Université de Rennes 1 **Année 2025–2026**

Agrégation de Mathématiques
Feuille de TD 1

Exercice 1

1. Montrer que la série de fonctions méromorphes :
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$
converge uniformément sur les bandes $\{a \leq \mathrm{Re}(z) \leq b\} \setminus \mathbb{Z}$, $a < b$. On note f sa somme.
2. Montrer que f est méromorphe sur $\mathbb{C}$, de pôles à préciser.
3. Montrer que f est périodique de période 1.
4. Montrer que :
$$\lim_{|y|\to+\infty} f(x+iy) = 0$$
et que la convergence est uniforme en x.
5. En déduire que
$$f(z) = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Exercice 2

1. Montrer que la série de fonctions méromorphes
$$\frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) \tag{1}$$
converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ vers la somme :
$$\frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{\tan \pi z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \tag{2}$$
Indication : Utiliser le résultat de l'Exercice 1.
2. Montrer que
$$\frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2-n^2} = \frac{\pi}{\tan \pi z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Exercice 3

1. Montrer que f définie par le produit infini :
$$f(z) = z\Pi_{n\geq 1}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \tag{4}$$
est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\pi}{\tan \pi z} = \frac{1}{z} + 2\sum_{n\geq 1}\frac{z}{z^2 - n^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}.$$
Indication Utiliser l'Exercice 2.
3. Montrer que
$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \Pi_{n\geq 1}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}. \tag{5}$$

Exercice 4

1. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $z \mapsto \frac{e^{zx}}{e^z-1}$ se développe sous la forme*
$$\frac{e^{zx}}{e^z - 1} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1}\frac{\varphi_n(x)}{n!}z^{n-1} \quad \textit{pour } 0 < |z| < 2\pi$$
où les coefficients $\varphi_n(x)$, $n \geq 1$ sont des polynômes.
On remarque que : $\forall z \in \mathbb{C}$,
$$e^z - 1 = 0 \iff z \in 2i\pi\mathbb{Z},$$
donc $z = 0$ est l'unique pôle de $z \mapsto \frac{1}{e^z-1}$ pour $|z| < 2\pi$. De plus :
$$\frac{1}{e^z - 1} \underset{z\to 0}{\sim} \frac{1}{z}$$
donc $z \mapsto \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}$ est holomorphe pour $|z| < 2\pi$, dévelopable sous la forme :
$$\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n, \quad \forall\, |z| < 2\pi.$$
Il en résulte :
$$\frac{e^{zx}}{e^z - 1} = \left(\frac{1}{z} + \sum_{n\geq 0} a_n z^n\right) e^{zx} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 0}\frac{z^n x^{n+1}}{(n+1)!} + \left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0}\frac{z^n x^n}{n!}\right)$$
$$= \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 0}\underbrace{\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}b_{n-k}\right)}_{=:\frac{\varphi_{n+1}(x)}{(n+1)!}} z^n$$

2. *Montrer que :*

$$\frac{e^{zx}}{e^z-1} = \frac{e^{-z(1-x)}}{1-e^{-z}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z},$$

En déduire : $\forall x \in [0,1]$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$,

$$\left|\frac{e^{zx}}{e^z-1}\right| \leq \frac{1}{|e^z-1|} + \frac{1}{|1-e^{-z}|}$$

Soit $x \in [0,1]$, $z \in D \setminus \{0\}$. On a :

$$\frac{e^{zx}}{e^z-1} = \frac{e^{-z}e^{zx}}{e^{-z}(e^z-1)} = \frac{e^{-z(1-x)}}{(1-e^{-z})}$$

Soit $z = s+it \in \mathbb{C}$. On a :

$$\left|\frac{e^{zx}}{e^z-1}\right| = \frac{e^{sx}}{|e^z-1|} \leq \frac{1}{|e^z-1|} \quad \text{si} \quad s \leq 0.$$

Soit $s \geq 0$. On a :

$$\left|\frac{e^{zx}}{e^z-1}\right| = \left|\frac{e^{-z(1-x)}}{1-e^{-z}}\right| = \frac{e^{-s(1-x)}}{|1-e^{-z}|} \underset{s(1-x)\geq 0}{\leq} \frac{1}{|1-e^{-z}|}$$

