Université de Rennes 1 **Année 2025–2026**

Agrégation de Mathématiques
Feuille de TD 0 : exemple de leçon

Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

Les prolongements envisagés sont ceux qui étendent le champ d'une propriété donnée : régularité, définition d'un concept.

I. Continuité

1) Prolongement ponctuel

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $a \in I$. Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ continue. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ existe on pose : $f(a) = \ell$.

Exemple 1

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

2) Prolongement hors d'un ensemble fermé

Théorème 2. Soit (E, d) un espace métrique, $A \subset E$ une partie fermée. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ continue et bornée. Alors f se prolonge en une application $g : R \to \mathbb{R}$ continue et bornée. De plus :

$$\inf_E g = \inf_A f \quad \text{et} \quad \sup_E g = \sup_A f$$

3) Le Théorème de Hahn-Banach analytique

Soit E un ev sur $\mathbb{R}$ et soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :

1. $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in E$, $p(tx) = tp(x)$;
2. $\forall x, y \in E$, $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Soit $F \subset E$ un sev de E et soit $f : F \to \mathbb{R}$ une application linéaire t.q. : $\forall x \in F$, $f(x) \leq p(x)$. Alors il existe une application linéaire $g : E \to \mathbb{R}$ t.q.

1. $g|_F = f$;
2. $\forall x \in E$, $g(x) \leq p(x)$.

Application 3 : Prolongement par continuité. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $F \subset E$ un sev de E et soit $f : F \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe $g \in E'$ t.q. $g|_F = f$ et $\|g\| = \|f\|$.

Application 4. Soit $E \neq \{0\}$ un ev sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $x_0 \in E \setminus \{0\}$. Il existe $\phi \in E'$ t.q. $\phi(x_0) = \|x_0\|$ et $\|\phi\| = 1$.

Application 5. Soit $E \neq \{0\}$ un ev. Alors :

$$\forall x, y \in E, \quad x \neq y \Rightarrow \exists f \in E' \quad \text{t.q.} \quad f(x) \neq f(y).$$

Application 6. Soit E un evn et soit $F \subset E$, $F \neq E$, un sev fermé de E. Soit $x_0 \in E \setminus E$. Alors $\exists f \in E'$ t.q. $f(x_0) = d(x_0, F) > 0$ et $f|_F = 0$.

Application 7. Si E est un evn, alors un sev F de E est dense dans E ssi :

$$\forall f \in E', \quad f|_F = 0 \Rightarrow f = 0.$$

4) Continuité uniforme. Prolongement des applications uniformément continues.

Théorème 7. Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$ dense dans X. Soit (Y, d') un espace métrique complet et soit $f : (A, d) \to (Y, d')$ une application uniformément continue. Alors, il existe une unique application $\overline{f} : (X, d) \to (Y, d')$ uniformément continue t.q. $\overline{f}|_A = f$. De plus, f et $\overline{f}$ ont même module de continuité.

Application 8 : Transformée de Fourier (*Développement 1*)
Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ à décroissance rapide. On définit les transformations de Fourier :

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi\xi\cdot x}\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

$$\overline{\mathcal{F}}(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\xi\cdot x}\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

qui sont des applications linéaires continues $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, inverses l'une de l'autre.

Théorème 9 *: Les transformations de Fourier $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ se prolongent de façon unique en des isométries inverses l'une de l'autre de $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Théorème 10 *: Les transformations de Fourier $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ se prolongent de façon unique en des applications linéaires continues inverses l'une de l'autre de $L^1(\mathbb{R}^n)$ dans l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.*

II. Prolongement des solutions d'une edo

Théorème 11 : Soit $f :]a, b[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t, y) \mapsto f(t, y)$, continue, localement lipschitzienne en la variable y, et soit (x, J) une solution maximale de $x'(t) = f(t, x(t)$ avec $J =]\alpha, \beta[$. On a l'alternative : soit $\beta = b$, soit $\beta < b$ et alors $\lim_{t \to \beta^-} \|x(t)\| = +\infty$.

Application 12 : La solution maximale de $x''(t) = -\sin(x(t))$, $x(0) = 0$, $x'(0) = \alpha > 0$ où $\alpha > 0$ est donné, est définie sur $\mathbb{R}$, $\forall \alpha > 0$.

III. Prolongement holomorphe

Théorème 12 (*Principe des zéros isolés*). Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe non identiquement nulle. Les zéros de f sont isolés et forment un ensemble au plus dénombrable.

Application 13 : Prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ des fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$.

Application 14 : *(Développement 2) Prolongement méromorphe de la fonction* Γ.

(i) L'intégrale

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(z) > 0$.

(ii) La fonction Γ *ainsi définie se prolonge à* $\mathbb{C}$ *en une fonction méromorphe sur* $\mathbb{C}$ *et holomorphe sur* $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f *admet un pôle simple en* $-n$, *de résidu* $\frac{(-1)^n}{n!}$.