Université de Rennes 1 **Année 2023–2024**

Agrégation de Mathématiques
Feuille de TD 2

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *t.q.*

$$Ax \cdot x \geq \alpha \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha > 0.$$

Soit $b \in \mathbb{R}^d$. *On cherche* $x \in \mathbb{R}^d$ *solution de*

$$Ax = b.$$

1. *On considère la suite* $(x^{(k)})_{k\geq 0}$ *définie par :*

$$x^{(0)} \quad \text{donné dans } \mathbb{R}^d$$

$$Ax^{(k)} + \beta x^{(k)} = b + \beta x^{(k-1)} \quad k \geq 1, \quad \beta > 0. \tag{1}$$

   Montrer que la suite $(x^{(k)})_{k\geq 0}$ *converge vers* x.
   On a :

$$(A + \beta I)(x^{(k)} - x) = \beta(x^{(k-1)} - x) \Rightarrow$$

$$(\alpha+\beta)\|x^{(k)}-x\|^2 \leq (A+\beta I)(x^{(k)}-x)\cdot(x^{(k)}-x) = \beta(x^{(k-1)}-x)\cdot(x^{(k)}-x)$$

   Il en résulte :

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \frac{\beta}{(\alpha+\beta)}\|x^{(k-1)} - x\| \leq \left(\frac{\beta}{(\alpha+\beta)}\right)^k \|x^{(k-1)} - x\|$$

2. *Montrer que la suite* $(y^{(n)})_{n\geq 0}$ *définie par :*

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} - \rho(By^{(n)} - c), \quad n \geq 0 \tag{2}$$

   converge vers vers $x^{(k)}$ *solution de (1),* $k \geq 0$, *pour* $\rho \in \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c, $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ *convenablement choisis.*
   Si $(y^{(n)})_{n\geq 0}$ converge vers y alors $By = c = Bx^{(k)}$. On prend :

$$c = b + x^{(k-1)}, B = A + \beta I.$$

   Soit $y \in \mathbb{R}^n$ et soit $\varepsilon^{(n)} = y^{(n)} - y$. On a :

$$\varepsilon^{(n+1)} = (I - \rho B)\varepsilon^{(n)}$$

donc :

$$\begin{aligned}\|\varepsilon^{(n+1)}\|_2^2 &= \|\varepsilon^{(n)}\|_2^2 - 2\rho B\varepsilon^{(n)}\cdot\varepsilon^{(n)} + \rho^2\|\varepsilon^{(n)}\|_2^2\\ &\le \underbrace{(1-2\rho(\alpha+\beta)+\rho^2\|B\|_2^2)}_{=:\theta(\rho)}\|\varepsilon^{(n)}\|_2^2\end{aligned}$$

avec

$$\theta(\rho) < 1 \iff \rho(\rho\|B\|_2^2 - 2(\alpha+\beta)) < 0$$

et

$$\min_{\rho\in\mathbb{R}}\theta(\rho) = \theta\left(\frac{\alpha+\beta}{\|B\|_2^2}\right) = 1 - \left(\frac{\alpha+\beta}{\|B\|_2^2}\right)^2 =: \tilde\rho$$

$$\Rightarrow \|\varepsilon^{(n+1)}\|_2 \le \sqrt{\tilde\rho}\|\varepsilon^{(n)}\|_2$$

3. *Pour tout $k \ge 0$, on note $(y_k^{(n)})_{n\ge 0}$ la suite définie par (2) qui converge vers $x^{(k)}$ et on arrête les itérations (2) pour $n = p$, p fixé. En déduire une majoration de $\|y_k^{(p)} - x\|$ en fonction de α, β, ρ, k et p. Quel est le meilleur choix du paramètre β ?*

   Soit $k > 0$ et soit $p > 0$. On a :

$$y_k^{(p)} - x = (I - \tilde\rho(A+\beta I))(y_k^{(p-1)} - x) + \tilde\rho\beta(x^{(k-1)} - x)$$

   d'où :

$$\|y_k^{(p)} - x\|_2 \le \sqrt{\tilde\rho}\|y_k^{(p-1)} - x\|_2 + \tilde\rho\beta\|x^{(k-1)} - x\|_2 \le$$

$$\underset{y_k^{(0)}=y_{k-1}^{(p)}}{\le} \sqrt{\tilde\rho}^{(p-1)}\|y_{k-1}^{(p)} - x\|_2 + \tilde\rho\beta\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{k-1}\|x^{(0)} - x\|_2$$

$$\le \sqrt{\tilde\rho}^{k(p-1)}\|y_0^{(p)} - x\|_2 + \sum_{j=0}^{k-1}\sqrt{\tilde\rho}^{j(p-1)}\tilde\rho\beta\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{k-j-1}\|x^{(0)} - x\|_2.$$

$$\underset{y_0^{(0)}=x^{(0)}}{\le} \sqrt{\tilde\rho}^{(k+1)(p-1)}\|x^{(0)}-x\|_2 + \underbrace{\tilde\rho\beta\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{\tilde\rho}^{k(p-1)}\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)^k}{1-\sqrt{\tilde\rho}^{(p-1)}\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)}\right)}_{=:\gamma(\beta)}\|x^{(0)}-x\|_2.$$

   On choisit β qui minimise $\gamma(\beta)$.

4. *Comment choisir $\rho = \rho_n$ en fonction des itérations ?*

   Le schéma (2) peut être réécrit sous la forme d'un schéma de gradient associé au problème de minimisation :

$$\inf_{y\in\mathbb{R}^d}\underbrace{\frac{1}{2}By\cdot y - c\cdot y}_{=:J(y)}, \tag{3}$$

soit :

$$J(y^{(n+1)}) = J(y^{(n)} - \rho \nabla J(y^{(n)})), \quad n \geq 0$$

où la suite construite $(y^{(n)})_{n \geq 0}$ converge vers la solution de (3). Une variante consiste à considérer le schéma :

$$J(y^{(n+1)}) = \inf_{\rho \in \mathbb{R}} J(y^{(n)} - \rho \nabla J(y^{(n)}))$$

On montre que la minimimu est atteint pour

$$\rho = \rho_n = \frac{\|z^{(n)}\|_2^2}{Bz^{(n)} \cdot z^{(n)}}, \quad z^{(n)} := By^{(n)} - c$$