(Autour des) Théorèmes de Sylow

Notation : G gpe, H s/s gpe, X un ensemble (non vide)

Rappels : action de groupes

Une action de G sur X (à gauche) est une application : $\begin{array}{l} G\times X \to X \\ (g,x)\mapsto g\cdot x \end{array}$ vérifiant (i) $\forall x\in X$ $e.x=x$ (ii) $\forall (g,h,x)\in G\times G\times X$ $g\cdot(h\cdot x)=(gh)\cdot$

________ est équivalente à la donnée d'un morphisme de gpes σ de G ds $\operatorname{Bij} X$

Signature ? X gpe $\cup$ $\operatorname{Aut}_{gp} X$; $\circlearrowleft$ X K-ev $GL(X)$; ou conditions topologiques...

$\left\{ \begin{array}{l} G \to \operatorname{Bij} X \\ g \mapsto \begin{array}{l} X\to X \\ g\mapsto g\cdot x \end{array} \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} G\times X \to X \\ (g,x)\mapsto \sigma(g)(x) \end{array} \right.$

Orbite de x sous G : $\{g\cdot x \,/\, g\in G\}\subseteq X$ $\quad \mathcal{O}_x \quad \mathcal{O}_G(x) \quad G.x \quad \omega_x$

Stabilisateur de x ds G : $\{g\in G \,/\, g.x=x\} = \operatorname{Stab}_G x$ $\qquad \operatorname{Stab}_G g.x = g\operatorname{Stab}_G x\, g^{-1}$

Points fixes de g : $\{x\in X \,/\, g.x=x\} = \operatorname{Fix} g$

Noyau de l'action : $\{g\in G \,/\, \forall x\in X\ g.x=x\} = \ker\sigma = \bigcap_{x\in X}\operatorname{Stab}_G x$ $\quad =\{e\}$ ssi action fidèle

Points fixes de G : $\{x\in X \,/\, \forall g\in G\ g.x=x\} = \bigcap_{g\in G}\operatorname{Fix} g$

Quotient de X (pr l'action de G) $X/G = \{\text{orbites sous } G\} = \{\omega_x,\ x\in X\}$ $\quad =\{\cdot\}$ ssi action transitive

$x\sim y \Leftrightarrow \exists g\in G, y=g.x$ est une relation d'éq. sur X ; cl. d'éq = orbites

Relation stabilisateur-orbite : $\forall x\in X$ $\begin{array}{l} G/\operatorname{Stab}_G x \to \mathcal{O}_x \\ gS \mapsto g.x \end{array}$ est une bijection

bien défini : $gS=hS \Rightarrow \exists s\in S, g=hs$ alors $g.x = h.(s.x)=h.x$

surj : par déf orbite

injectif : ⚠ pas morph, pas de noyau

$g.x=h.x \Leftrightarrow (g^{-1}h).x=x$

$\Leftrightarrow g^{-1}h\in S \Leftrightarrow gS=hS$

Si G fini, $|\mathcal{O}_x| = [G:\operatorname{Stab}_G x]\ \big|\ |G|$ ex $|cl.\ de\ conj|\ \big|\ |G|$

ou + gént $[G:\operatorname{Stab}_G x]<\infty$

Équation aux classes :

$$X = \coprod_{\omega \in X/G} \omega$$

si X fini $|X| = \sum_{\omega \in X/G} |\omega| = \sum_{\omega \in X/G} [G : Stab_G\, x_\omega]$ $\quad (x_\omega)_{\omega \in X/G}$ syst. repr.

Formule de Burnside :

Pr $G \curvearrowright X$ finis $|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix\, g|$

Dénombrer $\{(g,x) \in G \times X \,/\, g.x = x\}$ selon les deux projections

Étudier une action = décrire

- les orbites
  - ts les éléments $\quad A, B \in M_{n,m}(K)$ Steinitz $\quad GL_n(K) \times GL_m(K) \curvearrowright M_{n,m}(K)$, $(P,Q).M = PMQ^{-1}$
    $A \sim B \iff \exists\, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ b. de K^m, K^n tq $B = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\begin{pmatrix} K^m \to K^n \\ X \mapsto AX \end{pmatrix}$
  - invariants ⇝ quotient $\quad A \sim B \iff rg\, A = rg\, B$ (image, noyau, inv. similitude, profil)

