Université de Rennes
Jürgen Angst

Préparation à l'agrégation
année 2024-2025

Feuille d'exercices sur les extrema liés

1 Le théorème des extrema liés

On commence par rappeler le théorème des extrema liés.

Théorème 1 (Extrema liés, mutiplicateurs de Lagrange)**.** *On considère $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et une application $g : U \to \mathbb{R}^p, x \mapsto (g_1(x), \ldots, g_p(x))$ de classe C^r pour $r \geq 1$. On désigne par S l'ensemble $S := g^{-1}(0) = \{x \in U; g(x) = 0\}$ et on suppose que, pour tout $x \in S$, la différentielle $D_x g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est surjective. Autrement dit, S est une sous variété de dimension $n-p$ dans $\mathbb{R}^n$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^r, une condition nécessaire pour que la restriction de f à S présente un extrémum local en un point $a \in S$, est qu'il existe p nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (appelés les multiplicateurs de Lagrange) tels que :*

$$D_a f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i D_a g_i.$$

En coordonnées ceci s'écrit : pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a).$$

Exemple 1. *On souhaite déterminer les maxima de la fonction $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ sur le cercle $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Ici, on a donc $p = 1$ et si on pose $g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$, on a pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^d$*

$$D_{(x_1,x_2)} g_1(h_1, h_2) = \langle \nabla_{(x_1,x_2)} g_1, (h_1, h_2) \rangle = \langle (2x_1, 2x_2), (h_1, h_2) \rangle = 2x_1 h_1 + 2x_2 h_2.$$

Si $(x_1, x_2) \in S$ on a nécessairement $x_1 \neq 0$ ou $x_2 \neq 0$ de sorte que g_1 est bien surjective. D'après le théorème des extrema liés, si f possède un extremum local en $a = (a_1, a_2) \in S$, alors il existe un scalaire λ_1 tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(a) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a_2 = 2\lambda_1 a_1 \\ \\ a_1 = 2\lambda_1 a_2 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} a_2 = 4\lambda_1^2 a_2 \\ \\ a_1 = 4\lambda_1^2 a_1. \end{array} \right.$$

On en déduit que $\lambda_1^2 = 1/4$, i.e. $\lambda_1 = \pm 1/2$, i.e. $a_2 = \pm a_1$, i.e.

$$a \in \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}.$$

Le maximum de la fonction f sur le cercle S vaut donc $1/2$ et il est atteint aux points

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \textit{et} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

2 Quelques exemples classiques d'application

Exercice 1 (Polygone inscrit de périmètre maximal). *On considère un polygone convexe à n côtés inscrit dans le cercle unité du plan euclidien. On note P son périmètre et $e^{ia_1}, e^{ia_2}, \dots, e^{ia_n}$ les affixes de ses sommets, avec la convention que $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n < 2\pi$.*

1. *On pose, pour $k \in \{1, \dots, n-1\}, t_k = \frac{1}{2}(a_{k+1} - a_k)$ et $t_n = \frac{1}{2}(a_1 + 2\pi - a_n)$. Montrer que $P = 2\sum_{k=1}^{n} \sin(t_k)$.*
2. *Montrer que P est maximal lorsque le polygone est régulier.*

Exercice 2 (Triangle d'aire maximale). *Commençons par rappeller la formule de Héron, qui donne l'aire $A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$ d'un triangle de cotés x, y, z et de périmètre $2p = x + y + z$. Justifier que parmi les triangles de périmètre $2p$, il y en a un d'aire maximale et le déterminer.*

Exercice 3 (Inégalité arithmético-géométrique). *Soit $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \cdots x_n$. On note $S := \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n ; x_1 + \dots + x_n = 1\right\}$.*

1. *Démontrer que f admet un maximum global sur S et le déterminer.*
2. *En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a*

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Exercice 4 (Inégalité de Hölder). *Soient p et q deux nombres réels > 1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient a_i et b_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, des nombres réels ≥ 0. Montrer que*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Exercice 5 (Inégalité de Hadamard). *On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne usuelle et on définit la fonction $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n, f(v_1, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_n)$ le déterminant de la matrice carrée d'ordre n formée des vecteurs colonnes $v_1, \dots, v_n$.*

1. *Montrer que le maximum de f sur l'ensemble S défini par $\|v_1\| = \dots = \|v_n\| = 1$ est atteint et qu'il est strictement positif.*
2. *Montrer que si le maximum de f sur S est atteint en $(v_1, \dots, v_n)$ alors les v_i forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.*
3. *En déduire l'inégalité de Hadamard, pour toute famille d'éléments $v_1, \dots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$*

$$|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \dots \|v_n\|.$$

   Quand a-t-on égalité ?

Exercice 6 (Vers le théorème spectral). *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ un matrice symétrique. En utilisant le théorème des extrema liés, montrer que $\rho := \sup_{||x||=1} \langle Ax, x \rangle$ est bien défini et est une valeur propre de la matrice A.*

Références

[Gou] Gourdon. Les maths en tête - Analyse, p.317 et p.327. Ellipse.

[Pey] Beck Malick Peyré. Objectif agrégation, p.20. H et K.

[Rou] Rouvière. Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation, 2ème édition, p. 399. Cassini.