

RAPPELS ET EXERCICES SUR LES POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES

Leçons : Principalement 150; 152; 156. Secondairement 149; 151; 153.

Par défaut, on fixe k un corps, E un k -espace vectoriel de dimension $n < \infty$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.

Basic stuff first

Exercice 1 (Polynôme minimal).

1. Montrer qu'il existe un unique morphisme de k -algèbre $\text{ev}_u : k[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$ envoyant X sur u . On notera $P(u)$ au lieu de $\text{ev}_u(P)$ et $k[u]$ au lieu de $\text{Im } \text{ev}_u$.
2. Montrer que le morphisme ev_u n'est pas injectif.
3. En déduire l'existence d'un unique polynôme unitaire $\pi_u \in k[X]$ tel que pour tout polynôme $P \in k[X]$, $P(u)$ est nul si et seulement si π_u divise P .
4. Montrer que l'idéal $\text{Ker}(\text{ev}_u)$ ne dépend que de la classe de similitude de u . En déduire que π_u ne dépend que de la classe de similitude de u . Que pouvez-vous dire de la réciproque ?
5. Soit $d \geq 0$ le degré de π_u . Montrer que $(\text{Id}_E, u, \dots, u^{d-1})$ est une base du k -espace vectoriel $k[u]$. En déduire une première borne supérieure pour le degré de π_u .

Exercice 2 (Commutativité). Soit P un polynôme.

1. Montrer que $P(u)$ et u commutent. En déduire que $k[u]$ est une algèbre commutative, incluse dans le commutant

$$C(u) := \{v \in \mathcal{L}(E) \mid v \circ u = u \circ v\}.$$

2. Donner un exemple où l'on a $k[u] \neq C(u)$. (On verra plus tard une caractérisation des u tels que $k[u] = C(u)$)
3. Montrer que $\text{Ker } P(u)$ et $\text{Im } P(u)$ sont des sous-espaces de E stables par u .
4. Montrer que si u est inversible, alors $u^{-1} \in k[u]$.

Exercice 3 (Polynôme minimal et restriction), [OA, Section 4.2.2].

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u .
 - (a) Soit $u|_F$ la restriction de u à F (pourquoi s'agit-il d'un endomorphisme de F ?). Montrer que le polynôme $\pi_{u|_F}$ divise π_u .
 - (b) Soit $\bar{u}$ l'endomorphisme de E/F induit par u (pourquoi cet endomorphisme existe-t-il ?). Montrer que le polynôme $\pi_{\bar{u}}$ divise π_u .

2. Soit x un élément de E .

(a) Montrer (abstraitement ?) qu'il existe un plus petit sous-espace de E stable par u et contenant x . On notera F ce sous-espace.

(b) Montrer que l'on a

$$F = \text{Vect}(u^p, p \in \mathbb{N}) = \{P(u)(x), P \in k[X]\}.$$

(c) Montrer que l'on définit une application k -linéaire $\varphi : k[X] \rightarrow F$ en posant $\varphi(P) = P(u)(x)$.

(d) Montrer que $\text{Ker } \varphi$ est un idéal non nul de $k[X]$. On pose $\pi_{u,x}$ le générateur unitaire de cet idéal.

(e) Montrer que la restriction de $\pi_{u,x}(u)$ à F est nul. En déduire que $\pi_{u,x}$ est égal au polynôme minimal $\pi_{u|_F}$.

(f) Montrer que l'on a

$$\deg(\pi_{u,x}) = \dim F = \inf\{p \in \mathbb{N} \mid (x, u(x), \dots, u^p(x)) \text{ est liée}\}.$$

Exercice 4 (Lemme des noyaux) [Grifone, Section 6.10].

1. Soient P, Q deux polynômes premiers entre eux. On suppose que le produit PQ est annulateur de u .

(a) Montrer qu'il existe $U, V \in k[X]$ tels que

$$\forall x \in E, x = (U(u) \circ P(u))(x) + (V(u) \circ Q(u))(x).$$

En déduire que $E = \text{Im}(U(u) \circ P(u)) + \text{Im}(V(u) \circ Q(u))$.

(b) Montrer que l'on a $\text{Im}(U(u) \circ P(u)) \subset \text{Ker } Q(u)$ et $\text{Im}(V(u) \circ Q(u)) \subset \text{Ker } P(u)$.

En déduire que $E = \text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u)$.