- les stabilisateurs $\quad GL_n(K) \times M_n(K) \to M_n(K)$, $(P, M) \mapsto PMP^{-1}$ $\quad \mathfrak{S}_n \curvearrowright M$ (= $K[M]$ si M compagnon) $\quad Stab_{\mathfrak{S}_n} k \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$

- le quotient $\quad$ Steinitz $\leftrightarrow [\![0 ; \min(m,n)]\!]$ $\quad \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^\times \hookrightarrow \mathcal{P}$
  Famille de repr : $\exists!\, x$ de la forme ... ds une orbite $\quad$ classification (géom)

Exemples :

penser aux actions sur les ensembles !! $\quad GL_n(K) \curvearrowright$ droites, sev de dim d ... $\quad \mathfrak{S}_n \curvearrowright$ parties

- H sous-groupe de G $\quad G \times G/H \to G/H$, $(g, xH) \mapsto gxH$ $\quad$ translation $\quad$ bien déf, action
  Y penser dès que l'indice apparaît

  Modèle d'action transitive : $G \curvearrowright \omega_x \cong G/Stab_G\, x$

  transitive $(yx^{-1}).xH = yH$

  stabilisateur $g(xH) = xH \iff (x^{-1}gx)H = H \iff x^{-1}gx \in H \iff g \in xHx^{-1}$ $\quad Stab_G\, xH = xHx^{-1}$

  Appl : $H \leq \mathfrak{S}_n$, $[\mathfrak{S}_n : H] = n \Rightarrow H \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$; $H \leq G$ $[G:H]$ = + plt facteur premier de $|G| \Rightarrow H \trianglelefteq G$

- $\mathcal{H} = \{$s/s-gpes de $G\}$ $\quad$ Conjugaison $\quad G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $(g, H) \mapsto gHg^{-1}$ $\quad$ b. déf, action $\quad \boxed{L103}$

  Orbite de H = sous-groupes conjugués de H

  Stabilisateur $\quad Stab_G\, H =: N_G H = \{g \in G \,/\, gHg^{-1} = H\}$ normalisateur de H ds G $\quad = G$ ssi $H \trianglelefteq G$

  « plus grand sous-groupe de G ds lequel H est distingué » $\quad N \leq G$ tq $H \subseteq N$: $H \trianglelefteq N \iff N \subseteq N_G H$

  Pour G fini $[G : N_G H]$ = nb de conjugués de H

Notations: soit G gpe fini $(\neq \{e\})$, p nb premier, $\alpha = v_p(|G|) \in \mathbb{N}$ ie $|G| = p^\alpha m$, $m \in \mathbb{N}^*$, $m \wedge p = 1$

p-Sylow de G = s/s gpe d'ordre $p^\alpha = p^{v_p(|G|)}$ de G

= s/s-gpe H de G tq $|H|$ = puissance de p et $[G:H]$ premier à p

ie H p-groupe

Ex: $G = GL_n(\mathbb{F}_p) \longleftrightarrow$ base de $\mathbb{F}_p^n \longleftrightarrow$ famille libre à n éléments de $\mathbb{F}_p^n$

$\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}} \mathcal{B} \longleftarrow \mathcal{B}$ $\qquad \dim_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p^n = n$

$$|G| = (p^n-1)(p^n-p)\cdots(p^n-p^{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} p^k(p^{n-k}-1) = p^{\frac{n(n-1)}{2}} \overbrace{\prod_{k=0}^{n-1} \underbrace{(p^{n-k}-1)}_{\wedge p = 1}}^{\wedge p = 1}$$

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\} \leq G$$ s/s-gpe de G — I_n, produit, inv $\qquad |U| = p^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = p^{\frac{n(n-1)}{2}}$ $\qquad U$ p-Sylow de G

Lemme : Soit S un p-Sylow de G et H s/s-gpe de G. Il existe g ds G tq $gSg^{-1} \cap H$ est un p-Sylow de H.

D/

- $gSg^{-1} \cap H$ est un s/s-gpe de H
  p-groupe (ĉ s/s-gpe de gSg^{-1} p-gpe)

- $[H : *]$ premier à p ?

