Prépa agrég Rennes
08/02/2024

Polynômes à plusieurs variables

Notations :
- A anneau (unitaire) commutatif intègre
- K corps (parfois Frac A, pas tjrs)
- $n \in \mathbb{N}^*$ (penser $n \geq 2$)
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

I Définition

- On considère $A^{(\mathbb{N}^n)} = \left\{ (a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \in A^{\mathbb{N}^n} \;/\; \{\alpha \in \mathbb{N}^n, a_\alpha \neq 0\} \text{ est fini} \right\}$ familles d'éléments de A, indexées par $\mathbb{N}^n$, à support fini

- les lois $(a_\alpha) + (b_\alpha) := (a_\alpha + b_\alpha)$ $\quad (a_\alpha).(b_\alpha) = \left(\sum_{\substack{(\alpha,\beta)\in \mathbb{N}^n \\ \alpha+\beta=\gamma}} a_\alpha b_\beta \right)_{\gamma \in \mathbb{N}^n}$ $\quad (\alpha_1,\dots,\alpha_n)+(\beta_1,\dots,\beta_n) = (\alpha_1+\beta_1,\dots,\alpha_n+\beta_n)$

$A \times A^{(\mathbb{N}^n)} \longrightarrow A^{(\mathbb{N}^n)}$ $\quad a.(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n} = (a a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ $\quad A \to A[\underline{X}]$, $a \mapsto a.1_A$ $\quad 1_A = \delta_{(0,\dots,0)}$ morph de A-alg, inj

munissent $A^{(\mathbb{N}^n)}$ d'une str de A-algèbre unitaire, commutative, intègre. cf + tard

On la note $A[X_1, \dots, X_n]$ $(A[\underline{X}])$ $\quad$ un polyn est uniq^t caractérisé par ses coeff

où $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $X_i = \delta_{(0,\dots,0,\underset{i}{1},0,\dots,0)}$ $\quad (a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \underbrace{a_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}}_{=\text{monôme } (a_\alpha \neq 0)}$ avec les lois ci-dessus b. déf. car supp fini

- On pose : $\deg 0 = -\infty$; $\operatorname{val} 0 = +\infty$; pour $P = \sum_\alpha a_\alpha X^\alpha$ ds $A[\underline{X}] \setminus \{0\}$ $\deg P = \max\{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \,/\, a_\alpha \neq 0\}$, $\operatorname{val} P = \min$

Pptés : $\forall (P,Q) \in A[\underline{X}]^2$: (i) $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$ ← utilise intégrité $\quad$ (ii) $\deg(P+Q) \boxed{\leq} \max(\deg P, \deg Q)$

(i') $\operatorname{val}(PQ) = \operatorname{val} P + \operatorname{val} Q$ $\quad$ (ii') $\operatorname{val}(P+Q) \boxed{\geq} \min(\operatorname{val} P, \operatorname{val} Q)$

(iii) si $P \neq 0$ $\operatorname{val} P \leq \deg P$ $\quad$ = si $\omega(P) \neq \omega(Q)$, pr $\omega = \deg$ ou val

Appl° : $A[X_1, \dots, X_n]^\times = A^\times$

II Propriété universelle (évaluation)

Thm : Soit B une A-alg, $b_1, \dots, b_n$ ds B (on supp B comm ou les $b_1, \dots, b_n$ commutent 2 à 2)
Il existe un unique morphisme de A-algèbres ϕ de $A[\underline{X}]$ ds B tq $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $\phi(X_k) = b_k$

DJ Écrire le seul qui peut marcher (unicité) et montrer qu'il marche. □

De manière équivalente :

Thm : Soit B un anneau, φ un morphisme d'anneaux de A ds B, $b_1, \dots, b_n$ ds B
(On suppose : soit B comm, soit $\varphi(A) \subseteq Z(B)$ (ou $Z(b_1,\dots,b_n)$) et les $b_1,\dots,b_n$ commutent 2 à 2)
$\exists!$ morph. d'anneaux ϕ de A ds B tq : $\phi_{|A} = \varphi$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $\phi(X_k) = b_k$

Application (ii) évaluation (fct polyn) pr $P \in A[\underline{X}]$, B A-alg comm appl° polyn $B^n \xrightarrow{\tilde{P}} B$

$A[\underline{X}] \longrightarrow \mathcal{F}_{poly}(B^n, B) \underset{s/s\,alg}{\subseteq} \mathcal{F}(B^n, B)$ $\quad (b_1, \dots, b_n) \mapsto P(b_1, \dots, b_n) = e_{(b_1,\dots,b_n)}(P)$

