Agrégation de Mathématiques
Feuille de TD 2

Exercice 1

Pour tout $x \in]0,1[$, on note $f(x)$ l'unique entier q solution de

$$(q-1)x < 1 \leq qx,$$

et on pose :

$$g(x) = qx - 1.$$

1. (a) Montrer que :
$$0 \leq g(x) < x, \quad \forall x \in]0,1[$$
   (b) Montrer que f est décroissante.
2. Soit $x \in]0,1[\setminus \mathbb{Q}$.
   (a) Justifier l'existence d'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par :
$$x_0 = x, \quad x_n = g(x_{n-1}), \quad n \geq 1. \tag{1}$$
   (b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par (1) est convergente. On note y cette limite.
   (c) Montrer que la suite de terme général $q_n = f(x_n)$ est croissante et tend vers $+\infty$.
   (d) En déduire que $y = 0$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On pose
$$D_\alpha = \{p\alpha + q, \quad (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$$
   Montrer que D_α est dense dans $\mathbb{R}$.
4. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soit $\omega \in \mathbb{R}$ t.q. $\dfrac{\omega}{\pi} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que l'ensemble $\{e^{ip\omega},\ p \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{U}$.

Exercice 2

Soit $(a,b) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Déterminer la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$$