Idée : équation aux classes $\quad |X| = \sum_{\omega \in X/K} [K : \mathrm{Stab}_K x_\omega]$

premier à p $\qquad H \qquad gSg^{-1} \cap H = (\mathrm{Stab}_G gS) \cap H$

$\rightsquigarrow$ non tous divisible par p

$X = G/S \qquad \begin{array}{ccc} H \times G/S & \longrightarrow & G/S \\ (h, gS) & \longmapsto & hgS \end{array} \qquad$ restriction à H de l'action par translation

$\forall g \in G \quad \mathrm{Stab}_H gS = H \cap \mathrm{Stab}_G gS = H \cap gSg^{-1}$

$$|G/S| = \sum_{\omega \in X/H} [H : g_\omega S g_\omega^{-1} \cap H] \qquad \omega = \text{classe de } g_\omega S$$

Comme $|G/S| \wedge p = 1$, $\exists g \in G$ tq $p \nmid [H : gSg^{-1} \cap H]$ (+ p premier)

$\blacksquare$

Thm (Sylow 1, 2, 3...) : Notations et hypothèses de la page précédente n_p = nb de p-Sylow de G

* (i) Il existe un p-Sylow dans G
(ii) Pr tt β ds $[\![0,\alpha]\!]$, G possède un s/s gpe d'ordre p^β.
(*)(iii) Tout sous-groupe de G qui est un p-grpe est contenu dans un p-Sylow de G
* (iv) les p-Sylows de G sont tous conjugués
(v) Soit S un p-Sylow de G. On a : S distingué de G $\Leftrightarrow$ S est l'unique p-Sylow de G $\Leftrightarrow n_p = 1$
* (vi) $n_p \equiv 1\ [p]$
(vii) $n_p \mid m$

D] (i) $G \overset{j}{\hookrightarrow} \mathfrak{S}_G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{F}_p) \supseteq U$

Par le lemme : $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{F}_p)$, tq $PUP^{-1} \cap j(G)$ est un p-Sylow de $j(G)$
Abs $j^{-1}(\qquad\qquad)$ ____________ G

(ii) cf exo

(iii) Soient H s/s.gpe de G d'ordre une puissance de p et S un p-Sylow de G
Par le lemme, il existe g ds G tq $gSg^{-1} \cap H$ est un p-Sylow de H
Comme H est un p-gpe (il est son seul p-Sylow), on a $gSg^{-1} \cap H = H$ dc
$H \subseteq gSg^{-1}$ qui est un p-Sylow de G (sous-gpe + bon cardinal).

(iv) Tout conjugué d'un p-Sylow est un p-Sylow.
Réciproquement, soient S, S' des p-Sylow de G.
la démonstration de (iii) donne g ds G tq $S' \subseteq gSg^{-1}$
Or $|S'| = |S| = |gSg^{-1}|$ dc $S' = gSg^{-1}$

(v) Deuxième $\Leftrightarrow$: OK
Première $\Leftrightarrow$: $\Rightarrow$ par (iv) $\Leftarrow$ car tt conjugué de S est un p-Sylow

(vi) Soit $\mathcal{S}_p$ l'ensemble des p-Sylow de G (fini car $\subseteq \mathcal{P}(G)$) $|\mathcal{S}_p| = n_p$ $\quad |X| \equiv *\ [p]$ p-gpe } penser pt fixe !
G agit par conj sur $\mathcal{S}_p$; on restreint cette action à S (un p-Sylow fixé de G)
On a $|\mathcal{S}_p| = |\mathcal{S}_p^S|\ [p]$ avec $\mathcal{S}_p^S = \{T \in \mathcal{S}_p \,/\, \forall g \in S, gTg^{-1} = T\}$
Soit T ds $\mathcal{S}_p^T$. On a donc : $S \subseteq N_G T$.
Or $T \trianglelefteq N_G T$ donc $|N_G T| = p^\alpha m'$ avec $m' \mid m$ et T est l'unique p-Sylow de $N_G T$
Dc $S = T$. Réciproquement $S \in \mathcal{S}_p^S$. D'où $|\mathcal{S}_p^S| = 1$.

(vii) Par (iii) $\mathcal{S}_p$ est une orbite sous une action de G, dc $|\mathcal{S}_p| \mid |G| = p^\alpha m$ $\quad \mathcal{S}_p \leftrightarrow G/N_G S$ divise m car $S \subseteq N_G S$
De plus $|\mathcal{S}_p| \wedge p = 1$ par (vi) dc $|\mathcal{S}_p| \mid m$

■

Csq : réciproque de Lagrange vraie pr puissance d'un diviseur premier de $|G|$