left(\int_0^1 |\psi_s(x - u) - Q_n(x - u)| du \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |\psi_s(x - u) - Q_n(x - u)| |f(u)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

avec:

$$\int_0^1 |\psi_s(x - u) - Q_n(x - u)| du \stackrel{y=x-u}{=} \int_{x-1}^x |\psi_s(y) - Q_n(y)| dy \leq \|\psi - Q_n\|_{L^1(-1,1)},$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 |V_s(f)(x) - K_n(f)(x)|^2 dx &\leq \\ &\leq \|\psi_s - Q_n\|_{L^1(-1,1)} \left(\int_0^1 \int_0^1 |\psi_s(x - u) - Q_n(x - u)| |f(u)|^2 du dx \right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^1 |\psi_s(x - u) - Q_n(x - u)| |f(u)|^2 du dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 |\psi_s(x - u) - Q_n(x - u)| dx \right) |f(u)|^2 du \end{aligned}$$

et, $\forall u \in [0, 1]$,

$$\int_0^1 |\psi_s(x-u) - Q_n(x-u)| dx \underset{y=x-u}{=} \int_{-u}^{1-u} |\psi_s(y) - Q_n(y)| dy \leq \|\psi_s - Q_n\|_{L^1(-1,1)}$$

donc

$$\int_0^1 |V_s(f)(x) - K_n(f)(x)|^2 dx \leq \|\psi_s - Q_n\|_{L^1(-1,1)}^2 \|f\|_2^2$$

i.e.:

$$\|V_s(f) - K_n(f)\|_2 \leq \|\psi_s - Q_n\|_{L^1(-1,1)} \|f\|_2$$

- (c) Soit $s > 0$ et soit $\varepsilon > 0$. Par densité de $\mathcal{D}(-1, 1)$ dans $L^1(-1, 1)$, on peut trouver une application régulière $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(-1, 1)$ t.q.

$$\|\psi_s - \varphi_\varepsilon\|_{L^1(-1,1)} < \varepsilon.$$

D'après le théorème de Stone-Weierstrass, il existe un polynôme P_ε t.q.

$$\|\varphi_\varepsilon - P_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$$

et alors:

$$\|\psi_s - P_\varepsilon\|_{L^1(-1,1)} < 2\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, n en déduit l'existence d'une suite de polynômes $(Q_n)_{n \geq 0}$ t.q.

$$\|\psi_s - Q_n\|_{L^2(-1,1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

De (b) on déduit que la suite d'opérateurs compacts $(K_n)_{n \geq 0}$ associés dans (a) vérifie:

$$\|V_s - K_n\| \leq \|\psi_s - Q_n\|_{L^2(-1,1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

De 3.(b) on déduit que V_s est compact de $L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$.

VI. Opérateurs de Hilbert-Schmidt

1. Soit $T \in \mathcal{H}_s(H)$ et soit $(b_n)_{n \geq 0}$ une base hilbertienne de H t.q.

$$\sum_{n \geq 0} \|T(b_n)\|_H^2 < +\infty.$$

Soit $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ une base hilbertienne de H . On a:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \|T(\gamma_n)\|_H^2 &= \sum_{n \geq 0} \left\| \sum_{k \geq 0} \langle \gamma_n, b_k \rangle T(b_k) \right\|_H^2 \leq \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k \geq 0} |\langle \gamma_n, b_k \rangle|^2 \right) \left(\sum_{k \geq 0} \|T(b_k)\|_H^2 \right) \\ &= \underbrace{\left(\sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} |\langle \gamma_n, b_k \rangle|^2 \right)}_{=\|b_k\|_H^2=1} \left(\sum_{k \geq 0} \|T(b_k)\|_H^2 \right) = \sum_{k \geq 0} \|T(b_k)\|_H^2 < +\infty \end{aligned}$$

La réciproque est immédiate.

2. (a) Soit $x = \sum_{k \geq 0} x_k b_k \in H$ On a:

$$\begin{aligned} \|T(x) - S_n(x)\|_H &\leq \sum_{k \geq n+1} |x_k| \|T(b_k)\|_H \leq \underbrace{\left(\sum_{k \geq n+1} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq \|x\|_H} \left(\sum_{k \geq n+1} \|T(b_k)\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow \|T - S_n\| \leq \left(\sum_{k \geq n+1} \|T(b_k)\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

- (b) On note B_H la boule unité fermée de H . Soit $x \in B_H$ et soit $n \geq 0$. On a:

$$\begin{aligned} \|S_n(x)\|_H &\leq \sum_{k=0}^n |x_k| \|T(b_k)\|_H \leq \underbrace{\left(\sum_{k=0}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq \|x\|_H \leq 1} \left(\sum_{k=0}^n \|T(b_k)\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^n \|T(b_k)\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

On en déduit que $S_n(B_H)$ est borné pour la norme induite par celle de H dans $\text{Im}(S_n)$ qui est un ev de dimension finie, i.e. $S_n(B_H)$ est une partie relativement compacte de $\text{Im}(S_n)$. Donc S_n est compacte. De (a) et de 1., on déduit en outre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T - S_n\| = 0.$$

et donc que T est compacte d'après V.3.(b).