2. Montrer le **Lemme des noyaux**: si $P = P_1 \cdots P_r$ est un polynôme factorisé en produit de polynômes deux à deux premiers entre eux, alors

$$\text{Ker } P(u) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker } P_i(u).$$

Polynôme caractéristique, Cayley-Hamilton

Exercice 5 (Polynôme caractéristique). Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(k)$, on considère la matrice $XI_n - A$ de $\mathcal{M}_n(k[X])$ et on définit le *polynôme caractéristique* de A comme

$$\chi_A(X) := \det(XI_n - A).$$

1. Montrer que χ_A est un polynôme unitaire de degré n . (On définit souvent le polynôme caractéristique comme $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$, ça facilite les calculs au sens où il y a moins de signes moins. Ça ne change en réalité pas grand chose puisque $\det(A - XI_n) = (-1)^n \det(XI_n - A)$ par multilinéarité du déterminant).

2. Pour toute base $\mathcal{B}$ de E , on considère $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que la valeur de $\chi_{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)}$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$.
3. En déduire une définition du polynôme caractéristique χ_u de l'endomorphisme u . Montrer que χ_u ne dépend que de la classe de similitude de u . Que dire de la réciproque ?

On rappelle le célèbre et célébré Théorème de Cayley-Hamilton:

Théorème (Cayley-Hamilton). Soient k un corps, E un k -espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E . On a $\chi_u(u) = 0$. Autrement dit le polynôme minimal de u divise son polynôme caractéristique.

Exercice 6. Donner une meilleur borne pour le degré de π_u .

Exercice 7 (Cayley-Hamilton, démonstration valable pour tout corps).

Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(k)$ fixé. Soit M la transposée de la comatrice de $XI_n - A$.

1. Expliquer pourquoi M est bien définie. Montrer que les coefficients de M sont des polynômes de degré au plus $n - 1$. On pose alors

$$M := B_0 + B_1X + \cdots + B_{n-1}X^{n-1} \in \mathcal{M}_n(k[x])$$

où $B_0, \dots, B_{n-1}$ sont dans $\mathcal{M}_n(k)$.

2. Montrer que l'on a

$$\chi_A(X)I_n = -AB_0 + (B_0 - AB_1)X + \cdots + (B_{n-2} - AB_{n-1})X^{n-1} + B_{n-1}X^n$$

3. On pose $\chi_A(X) = p_0 + p_1X + \cdots + p_{n-1}X^{n-1} + X^n$. Montrer que l'on a $p_0I_n = -AB_0$, $I_n = B_{n-1}$ et

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, p_i I_n = B_{i-1} - AB_i.$$

4. Conclure.

Exercice 8 (Cayley-Hamilton, démonstration par densité pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On pose $D_n^{\text{reg}}(k)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(k)$ ayant n valeurs propres distinctes et $D_n(k)$ l'ensemble des matrices diagonalisables.

1. Montrer que $D_n^{\text{reg}}(k)$ est inclus dans $D_n(k)$.
2. On suppose désormais que $k = \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que $D_n^{\text{reg}}(\mathbb{K})$ est dense dans $D_n(\mathbb{K})$.
3. On admet que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable. Montrer que $D_n^{\text{reg}}(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
4. Montrer que le théorème de Cayley-Hamilton est vrai pour $A \in D_n^{\text{reg}}(\mathbb{C})$.
5. Montrer que la fonction $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ envoyant A sur $\chi_A(A)$ est continue.
6. Conclure.

(Notons que cette démonstration peut être adaptée pour n'importe quel corps k , il faut alors adapter l'argument de densité en utilisant la topologie de Zariski, largement hors programme.)

Exercice 9 (Cayley-Hamilton, démonstration par analyse complexe pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On se propose de démontrer le théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (ce qui inclut donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Soit donc A une telle matrice, on se donne $\|\cdot\|$ une norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Justifier l'existence d'une constante R telle que $A - zI_n$ est inversible pour tout z se trouvant sur le cercle C de centre 0 et de rayon R . On fixe un tel R à partir de maintenant, et on note γ le chemin $t \mapsto Re^{2i\pi t}$, parcourant le cercle C dans le sens trigonométrique.
2. Montrer que pour tout z appartenant à C , la série matricielle de terme général $A^p/(z^{p+1})$ est convergente. Montrer que l'on a

$$(A - zI_n)^{-1} = - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{z^{p+1}}.$$

3. Montrer que pour tout entier $p \geq 0$, on a

$$\oint_{\gamma} z^p (A - zI_n)^{-1} dz = -2i\pi A^p$$

(ici, l'intégrale est à comprendre coordonnées par coordonnées).

4. En déduire que pour tout polynôme P , on a

$$\oint_{\gamma} P(z)(A - zI_n)^{-1} dz = -2i\pi P(A).$$

5. Montrer que tous les coefficients de la matrice $\chi(z)(A - zI_n)^{-1}$ sont des polynômes en z , en déduire que l'on a

$$\oint_{\gamma} \chi(z)(A - zI_n)^{-1} dz = 0.$$

6. Conclure.

Valeurs propres, réduction

Exercice 10.

