**Université de Rennes 1** **Année 2024–2025**

**Agrégation de Mathématiques**
**Feuille de TD 3**

## Exercice 1

1. Soit $h^1(\mathbb{N}) = \{u \in \ell^2(\mathbb{N}),\ \sum_{n\geq 0} n^2|u_n|^2 < +\infty\}$.
   (a) Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $h^1(\mathbb{N})$ en posant :
   $$\forall a, b \in h^1(\mathbb{N}), \quad \langle a, b\rangle = \sum_{n\geq 0}(1+n^2)a_n\bar{b}_n.$$
   et que ce produit scalaire fait de $h^1(\mathbb{N})$ un espace de Hilbert.
   (b) Montrer que $h^1(\mathbb{N})$ est dense dans $\ell^2(\mathbb{N})$.
   (c) Soit $(a^{(n)})_{n\geq 0} \in h^1(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ t.q. $\|a^{(n)}\| \leq 1$, $\forall n \geq 0$. Montrer que pour tout $k \geq 0$, la suite $(a_k^{(n)})_{n\geq 0}$ est dans un compact de $\mathbb{C}$.
   (d) Montrer que la boule unité fermée de $h^1(\mathbb{N})$ est compacte dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

## Exercice 2

Soit $E$ un espace de Banach. On suppose $E$ uniformément convexe, i.e. : $\forall\varepsilon > 0$, il existe $\delta \in ]0, 1[$ t.q.
$$\forall x, y \in B_E(0, 1), \quad \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \geq 1-\delta \Rightarrow \|x-y\| \leq \varepsilon.$$
Soit $C \subset E$ un convexe fermé non vide.

1. Soit $x, y, a \in E$ t.q. $\|x-a\| = \|y-a\| = d > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ t.q.
   $$\left\|\frac{1}{2}(x+y)-a\right\| \leq d(1-\delta).$$
2. Soit $a \in E$. On pose $d = \inf_{x\in C}\|x-a\|$. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite minimisante.
   (a) Montrer qu'il existe $d' > d$ et $n_0 > 0$ t.q.
   $$\left\|\frac{1}{2}(x_m+x_n)-a\right\| \geq d', \quad \forall m, n \geq n_0.$$
   (b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers l'unique solution $p_C(a)$ du problème :
   $$p_C(a) \in C \quad \text{et} \quad \|a - p_C(a)\| = \inf_{x\in C}\|x-a\|.$$

3. (a) Montrer que : $\forall x, x' \in E$,
$$|d(x,C) - d(x',C)| \leq \|x' - x\|.$$
   (b) Montrer que : $\forall x, x' \in E$,
$$d(x,C) \leq \left\| \frac{1}{2}(p_C(x') + p_C(x)) - x \right\| \leq d(x,C) + \|x - x'\|$$
   (c) En déduire que $p_C$ est continue sur $E$.

## Exercice 3

Soit $H$ un espace de Hilbert et soit $(K_n)_{n\geq 0}$ une suite de convexes fermés non vides de $H$. Soit $f \in H$. On pose $u_n = p_{K_n} f$, $\forall n \geq 0$.

1. On suppose que la suite $(K_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et que $\cap_{n\geq 0} K_n \neq \emptyset$.
   (a) Montrer que la suite de terme général $\|u_n - f\|$ est croissante majorée par $\|x - f\|$, $\forall x \in \cap_{n\geq 0} K_n$.
   (b) Montrer que :
$$\forall n, p \geq 0, \quad \|u_{n+p} - u_n\|^2 \leq 2\|u_{n+p} - f\|^2 - 2\|u_n - f\|^2.$$
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite de la forme $p_K f$ où $K$ est un convexe fermé à préciser.
2. On suppose que la suite $(K_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
   (a) Montrer que $K = \overline{\cup_{n\geq 0} K_n}$ est un convexe fermé.
   (b) Montrer que la suite de terme général $\|u_n - f\|$ converge.
   (c) Montrer que :
$$\forall n, p \geq 0, \quad \|u_{n+p} - u_n\|^2 \leq 2\|u_n - f\|^2 - 2\|u_{n+p} - f\|^2.$$
   (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $p_K f$.
   (e) Soit $\varphi : H \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée inférieurement. On pose : $\forall n \geq 0$, $c_n = \inf_{K_n} \varphi$. Montrer que la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ converge. Identifier sa limite.

## Exercice 4

Soit $E$ un espace de Hilbert et soit $T \in E'$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in E, \quad f(x) = \|x\|^2 - T(x).$$

1. Montrer que $f$ est bornée inférieurement sur $E$ et que cette borne est atteinte sur $E$.
2. Soit $a \in E$ t.q. $f(a) = \inf_E f$. Soit $C$ un convexe fermé. Montrer que
$$\inf_C f = f(p_C(a)).$$

.