3. (a) Soit $s \in]0, 1[$. On remarque que: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\langle V_s(e_{-n}), e_{-n} \rangle_2 = \langle V_s(\overline{e_n}), \overline{e_n} \rangle_2 = \overline{\langle V_s(e_n), e_n \rangle_2}$$

Donc quitte à remplacer $\langle V_s(e_n), e_n \rangle_2$ par $\overline{\langle V_s(e_n), e_n \rangle_2}$, on peut supposer que $n \geq 1$. On a:

$$\begin{aligned} \langle V_s(e_n), e_n \rangle_2 &= \int_0^1 V_s(e_n)(x) \overline{e_n(x)} dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \int_0^x (x-t)^{s-1} e^{-2i\pi n(x-t)} dt dx \\ &\stackrel{u=x-t}{=} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \int_0^x u^{s-1} e^{-2i\pi nu} du dx \end{aligned}$$

On remarque que $s > 0$ donc $u \mapsto u^{s-1}$ est dans $L^1(0, 1)$ et on peut appliquer le Théorème de Fubini:

$$\begin{aligned} \langle V_s(e_n), e_n \rangle_2 &= \frac{1}{\Gamma(s)} \iint_{\{0 \leq u \leq x \leq 1\}} u^{s-1} e^{-2i\pi nu} du dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \iint_{\{0 \leq u \leq x \leq 1\}} u^{s-1} e^{-2i\pi nu} dx du = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 (1-u) u^{s-1} e^{-2i\pi nu} du = \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} (I_n(s-1) - I_n(s)). \end{aligned}$$

D'après II.3.(e):

$$\frac{I_n(s)}{I_n(s-1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)} \frac{(2\pi n)^{s+1}}{(2\pi n)^s} e^{-i(s+1)\frac{\pi}{2}} e^{is\frac{\pi}{2}} \stackrel{II.1.(b)}{=} \frac{s}{2\pi n} e^{-i\frac{\pi}{2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.$$

Il en résulte:

$$\langle V_s(e_n), e_n \rangle_2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\Gamma(s)} I_n(s-1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-is\frac{\pi}{2}}}{(2\pi n)^s} \stackrel{II.3.(e)}{}$$

(b) On suppose que V_s est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Alors:

$$\forall n \geq 1,$$

$$|\langle V_s(e_n), e_n \rangle_2| \leq \|V_s(e_n)\|_2$$

donc

$$\sum_{n \geq 1} |\langle V_s(e_n), e_n \rangle_2|^2 \leq \sum_{n \geq 1} \|V_s(e_n)\|_2^2 < +\infty$$

avec, compte tenu de (a):

$$|\langle V_s(e_n), e_n \rangle_2|^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(2\pi n)^{2s}}.$$

On en déduit que nécessairement: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2s}} < +\infty$, i.e. $s > \frac{1}{2}$.

4. Soit $f \in L^2(0, 1)$. L'application T_K est linéaire par linéarité de l'intégration.

On a:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |T_K(f)(x)|^2 dx &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x, y)| |f(y)| dy \right)^2 dx \leq \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x, y)|^2 dy \right) \underbrace{\left(\int_0^1 |f(y)|^2 dy \right)}_{=\|f\|_2^2} dx = \|K\|_2^2 \|f\|_2^2 < +\infty \end{aligned}$$

donc $T_K(f) \in L^2(0, 1)$ et

$$\|T_K(f)\|_2 \leq \|K\|_2 \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(0, 1).$$

On a, pour presque tout $x \in [0, 1]$,

$$T_K(e_n)(x) = \int_0^1 K(x, y) e^{-2i\pi n y} dy = \langle K(x, \cdot), e_n \rangle_2, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

donc, par le théorème de Fubini:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|T_K(e_n)\|_2^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |\langle K(x, \cdot), e_n \rangle_2|^2 dx = \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle K(x, \cdot), e_n \rangle_2|^2 dx = \\ &= \int_0^1 \|K(x, \cdot)\|_2^2 dx = \|K\|_2^2 < +\infty \end{aligned}$$

i.e. T_K est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

5. Soit $s > 0$.

On a: pour presque tout $x \in [0, 1]$,

$$V_s(f)(x) = \int_0^1 \psi_s(x-t)f(t)dt$$

et en particulier:

$$V_s(e_n)(x) = \langle \psi_s(x - \cdot), e_n \rangle_2$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|V_s(e_n)\|_2^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |\langle \psi_s(x - \cdot), e_n \rangle_2|^2 dx = \\ &= \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle \psi_s(x - \cdot), e_n \rangle_2|^2 dx = \int_0^1 \|\psi_s(x - \cdot)\|_2^2 dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 |\psi_s(x-t)|^2 dt dx = \frac{1}{|\Gamma(s)|^2} \iint_{\{0 \leq t \leq x \leq 1\}} (x-t)^{2(s-1)} dt dx \\ &= \frac{1}{|\Gamma(s)|^2} \int_0^1 \int_0^x (x-t)^{2(s-1)} dt dx = \frac{1}{2s(2s-1)|\Gamma(s)|^2} \end{aligned}$$

On en déduit que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|V_s(e_n)\|_2^2 < +\infty$ ssi $2s-1 > 0$, i.e. que V_s est un opérateur de Hilbert-Schmidt ssi $s > \frac{1}{2}$.

6. Dans V.4.(b) la convergence est uniforme ssi $\psi_s \in C([0, 1])$ i.e. ssi $s > 1$.