Université de Rennes 1 **Année 2023–2024**

Agrégation de Mathématiques
Feuille de TD 1

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit A une matrice carrée d'ordre n de coefficients :

$$a_{ij} = \begin{cases} a & \text{si} \quad i = j, \\ b & \text{si} \quad j = i-1, \\ c & \text{si} \quad j = i+1, \end{cases}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. On suppose A inversible. Montrer que A s'écrit de façon unique sous la forme : $A = LU$ où L et U sont bi-diagonales, avec L triangulaire inférieure de diagonale unité et U triangulaire supérieure.
2. En déduire le nombre d'opérations nécessaires pour la résolution de $Ax = b$.

Exercice 2

Soit à résoudre :

$$Ax = b \tag{1}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ et où $b \in \mathbb{R}^m$ sont donnés et supposés connus exactement. On suppose que x est calculé par une méthode d'élimination donnant $x_1 \neq x$ solution exacte de

$$(A + \Delta A)x_1 = b$$

où la matrice ΔA vérifie $\|A^{-1}\|\|\Delta A\| < \frac{1}{2}$ pour une norme matricielle subordonnée donnée. On considère alors le schéma itératif :

$$r_k = b - Ax_k, \quad A\Delta x_k = r_k, \quad x_{k+1} = x_k + \Delta x_k, \quad k \geq 1. \tag{2}$$

1. Montrer que
$$\|x_2 - x\| \leq \frac{\|A^{-1}\|\|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|}\|x_1 - x\|.$$
2. En déduire que l'algorithme (2) converge.

Exercice 3

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ de rang $r = \min(n, m)$ et soit $A = U\Sigma V^T$ la décomposition en valeurs propres singulières de A dans laquelle Σ est diagonale de coefficients diagonaux $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, U et V sont orthogonales d'ordres n et m resp.

Soit $k \leq r$. On note Σ_k la matrice diagonale d'ordre r de coefficients :

$$\sigma_1, \cdots, \sigma_k, 0, \cdots, 0$$

et on pose $A_k = U\Sigma_k V^T$.

1. Montrer que :

$$\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1} = \min_{\dim V = n-k} \max_{x \in V} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

2. Soit $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ de rang k. Montrer que

$$\sigma_{k+1} \leq \min_{\mathrm{rang}(B)=k} \|A - B\|_2.$$

3. En déduire que

$$\sigma_{k+1} = \min_{\mathrm{rang}(B)=k} \|A - B\|_2$$

Exercice 4

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et soit $b \in \mathbb{R}^m$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ solution de $Ax = b$ au sens des moindres carrés.

1. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ symétrique orthogonale et $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangulaire supérieure d'ordre n t.q. :

$$QA = \begin{pmatrix} T \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } 0 \in \mathbb{R}^{m-n\times n} \text{ désigne la matrice nulle.}$$

2. En déduire un schéma de calcul de x.

Exercice 5

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner un algorithme permettant de décomposer A sous la forme : $A = QR$ avec $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure.
2. On pose :

$$A_1 = A, \quad Q_1 = Q, \quad R_1 = R$$

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_{k+1} R_{k+1}, \quad k \geq 1.$$

   Montrer que A_{k+1} est semblable à A_k et donc à A, $k \geq 1$.
3. On pose : $P_k = Q_1 Q_2 \cdots Q_k, \quad S_k = R_k R_{k-1} \cdots R_1, \quad k \geq 1$. Montrer que $A^k = P_k S_k$, $k \geq 1$.
4. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et on suppose que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|.$$

(a) Soit D la matrice diagonale de coefficients $D_{ii} = \lambda_i$, $i = 1, \cdots, n$. Montrer que si L est triangulaire inférieure de diagonale unité alors

$$\lim_{k \to +\infty} D^k L D^{-k} = I_n.$$

(b) Montrer que si Q, Q', resp. R, R', sont des matrices orthogonales, resp. triangulaires supérieures, liées par la relation $QR = Q'R'$, alors il existe une matrice E diagonale de coefficients diagonaux $E_{ij} \in \{-1, 1\}$, t.q. $Q'^{-1}Q = R'R^{-1} = E$.

(c) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q et des matrices triangulaires supérieures R, S t.q.

$$A^k = QB_kRD^kS \quad \text{avec} \quad \lim_{k \to +\infty} B_k = I_n.$$

(d) Montrer que la suite $(A_k)_{k \geq 1}$ converge vers une limite à préciser.

5. En déduire un algorithme de calcul des valeurs propres de A.

6. Montrer que si A est symétrique il en est de même des matrices A_k, $k \geq 1$. En déduire une amélioration de l'algorithme