3. *Montrer qu'il existe une suite* $(r_k)_{k\geq 0} \in]0,+\infty[$ *et une constante* $C>0$ *t.q.* $2k\pi < r_k < 2(k+1)\pi$, $\forall k \geq 0$, *et :*

$$\frac{1}{|e^z-1|} \leq C, \quad si \quad |z| = r_k, \quad \forall k \geq 0$$

Soit $z = s+it \in \mathbb{C}$. On a :

$$|e^z-1|^2 = e^{2s} - 2e^s\cos(t) + 1 \geq e^{2s} - 2e^s + 1 = (e^s-1)^2$$

avec

$$\lim_{s\to+\infty} |e^s-1| = +\infty \Rightarrow \lim_{s\to+\infty} |e^z-1| = +\infty.$$

De plus :

$$\lim_{s\to-\infty} (e^{2s} - 2e^s\cos(t) + 1) = 1 > 0.$$

Donc il existe $R>0$ t.q. :

$$|e^z-1| \geq \frac{1}{2}, \quad \forall z = s+it \quad \text{avec} \quad |s| \geq R.$$

Comme de plus $z \mapsto e^z - 1$ est périodique de période $2i\pi$, on peut supposer $|t| \leq \pi$. Soit K le compact défini par :

$$K = \{z = s+it \in \mathbb{C},\ |s| \leq R \quad \text{et} \quad |t| \leq \pi\}.$$

On remarque que : $z=0$ est l'unique zéro de $z \mapsto e^z - 1$ dans K. Donc si $|z| = r_k$ avec $k \geq 0$, alors $|z| \geq r_0 > 0$. Alors

$$K_0 := K \cap \{z \in \mathbb{C},\ |z| \geq r_0\}$$

est encore un compact, et par construction :

$$\min_{z \in K_0} |e^z - 1| =: \mu > 0.$$

Finalement :

$$\min_{\cup_{k\geq 0}\{|z|=r_k\}} |e^z - 1| = \min(\mu, 1) > 0.$$

Dans la suite on choisit :

$$r_k = \pi(2k+1), \quad \forall k \geq 0;$$

4. *Soit $k \geq 1$. Montrer que pour des contours $\gamma, \gamma_k \subset \mathbb{C}$ appropriés : $\forall x \in [0,1]$,*

$$\frac{\varphi_n(x)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)}dz, \quad \forall n \geq 1,$$

$$\frac{\varphi_n(x)}{n!} + \sum_{r=1}^{k}\left(\frac{e^{2i\pi r x}}{(2i\pi r)^n} + \frac{e^{-2i\pi r x}}{(-2i\pi r)^n}\right) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_k} \frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)}dz, \quad \forall n \geq 1,$$

On remarque que : $\forall n \geq 1$,

$$\frac{\varphi_n(x)}{n!} = \operatorname{Res}\frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)}\Big|_{z=0}, \quad \forall n \geq 1.$$

Soit $\gamma \subset \mathbb{C}$ un cercle de centre 0, de rayon $< 2\pi$. Du Théorème des résidus, on déduit :

$$\int_\gamma \frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)}dz = 2i\pi\frac{\varphi_n(x)}{n!}, \quad \forall n \geq 1.$$

De même, si γ_k est un cercle de centre 0 de rayon $r_k \in]2k\pi, 2(k+1)\pi[$, alors

$$\int_{\gamma_k} \frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)}dz = 2i\pi\frac{\varphi_n(x)}{n!} + 2i\pi\sum_{r=0}^{k}\operatorname{Res}\frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)}\Big|_{z=\pm 2ir\pi} =$$

$$= 2i\pi\frac{\varphi_n(x)}{n!} + 2i\pi\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{e^{2i\pi r x}}{(2i\pi r)^n} + \frac{e^{-2i\pi r x}}{(-2i\pi r)^n}\right)$$