$P \mapsto \tilde{P}$

surj, inj $(\Leftarrow)$ B ∞

(iii) $A = \mathbb{Z}$ $\quad B = \mathbb{F}_p[X_1, \dots, X_n]$ pr a ds $\mathbb{Z}$, on note $\bar{a}$ sa classe ds $\mathbb{F}_p$: $\quad \mathbb{Z}[\underline{X}] \longrightarrow \mathbb{F}_p[\underline{X}]$ morph de $\mathbb{Z}$-alg surj

Valable pr n'importe quel A, avec I idéal $\quad \sum a_\alpha X^\alpha \mapsto \sum \bar{a}_\alpha X^\alpha$ noyau $= p\mathbb{Z}[\underline{X}]$

(i) Identification naturelle : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall I \subseteq [\![1,n]\!]$

$$A[X_1, \dots, X_n] \simeq A[X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n][X_i] \simeq A[X_i, i \in [\![1,n]\!] \setminus I][X_j, j \in I]$$

$$X_k \mapsto X_k \mapsto X_k$$

donne intégrité ; très utile pr utiliser résultats en une var

Degré partiel : $\deg_{X_i} P := \deg$ de P ds $(A[\dots])[X_i]$ $\quad$ Se comporte comme un deg en 1 var, car c'est un pas d'inég tjrs vrai entre $\deg_{X_i}$ et deg

III Arithmétique

1 Factorialité

Thm : Si A factoriel, alors $A[X_1, \dots, X_n]$ est factoriel $\quad$ Itération du thm de transfert

Csq : si A factoriel :

- $\exists$ pgcd, ppcm ds $A[\underline{X}]$ ⚠ pas unique, ni unitaire, ni canonique PAS DE BÉZOUT
  + facile avec deg $\quad$ + puissant, utile avec quotient, divisibilité
- irréductible $\Rightarrow$ premier
- décomp° en produit d'irréd (unique à ordre et association près)
- si on sélectionne une variable : critère d'irréd pr $B[T]$, B factoriel (Eisenstein ...)

Par quotient, ou s/s anneau, fournit ex, ctre-ex...

Ex : $\det = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} \varepsilon(\sigma) X_{i\sigma(i)}$ est irréd ds $K[X_{ij}, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2]$

2 Noethérianité

= générateurs d'idéaux

Rappel : $A[X_1, \dots, X_n]$ ppal ssi A est un cps et $n = 1$

Déf-prop : LASSE
- tt idéal de A a une famille génératrice finie
- tte s. ↗ d'idéaux de A est stationnaire

Si A vérifie ces ppts équiv, il est dit noethérien

Thm : Si A noethérien, alors $A[X]$ noethérien

$A[X_1, \dots, X_n]$ est noethérien

Ex : $\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]$, $K[X_1,\dots,X_n]$ sont noethériens

⚠ Si $n \geq 2$, nb min de gen non borné   Tt idéal de $K[X,Y]$ n'est pas engendré par au + 2 élts cf exo
$\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists I \trianglelefteq K[X_1,\dots,X_n]$ tq nb min de géné de $I \geq m$

3 Division euclidienne selon une variable

= div. eucl ds $A[\underline{X}^{\hat{i}}][X_i]$ par poly UNITAIRE en X_i

Soit $P \in A[X_1,\dots,X_n]$; on supp $\exists k \in [\![1,n]\!]$ tq P unitaire ds $(\underbrace{A[X_1,\dots,X_{k-1},X_{k+1},\dots,X_n]}_{B_k})[X_k]$
ie $P = \sum_{i=0}^{d_k} Q_i X_k^i$ $Q_i \in B_k$ $Q_{d_k} = 1$ Marche aussi avec inversible

Alors $\forall U \in A[\underline{X}]$ $\exists (!)$ $Q, R \in A[\underline{X}]$ tq $U = PQ + R$ et $\deg_{X_k} R < \deg_{X_k} P$

Utile pr évaluer ensuite ; si $\deg_{X_k} P$ plt
cf EXO

IV Polynômes et composantes homogènes

1 Définition et structure

Not° : $\mathcal{D}_d = \{(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n \,/\, \alpha_1 + \dots + \alpha_n = d\}$

On note $A[X_1,\dots,X_n]_d = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{D}_d} a_\alpha X^\alpha \,/\, (a_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}_d} \in A^{\mathcal{D}_d} \right\} \overset{K\text{ cps}}{=} \mathrm{Vect}\{X^\alpha, \alpha \in \mathcal{D}_d\}$

Ses éléments sont appelés polyn. homogènes de deg d Rmq : 0 est homogène de tout degré

$A[\underline{X}]_d$ est un A-module libre de rg $\binom{n+d-1}{n} = \binom{n+d-1}{d-1}$, de base $\{X^\alpha, \alpha \in \mathcal{D}_d\}$ ⚠ Pas stable par ×

