

Agrégation de Mathématiques
Feuille de TD 1

Exercice 1

Soit $h^1(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \{u \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \sum_{n \geq 0} n^2 |u_n|^2 < +\infty\}$.

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $h^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ en posant :

$$\forall a, b \in h^1(\mathbb{N}), \quad \langle a, b \rangle_{h^1} = \sum_{n \geq 0} (1 + n^2) a_n \bar{b}_n.$$

2. Soit $(u^{(k)})_{k \geq 0} \in h^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $h^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $k_0 > 0$ et une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ t.q. :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_n^{(k)} = u_n, \quad \forall n \geq 0$$

et

$$\sum_{n=0}^N (1 + n^2) |u_n^{(k)} - u_n|^2 \leq \varepsilon, \quad \forall N \geq 1, \quad \forall k \geq k_0.$$

3. Montrer que le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{h^1}$ fait de $h^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ un espace de Hilbert.
4. (a) Soit $u \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. On considère la suite $(u^{(N)})_{N \geq 0}$ définie par :

$$u^{(N)} = \begin{cases} u_n & \text{si } n \leq N, \\ 0 & \text{si } n > N, \end{cases}$$

Montrer que la suite $(u^{(N)})_{N \geq 0}$ converge vers u dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

- (b) Montrer que $h^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est dense dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

5. (a) Soit $(u^{(N)})_{N \geq 0} \in h^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ t.q. $\|u^{(N)}\|_{h^1} \leq 1, \forall N \geq 0$, et soit $(v_k)_{k \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers 0 dans $\mathbb{C}$. Montrer que pour tout $k \geq 0$, il existe $u_k \in \mathbb{C}$ et une suite extraite $(u^{\varphi_k(N)})_{N \geq 0}$ t.q. :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} |u_k^{\varphi_k(N)} - u_k| = 0 \quad \text{et} \quad |u_k^{\varphi_k(N)} - u_k| \leq v_k, \quad \forall N \geq 0.$$

- (b) Montrer que la boule unité fermée de $h^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est compacte dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

Exercice 2

Soit E un espace de Hilbert et soit $T \in E'$. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \|x\|^2 - T(x).$$

1. Montrer qu'il existe $a \in E$ t.q.

$$f(x) = \|x - a\|^2 - \|a\|^2, \quad \forall x \in E.$$

2. Montrer que f est bornée inférieurement sur E et que cette borne est atteinte sur E .
3. Soit $x_0 \in E$ t.q. $f(x_0) = \inf_E f$. Soit C un convexe fermé. Montrer que

$$\inf_C f = f(p_C(x_0)).$$

Exercice 3

Soit H un espace de Hilbert et soit $(K_n)_{n \geq 0}$ une suite de convexes fermés non vides de H . Soit $f \in H$. On pose $u_n = p_{K_n}(f)$, $\forall n \geq 0$.

1. On suppose que la suite $(K_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et que $\bigcap_{n \geq 0} K_n \neq \emptyset$.
 - (a) Montrer que la suite de terme général $\|u_n - f\|$ est croissante majorée par $\|x - f\|$, $\forall x \in \bigcap_{n \geq 0} K_n$.
 - (b) Montrer que :

$$\forall n, p \geq 0, \quad \|u_{n+p} - u_n\|^2 \leq 2\|u_{n+p} - f\|^2 - 2\|u_n - f\|^2.$$

- (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers une limite de la forme $p_K(f)$ où K est un convexe fermé à préciser.
2. On suppose que la suite $(K_n)_{n \geq 0}$ est croissante.
 - (a) Montrer que $K = \overline{\bigcup_{n \geq 0} K_n}$ est un convexe fermé.
 - (b) Montrer que la suite de terme général $\|u_n - f\|$ converge.
 - (c) Montrer que :

$$\forall n, p \geq 0, \quad \|u_{n+p} - u_n\|^2 \leq 2\|u_n - f\|^2 - 2\|u_{n+p} - f\|^2.$$

- (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers $p_K(f)$.
- (e) Soit $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et bornée inférieurement. On pose : $\forall n \geq 0$, $c_n = \inf_{K_n} \varphi$. Montrer que la suite $(c_n)_{n \geq 0}$ converge. Identifier sa limite.