5. *Soit $x \in [0,1]$. Montrer que pour tout $k \geq 1$, on a :*

$$\varphi_{2k}(x) = (-1)^{k+1}2(2k)!\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(2\pi n x)}{(2n\pi)^{2k}},$$

$$\varphi_{2k+1}(x) = (-1)^{k+1} 2(2k+1)! \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(2\pi nx)}{(2n\pi)^{2k+1}},$$

les séries étant normalement convergentes pour $0 \leq x \leq 1$.
Soit $x \in [0,1]$ et soit $n \geq 2$. Soit $k \geq 1$. On a :

$$\int_{\gamma_k} \frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)} dz \underset{z=r_k e^{i\theta}}{=} i \int_0^{2\pi} \frac{e^{xr_k e^{i\theta}}}{r_k^n e^{in\theta}(e^{r_k e^{i\theta}}-1)} r_k e^{i\theta} d\theta =$$

$$= i \int_0^{2\pi} \frac{e^{xr_k e^{i\theta}}}{r_k^{n-1} e^{i(n-1)\theta}(e^{r_k e^{i\theta}}-1)} d\theta$$

donc

$$\left| \int_{\gamma_k} \frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)} dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{|e^{xr_k e^{i\theta}}|}{r_k^{n-1}|e^{r_k e^{i\theta}}-1|} d\theta \underset{3.}{\leq} \frac{C}{r_k^{n-1}} \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$

On en déduit :

$$\frac{\varphi_n(x)}{n!} = -\sum_{r\geq 1} \left(\frac{e^{2i\pi rx}}{(2i\pi r)^n} + \frac{e^{-2i\pi rx}}{(-2i\pi r)^n} \right)$$

et que la série du membre de droite est normalement convergente sur $[0,1]$.
Si $n = 2k \geq 2$ est pair,

$$\frac{\varphi_{2k}(x)}{(2k)!} = -\sum_{r\geq 1} \left(\frac{e^{2i\pi rx}}{(2i\pi r)^{2k}} + \frac{e^{-2i\pi rx}}{(2i\pi r)^{2k}} \right) = (-1)^{k+1} 2 \sum_{r\geq 1} \frac{\cos(2\pi rx)}{(2\pi r)^{2k}}$$

Si $n = 2k+1 \geq 3$ est impair,

$$\frac{\varphi_{2k+1}(x)}{(2k+1)!} = -\sum_{r\geq 1} \left(\frac{e^{2i\pi rx}}{(2i\pi r)^{2k+1}} - \frac{e^{-2i\pi rx}}{(2i\pi r)^{2k+1}} \right) = (-1)^{k+1} 2 \sum_{r\geq 1} \frac{\sin(2\pi rx)}{(2\pi r)^{2k+1}}$$

6. *Soit $x \in]0,1[$. Montrer que :*

$$x - \frac{1}{2} = \varphi_1(x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(2\pi nx)}{n\pi}$$

où la série du membre de droite est uniformément convergente sur les intervalles $[\alpha, 1-\alpha]$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, et où les sommes partielles $\sum_{n=1}^N \frac{\sin(2\pi nx)}{n\pi}$, $N \geq 1$, sont bornées au sens suivant : il existe $A > 0$ t.q.

$$\left| \sum_{n=1}^N \frac{\sin(2\pi nx)}{n\pi} \right| \leq A, \quad \forall x \in [0,1], \quad \forall N \geq 1.$$

Soit $x \in]0,1[$. On remarque que $\varphi_1(x)$ est le coefficient de z^0 dans le développement de $\frac{e^{zx}}{e^z-1}$, i.e., avec les notations de la question 1. :

$$\varphi_1(x) = x + a_0.$$

De plus :

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z+\frac{z^2}{2}+o(|z|2)} = \frac{1}{z(1+\frac{z}{2}+o(|z|))} = \frac{1}{z}\left(1-\frac{z}{2}+o(|z|)\right)$$

i.e. :

$$\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z} = -\frac{1}{2} + o(1) \Rightarrow a_0 = -\frac{1}{2}.$$

On a aussi :

$$\underbrace{\varphi_1(x)}_{=x-\frac{1}{2}} + \sum_{r=1}^{k} \underbrace{\left(\frac{e^{2i\pi rx}}{(2i\pi r)} + \frac{e^{2i\pi rx}}{(-2i\pi r)}\right)}_{=\frac{\sin(2\pi rx)}{\pi r}} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_k} \frac{e^{zx}}{z(e^z-1)}dz, \quad \forall k \geq 1.$$

avec : $\forall k \geq 1$,

$$\int_{\gamma_k} \frac{e^{zx}}{z(e^z-1)}dz = i\int_0^{2\pi} \frac{e^{xr_ke^{i\theta}}}{e^{r_ke^{i\theta}}-1}d\theta \Rightarrow \left|\int_{\gamma_k} \frac{e^{zx}}{z(e^z-1)}dz\right| \leq$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \frac{|e^{xr_ke^{i\theta}}|}{|e^{r_ke^{i\theta}}-1|}d\theta \underset{3.}{\leq} 2\pi C$$

donc

$$\left|\sum_{r=1}^{k} \frac{\sin(2\pi rx)}{\pi r}\right| \leq C, \quad \forall k \geq 1.$$