Ex : $A[\underline{X}]_0 = A$
$K[\underline{X}]_1 = \{a_1 X_1 + \dots + a_n X_n \,/\, (a_1,\dots,a_n) \in K^n\}$ formes lin $\overset{\text{bij}}{\longleftrightarrow}$ $(K^n)^*$ dim n

$K[\underline{X}]_2$ $\overset{\text{bij}}{\longleftrightarrow}$ Formes quadr sur K^n dim $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

2 Composantes homogènes

Prop : Soit P ds $A[\underline{X}]$; il existe une unique famille $(P_d)_{d \in \mathbb{N}} \in A[\underline{X}]^{\mathbb{N}}$ tq
(i) $\forall d \in \mathbb{N}$ $P_d \in A[\underline{X}]_d$
(ii) $\{d \in \mathbb{N}, P_d \neq 0\}$ est fini
(iii) $P = \sum_{d \in \mathbb{N}} P_d$

P_d est appelée comp. homogène de deg d de P

Utile de preuve : remplace terme dominant, de + bas degré

Autre formulation $A[X_1,\dots,X_n] = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} A[X_1,\dots,X_n]_d$ — nb fini de comp. non nulles pr tq P

Rmq $A[\underline{X}]_d \, A[\underline{X}]_{d'} \subseteq A[\underline{X}]_{d+d'}$

V Polynômes symétriques

1 Définition

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{S}_n \times A[\underline{X}] & \longrightarrow & A[\underline{X}] \\ (\sigma, P) & \longmapsto & \sigma.P := P(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)}) \end{array}$$

est une action de $\mathfrak{S}_n$ sur $A[\underline{X}]$

Elle vérifie de plus ($P \mapsto \sigma P$ morph de A-alg) : $\forall (a,P,Q,\sigma) \in A \times A[\underline{X}] \times A[\underline{X}] \times \mathfrak{S}_n$

$\sigma(P+Q) = \sigma P + \sigma Q \qquad \sigma.(aP) = a\sigma.P$

$\sigma(PQ) = (\sigma P)(\sigma Q) \qquad \sigma.1 = 1$

Elle préserve le degré total (⚠ Pas partiel) et l'homogénéité

Déf : P de $A[\underline{X}]$ est dit sym. si : $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad \sigma.P = P$ — Pt fixe

Prop : $A[\underline{X}]^{\mathfrak{S}_n} = \{P \in A[\underline{X}] \,/\, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \sigma.P = P\}$ est une s/s-A-alg de $A[\underline{X}]$ — Rmq : sym $\Leftrightarrow$ comp. homo sym

2 Exemples

Sommes de Newton : pr $k \in \mathbb{N}$ $\quad S_k = \sum_{i=1}^n X_i^k \in A[\underline{X}]_k^{\mathfrak{S}_n} \quad \forall i \in [\![1;n]\!] \ \deg_{X_i} S_k = k$ — lié Tr A^k, cf ex

Polynômes symétriques élémentaires : pr $k \in [\![0;n]\!]$, $\sigma_k = \sum_{\substack{I \subseteq [\![1,n]\!] \\ |I| = k}} \prod_{i\in I} X_i \in A[\underline{X}]_k^{\mathfrak{S}_n} \quad \deg_{X_i} \sigma_k = 1$

Identités de Newton - Formules de Newton-Girard : $\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \underline{m\sigma_m} = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sigma_{m-k} S_k$ avec $\sigma_k = 0$ pr $k \geq n+1$

(exacte pr inverser)

3 Relations coefficients - racines

On a, ds $A[X_1,\dots,X_n,T]$ $\quad \prod_{i=1}^n (T - X_i) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \sigma_{n-k}(X_1,\dots,X_n) T^k$

Appl : Soit $P \in A[T]$, scindé ds A $\quad P = \sum_{k=0}^n a_k T^k = a_n \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ $\quad$ Alors $\forall k \in [\![0;n]\!] \quad a_k = a_n (-1)^{n-k} \sigma_{n-k}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

4 Structure des polynômes symétriques

Thm : $A[T_1, \dots, T_n] \longrightarrow A[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ est un isom. de A-alg
$F(T_1, \dots, T_n) \longmapsto F(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$

DJ récu sur n et d
cf journal de bord ?

Rmq • revient à : $\forall P \in A[\underline{X}]^{\mathfrak{S}_n}, \exists ! F \in A[\underline{T}]$ tq $P(X_1, \dots, X_n) = F(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$

• Si A est une $\mathbb{Q}$-alg, vrai aussi avec $S_1, \dots, S_n$

Base des techniques de réso d'éq° polyn
de théorie de Galois $\rightsquigarrow$ str de gpe

cf EXO