Université de Rennes 1 **Année 2024–2025**

Agrégation de Mathématiques
Feuille de TD 1

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n) = 0$$

Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0.

Exercice 2

On considère deux suites $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^N$ et $(v_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^N$ convergeant vers 0 et vérifiant :

$$\sum_{p=0}^{n} |v_p| \leq \alpha$$

pour un réel $\alpha > 0$. Montrer que la suite de terme général :

$$w_n = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}$$

converge vers 0.

Exercice 3

Pour tout $n \geq 1$ on considère les droites $D_{n,p}$, $0 \leq p \leq n$, d'équation $y = x\tan(\theta_{n,p})$, où :

$$\theta_{n,p} = \left(1+\frac{p}{n}\right)\frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq p \leq n.$$

A tout point $M(z)$ du plan complexe d'affixe $z \in \mathbb{C}$, on associe le point $M_{n,p}(z_{n,p})$ d'affixe $z_{n,p}$ symétrique de M par rapport à $D_{n,p}$.

1. Montrer que
$$z_{n,p} = \overline{z}e^{2i\theta_{n,p}}, \quad 0 \leq p \leq n$$
2. On pose :
$$s_n = \sum_{p=0}^{n} z_p.$$
Calculer la limite de la suite $\left(\frac{|s_n|}{n}\right)_{n\geq 1}$.

Exercice 4

1. On pose :
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad f(\alpha) = \sup_{p \in \mathbb{Z}} \sin(p\alpha).$$
Montrer que
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
2. Montrer que
$$f(\alpha) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \forall \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}].$$
3. En déduire :
$$\inf_{\alpha \in]0,\pi[} \sup_{p \in \mathbb{Z}} \sin(p\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 5

1. Soit $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ t.q. :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0.$$
Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} e^{-a_n}\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = 1 \tag{1}$$
2. Réciproquement, soit $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant (1) et
$$a_n + n > 0, \quad \forall n \geq 0. \tag{2}$$
   (a) Montrer que
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = 0.$$
   (b) En déduire que
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0. \tag{3}$$
   (c) Montrer que la réciproque peut tomber en défaut si (2) n'est pas vérifié.
   Indication : Construire un contre-exemple $(a_n)_{n\geq 0}$ solution de
   $$e^{-a_n}\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = 1, \quad \forall n \geq 1.$$

Exercice 6

Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la suite $(|x_n|)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers $+\infty$. Montrer que $(x_n)_{n\geq 0}$ admet au moins une valeurs d'adhérence.