Soit $\alpha \in]0,1[$ et soit $x \in [\alpha, 1-\alpha]$. On a : $\forall\theta \in [0,2\pi]$,

$$\frac{|e^{xr_ke^{i\theta}}|}{|e^{r_ke^{i\theta}}-1|} \leq \frac{1}{\rho}|e^{xr_ke^{i\theta}}| = \frac{1}{\rho}e^{r_k\cos\theta}$$

Soit $\delta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}-\delta] \cup [\frac{3\pi}{2}+\delta, 2\pi]$, alors

$$\cos\theta \geq \sin\delta > 0 \Rightarrow \left|\frac{e^{xr_ke^{i\theta}}}{e^{r_ke^{i\theta}}-1}\right| = \left|\frac{e^{-(1-x)r_ke^{i\theta}}}{1-e^{-r_ke^{i\theta}}}\right| = \frac{e^{-(1-x)r_k\cos\theta}}{|1-e^{-r_ke^{i\theta}}|} \leq$$

$$\leq \frac{e^{-\alpha r_k\sin\delta}}{|1-e^{-r_ke^{i\theta}}|} \leq Ce^{-\alpha r_k\sin\delta} \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$

Si $\theta \in [\frac{\pi}{2}+\delta, \frac{3\pi}{2}-\delta]$, alors

$$\cos\theta \leq -\sin\delta < 0 \Rightarrow \left|\frac{e^{xr_ke^{i\theta}}}{e^{r_ke^{i\theta}}-1}\right| = \frac{e^{xr_k\cos\theta}}{|e^{r_ke^{i\theta}}-1|} \leq \frac{e^{-\alpha r_k\sin\delta}}{|e^{-r_ke^{i\theta}}-1|}$$

$$\leq Ce^{-\alpha r_k \sin\delta} \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$

De plus :

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} \frac{|e^{xr_k e^{i\theta}}|}{|e^{r_k e^{i\theta}}-1|} d\theta \leq 2C\delta$$

Finalement :

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_k} \frac{e^{zx}}{z(e^z-1)} dz \right| \leq 2C\delta + Ce^{-r_k \sin\delta}, \quad \forall k \geq 1$$

donc

$$\lim_{k\to+\infty} \sup \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_k} \frac{e^{zx}}{z(e^z-1)} dz \right| \leq 2C\delta, \quad \forall \delta > 0$$

i.e. :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_k} \frac{e^{zx}}{z(e^z-1)} dz \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$

et la convergence est uniforme en $x \in [\alpha, 1-\alpha]$.

7. *Etudier l'existence d'un prolongement holomorphe de* $\tilde{\varphi}_n = \varphi_n|_{[0,1]}$, $n \geq 1$.
   On relarque que
   $$\tilde{\varphi}_1(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$$
   donc la série qui définit $\tilde{\varphi}_1$ n'est pas prolongeable continûment sur $\mathbb{R}$, au contraire de $\tilde{\varphi}_n$ pour $n \geq 2$ dont les développements en séries convergent uniformément sur $\mathbb{R}$. Le prolongement homlomorphe n'est pas possible car $z \mapsto \sin(z)$ et $z \mapsto \cos(z)$ ne sont pas bornées sur $\mathbb{C}$.

Exercice 5

1. Montrer que le produit infini
   $$\Pi_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$
   converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$ et définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
   Indication : Montrer que
   $$|(1+w)e^{-w} - 1| \leq |w|^2 e^{|w|}, \quad \forall w \in \mathbb{C}.$$
2. On pose :
   $$\Phi(z) = ze^{\gamma z} \Pi_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$
   où
   $$\gamma = \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln N \right).$$

Montrer que la fonction $\frac{\Phi'}{\Phi}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et s'écrit comme la somme d'une série de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$:

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}).$$

3. En déduire
$$\Phi(z+1) = \frac{\Phi(z)}{z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}).$$

4. Comparer avec le résultat de l'Exercice 3 pour montrer que :
$$\Phi(z)\Phi(1-z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Exercice 6