1. Montrer que si P est un polynôme annulateur de u , alors toute valeur propre de u est une racine de P .
2. Montrer que toute racine de π_u est une valeur propre de u .

Exercice 11 (Caractérisation de la diagonalisabilité).

1. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes:
 - (i) π_u est scindé à racines simples.
 - (ii) u annule un polynôme scindé à racines simples.
2. Montrer que, si u est diagonalisable, alors u annule un polynôme scindé à racines simples dans $k[X]$. En déduire que π_u est alors scindé à racines simples.
3. Réciproquement, supposons que π_u est scindé à racines simples. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 12. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes:

- (i) π_u est scindé.
- (ii) χ_u est scindé.
- (iii) u annule un polynôme scindé.

On verra plus tard que ces propriétés sont également équivalentes à la *trigonalisabilité* de u .

Exercice 13 (Diagonalisabilité sur les corps finis) [Groudon, Exercice 4.2.4.2].

Soit F un corps fini de cardinal q . On rappelle que tout élément de F est racine du polynôme $X^q - X$.

1. Montrer que $X^q - X$ est scindé à racines simples dans $F[X]$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(F)$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $M^q - M = 0$.

Exercice 14. On suppose que k est algébriquement clos de caractéristique non 2.

1. On suppose que $u \in \text{GL}(E)$ et que u^2 est diagonalisable. En déduire que u est diagonalisable.
2. Trouver un contre exemple dans le cas où u n'est pas inversible.
3. On suppose maintenant que k est de caractéristique 2. Montrer que $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ respecte les conditions de la première question sans être diagonalisable.

Exercice 15. Pour tout $m \in \mathbb{C}$, on considère la matrice

$$A_m := \begin{pmatrix} 2 & m-1 & -1 \\ 1-m & m & m-1 \\ 1 & m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on admet que son polynôme caractéristique est $\chi_{A_m} = (X - m)(X - 1)^2$.

1. Donner, selon la valeur de m , les valeurs propres de A_m et leur multiplicités.
2. Déterminer, selon la valeur de m , le polynôme minimal de A_m . En déduire les valeurs de m pour lesquelles A_m est diagonalisable. Diagonaliser A_m le cas échéant.

Endomorphismes cycliques

On associe à tout polynôme unitaire P , de degré n et noté $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$, la **matrice compagne** définie par

$$C_P := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 16. Soit p un polynôme unitaire de $k[X]$. Démontrer que le polynôme caractéristique de $C(P)$ est égal à P .

Exercice 17 (Endomorphismes cycliques) [OA, Section 4.3.2].

On dit que l'endomorphisme u est *cyclique* s'il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E . Montrer l'équivalence des propriétés suivantes

- (i) L'endomorphisme u est cyclique.
- (ii) On a $\chi_u = \pi_u$.
- (iii) Le polynôme π_u est de degré n .
- (iv) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est une matrice compagnon.
- (v) L'algèbre $k[u]$ est de dimension n .

Exercice 18 (Dimension du commutant d'un endomorphisme) [FGN2, Exo 2.62].

1. Montrer que $k[u]$ est de dimension au plus n , avec égalité si et seulement si u est cyclique.
2. Nous allons montrer que $C(u)$ est de dimension au moins n .
 - (a) Réaliser $C(u)$ comme l'ensemble des solutions d'un système linéaire à coefficients dans k (*Indication: choisir une base*).
 - (b) Montrer que l'on peut supposer que u est trigonalisable (*Indication: la dimension de l'espace des solutions d'un système linéaire à coefficients dans k est invariante par extension des scalaires*).
 - (c) On suppose maintenant que u est trigonalisable, soit $\mathcal{B}$ une base de trigonalisation et soit $A := \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Soit F l'ensemble des matrices triangulaires supérieures X qui commutent avec A . Montrer que F est un espace vectoriel de dimension au moins n . Conclure que $C(u)$ est de dimension au moins n .
3. Conclure que $k[u] = C(u)$ si et seulement si u est un endomorphisme cyclique.

Biblio

- [OA] V. Beck, J. Malick, and G. Peyré. *Objectif agrégation*. H et K, 2005.
- [FGN2] S. Francinou, H. Gianella, and S. Nicolas. *Oraux X-Ens algèbre 2*. Cassini, 2009.
- [Groudon] X. Gourdon. *Algèbre*. Ellipses, 2009.
- [Grifone] J. Grifone. *Algèbre linéaire*. Cépaduès Éditions, Toulouse, 1990, pp. viii+440. ISBN: 2-85428-239-6.