Université de Rennes 1 **Année 2025–2026**

Agrégation de Mathématiques
Feuille de TD 1

Exercice 1

1. Montrer que la série de fonctions méromorphes :
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$
converge uniformément sur les bandes $\{a \leq \mathrm{Re}(z) \leq b\} \setminus \mathbb{Z}$, $a < b$. On note f sa somme.
2. Montrer que f est méromorphe sur $\mathbb{C}$, de pôles à préciser.
3. Montrer que f est périodique de période 1.
4. Montrer que :
$$\lim_{|y|\to+\infty} f(x+iy) = 0$$
et que la convergence est uniforme en x.
5. En déduire que
$$f(z) = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Exercice 2

1. Montrer que la série de fonctions méromorphes
$$\frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) \tag{1}$$
converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ vers la somme :
$$\frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{\tan \pi z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \tag{2}$$
Indication : Utiliser le résultat de l'Exercice 1.
2. Montrer que
$$\frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2-n^2} = \frac{\pi}{\tan \pi z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Exercice 3

1. Montrer que f définie par le produit infini :
$$f(z) = z\Pi_{n\geq 1}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \tag{4}$$
est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\pi}{\tan \pi z} = \frac{1}{z} + 2\sum_{n\geq 1}\frac{z}{z^2 - n^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}.$$
Indication Utiliser l'Exercice 2.
3. Montrer que
$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \Pi_{n\geq 1}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}. \tag{5}$$

Exercice 4

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $z \mapsto \frac{e^{zx}}{e^z-1}$ se développe sous la forme
$$\frac{e^{zx}}{e^z - 1} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1}\frac{\varphi_n(x)}{n!}z^{n-1} \quad \text{pour } 0 < |z| < 2\pi$$
où les coefficients $\varphi_n(x)$, $n \geq 1$ sont des polynômes.
2. On note D le disque ouvert de centre 0, de rayon 2π. Montrer que :
$$\frac{e^{zx}}{e^z - 1} = \frac{e^{-z(1-x)}}{1 - e^{-z}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in D\setminus\{0\}.$$
En déduire : $\forall x \in [0,1]$, $\forall z \in D\setminus\{0\}$,
$$\left|\frac{e^{zx}}{e^z - 1}\right| \leq \frac{1}{|e^z - 1|} + \frac{1}{|1 - e^{-z}|}$$
3. Montrer qu'il existe une suite $(r_k)_{k\geq 0} \in]0, +\infty[$ et une constante $C > 0$ t.q. $2k\pi < r_k < 2(k+1)\pi$, $\forall k \geq 0$, et :
$$\frac{1}{|e^z - 1|} \leq C, \quad \text{si} \quad |z| = r_k, \quad \forall k \geq 0$$
4. Soit $k \geq 1$. Montrer que pour des contours $\gamma, \gamma_k \subset \mathbb{C}$ appropriés : $\forall x \in \mathbb{C}$,
$$\frac{\varphi_n(x)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{e^{zx}}{z^n(e^z - 1)}dz, \quad \forall n \geq 1,$$
$$\frac{\varphi_n(x)}{n!} + \sum_{r=1}^{k}\left(\frac{e^{2i\pi rx}}{(2i\pi r)^n} + \frac{e^{-2i\pi rx}}{(-2i\pi r)^n}\right) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_k}\frac{e^{zx}}{z^n(e^z - 1)}dz, \quad \forall n \geq 1,$$

5. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que pour tout $k \geq 1$, on a :
$$\varphi_{2k}(x) = (-1)^{k+1} 2(2k)! \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(2\pi n x)}{(2n\pi)^{2k}},$$
$$\varphi_{2k+1}(x) = (-1)^{k+1} 2(2k+1)! \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(2\pi n x)}{(2n\pi)^{2k+1}},$$
les séries étant normalement convergentes pour $0 \leq x \leq 1$.
6. Soit $x \in]0,1[$. Montrer que :
$$x - \frac{1}{2} = \varphi_1(x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(2\pi n x)}{n\pi}$$
où la série du membre de droite est uniformément convergente sur les intervalles $[\alpha, 1-\alpha]$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, et où les sommes partielles $\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2\pi n x)}{n\pi}$, $N \geq 1$, sont bornées au sens suivant : il existe $A > 0$ t.q.
$$\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2\pi n x)}{n\pi} \right| \leq A, \quad \forall x \in [0,1], \quad \forall N \geq 1.$$
7. Etudier l'existence d'un prolongement holomorphe de $\tilde{\varphi}_n = \varphi_n|_{[0,1]}$, $n \geq 1$.

Exercice 5

1. Montrer que le produit infini
$$\Pi_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$
converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$ et définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Indication : Montrer que
$$|(1+w)e^{-w} - 1| \leq |w|^2 e^{|w|}, \quad \forall w \in \mathbb{C}.$$
2. On pose :
$$\Phi(z) = z e^{\gamma z} \Pi_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$
où
$$\gamma = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln N \right).$$
Montrer que la fonction $\frac{\Phi'}{\Phi}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et s'écrit comme la somme d'une série de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$:
$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}).$$

3. En déduire
$$\Phi(z+1) = \frac{\Phi(z)}{z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}).$$
4. Comparer avec le résultat de l'Exercice 3 pour montrer que :
$$\Phi(z)\Phi(1-z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Exercice 6

1. Montrer que l'intégrale
$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$
est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(z) > 0$.
2. Montrer que $z \mapsto \Gamma(z)$ définit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > 0$ et que :
$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \forall \mathrm{Re}(z) > 0.$$
3. Montrer que
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \forall\, \mathrm{Re}(z) > 0.$$
4. En déduire $\Gamma(n+1)$ pour $n \geq 0$. Montrer que :
$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{\Pi_{k=0}^{n-1}(z+k)} = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}, \quad \forall\, \mathrm{Re}(z) > 0. \tag{6}$$
5. Montrer que la fonction Γ se prolonge à $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f admet un pôle simple en $-n$, de résidu $\frac{(-1)^n}{n!}$.
6. Montrer que :
$$\left| \frac{\Gamma(z+n+1)}{n! n^z} \right| \leq \frac{\Gamma(x+n+1)}{n! n^x}, \quad \text{si} \quad x = \mathrm{Re}(z) > -n-1, \quad \forall n \geq 0.$$
7. En déduire :
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \Pi_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n! n^z}. \tag{7}$$
Indication : Utiliser l'exercice 5 et la formule de Stirling :
$$\Gamma(x+1) \underset{x \to +\infty}{\to} \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x$$