1. *Montrer que l'intégrale*
$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$
est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(z) > 0$.
Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On a :
$$|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{x-1} \underset{t \to 0^+}{\sim} t^{x-1}$$
avec
$$0 < \int_0^1 t^{x-1} dt < +\infty \iff 1 - x < 1 \iff x > 0.$$
De plus :
$$\lim_{t \to +\infty} e^{-t} t^{\alpha + x - 1} = 0, \quad \forall \alpha > 0.$$
Le choix $\alpha > 1$ montre que $0 < \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt < +\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Finalement :
$$0 < \int_0^{+\infty} |e^{-t} t^{z-1}| dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt < +\infty \iff x = \mathrm{Re}(z) > 0.$$
Soit $z = x + iy$ avec $0 < \varepsilon \leq x \leq R$. On a
$$|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{x-1} = e^{-t} e^{(x-1) \ln t}.$$
Si $t \in]0, 1[$, alors
$$\ln t < 0 \Rightarrow e^{-t} e^{(x-1) \ln t} = e^{-t} e^{(1-x)|\ln t|} \leq e^{-t} e^{(1-\varepsilon)|\ln t|} = e^{-t} t^{\varepsilon - 1}$$
et $\int_0^1 e^{-t} t^{\varepsilon - 1} dt < +\infty$ d'après ce qui précède. Si $t > 1$ alors
$$\ln t > 0 \Rightarrow e^{-t} e^{(x-1) \ln t} =\leq e^{-t} e^{(R-1) \ln t} = e^{-t} t^{R-1}$$
et $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{R-1} dt < +\infty$ d'après ce qui précède.

2. *Montrer que* $z \mapsto \Gamma(z)$ *définit une fonction holomorphe sur le demi-plan* $\mathrm{Re}(z) > 0$ *et que :*

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \forall \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Soit $z = x + iy$ avec $0 < \varepsilon \leq x \leq R$. On a

$$|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{x-1} = e^{-t} e^{(x-1)\ln t}.$$

Si $t \in]0, 1[$, alors

$$\ln t < 0 \Rightarrow e^{-t} e^{(x-1)\ln t} = e^{-t} e^{(1-x)|\ln t|} \leq e^{-t} e^{(1-\varepsilon)|\ln t|} = e^{-t} t^{\varepsilon - 1}$$

et $\int_0^1 e^{-t} t^{\varepsilon-1} dt < +\infty$ d'après ce qui précède. Si $t > 1$ alors

$$\ln t > 0 \Rightarrow e^{-t} e^{(x-1)\ln t} =\leq e^{-t} e^{(R-1)\ln t} = e^{-t} t^{R-1}$$

et $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{R-1} dt < +\infty$ d'après ce qui précède.
Comme de plus $z \mapsto t^{z-1}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, on déduit du Théorème de convergence dominée de Lebesgue que Γ induit une fonction holomorphe sur tout compact de $U := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$, donc holomorphe sur U. De plus :

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial z^k} (e^{-t} t^{z-1}) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} (\ln t)^k dt$$

3. *Montrer que*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \forall\, \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Soit $\mathrm{Re}(z) > 0$. On intègre par parties :

$$\mathrm{Re}(z) > 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(z+1) > 0 \Rightarrow \Gamma(z+1) = [e^{-t} t^z]_0^{+\infty} + z\Gamma(z).$$

avec, en posant $z = x + iy$:

$$|e^{-t} t^z| = e^{-t} t^x \underset{\substack{t \to +\infty \\ x > 0}}{\to} 0$$

$$|e^{-t} t^z| = e^{-t} t^x \underset{t \to 0^+}{\sim} t^{x \ln t} \underset{\substack{t \to +0 \\ x > 0}}{\to} 0$$

donc

$$\Gamma(z+1) = \underbrace{[e^{-t} t^z]_0^{+\infty}}_{=0} + z\Gamma(z) = z\Gamma(z).$$

4. *En déduire* $\Gamma(n+1)$ *pour* $n \geq 0$. *Montrer que :*

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{\Pi_{k=0}^{n-1}(z+k)} = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}, \quad \forall \operatorname{Re}(z) > 0. \tag{6}$$

On vérifie immédiatement que $\Gamma(n+1) = n!$.
Pour montrer (6), on raisonne par récurrence sur $n \geq 1$.
Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété (6). On remarque que $\mathcal{P}(1)$ coïncide avec 3. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Soit $\operatorname{Re}(z) > 0$. Alors $\operatorname{Re}(z+n+1) = \operatorname{Re}(z)+n+1 > 0 \Rightarrow$

$$\Gamma(z+n+1) = (z+n)\Gamma(z+n) \underset{\mathcal{P}(n)}{=} (z+n)\Pi_{k=0}^{n-1}(z+k)\Gamma(z)$$

$$= \Pi_{k=0}^{n}(z+k)\Gamma(z).,$$

i.e. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On conclut par récurrence sur $n \geq 1$.

