

Agrégation de Mathématiques
Feuille de TD 2

Exercice 1

1. Montrer que la série de fonctions méromorphes :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2}$$

converge uniformément sur les bandes $\{a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b\} \setminus \mathbb{Z}$, $a < b$. On note f sa somme.

2. Montrer que f est méromorphe sur $\mathbb{C}$, de pôles à préciser.
3. Montrer que f est périodique de période 1.
4. Montrer que :

$$\lim_{|y| \rightarrow +\infty} f(x + iy) = 0$$

et que la convergence est uniforme en x .

5. En déduire que

$$f(z) = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)} \right)^2, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Exercice 2

1. Montrer que la série de fonctions méromorphes

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right) \tag{1}$$

converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ vers la somme :

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{\pi}{\tan \pi z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Indication : Utiliser le résultat de l'Exercice 1.

2. Montrer que

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{\pi}{\tan \pi z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Exercice 3

1. Montrer que f définie par le produit infini :

$$f(z) = z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \quad (4)$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

2. Montrer que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\pi}{\tan \pi z} = \frac{1}{z} + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{z}{z^2 - n^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Indication Utiliser l'Exercice 2.

3. Montrer que

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Exercice 4

1. Montrer que le produit infini

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$ et définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Indication : Montrer que

$$|(1+w)e^{-w} - 1| \leq |w|^2 e^{|w|}, \quad \forall w \in \mathbb{C}.$$

2. On pose :

$$\Phi(z) = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

où

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N \right).$$

Montrer que la fonction $\frac{\Phi'}{\Phi}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et s'écrit comme la somme d'une série de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$:

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}).$$

3. En déduire

$$\Phi(z+1) = \frac{\Phi(z)}{z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}).$$

4. Comparer avec le résultat de l'Exercice 3 pour montrer que :

$$\Phi(z)\Phi(1-z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$