5. *Montrer que la fonction* Γ *se prolonge à* $\mathbb{C}$ *en une fonction méromorphe sur* $\mathbb{C}$ *et holomorphe sur* $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$. *Vérifier que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f *admet un pôle simple en* $-n$, *de résidu* $\frac{(-1)^n}{n!}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application :

$$z \mapsto \frac{\Gamma(z+n)}{\Pi_{k=0}^{n-1}(z+k)} \tag{7}$$

est holomorphe sur l'ouvert

$$U_n := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, \cdots, -n+1\} | \operatorname{Re}(z) > -n\}$$

et coïncide avec Γ pour $\operatorname{Re}(z) > 0$ d'après (6). Du Théorème des zéros isolés, on déduit que (7) est un prolongement holomorphe de Γ à U_n. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que Γ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z) \underset{(6)}{=} \lim_{z\to -n}(z+n)\frac{\Gamma(z+n+1)}{\Pi_{k=0}^{n}(z+k)} = \lim_{z\to -n}\frac{\Gamma(z+n+1)}{\Pi_{k=0}^{n-1}(z+k)} =$$

$$= (-1)^n \frac{\Gamma(1)}{n!} \tag{8}$$

avec

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1.$$

Il en résulte :

$$\Gamma(z) \underset{z\to -n}{\sim} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$$

i.e. Γ admet un pôle simple en $-n \in -\mathbb{N}$ de résidu $\frac{(-1)^n}{n!}$.

6. *Montrer que :*

$$\left|\frac{\Gamma(z+n+1)}{n!n^z}\right| \leq \frac{\Gamma(x+n+1)}{n!n^x}, \quad si \quad x = \mathrm{Re}(z) > -n-1, \quad \forall n \geq 0.$$

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ t.q. $x > 0$ et soit $n \geq 0$. On a :

$$\left|\frac{\Gamma(z+n+1)}{n!n^z}\right| = \frac{|\Gamma(z+n+1)|}{n!n^x} = \frac{1}{n!n^x}\left|\int_0^{+\infty} t^{z+n}e^{-t}dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n!n^x}\int_0^{+\infty} t^{x+n}e^{-t}dt = \frac{\Gamma(x+n+1)}{n!n^x}.$$

7. *En déduire :*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\Pi_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!n^z}. \qquad (9)$$

Indication : Utiliser l'exercice 5 et la formule de Stirling :

$$\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\to} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

Soit $x > 0$. On a : $\forall n \geq 1$,

$$\frac{\Gamma(x+n+1)}{n!n^x} = \frac{\Gamma(x+n+1)}{\Gamma(n+1)n^x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{x+n+1}{n+1}}\left(\frac{x+n+1}{e}\right)^{x+n+1}\left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1}\frac{1}{n^x} =$$

$$= \sqrt{\frac{x+n+1}{n+1}}\left(\frac{x+n+1}{n}\right)^x\left(\frac{x+n+1}{n+1}\right)^{n+1}e^{-x}$$

$$= \sqrt{1+\frac{x}{n+1}}\left(1+\frac{x+1}{n}\right)^x\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}e^{-x}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{1+\frac{x}{n}}\underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^x}_{\underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\frac{x^2}{n}}}\underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}_{\underset{n\to+\infty}{\to} e^x}e^{-x} \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ et soit $n_0 \geq 1$ t.q. $\mathrm{Re}(z) > -n_0 - 1$. Alors le résultat de la question 6. reste vrai $\forall n \geq n_0$ et donc :

$$\limsup_{n\to+\infty}\left|\frac{\Gamma(z+n+1)}{n!n^z}\right| \leq 1.$$

On aussi : $\forall n \geq 1$,

$$\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!n^z} = ze^{-z\ln n}\Pi_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{n}\right)$$

$$= ze^{z(-\ln n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})}\Pi_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{k}} \tag{10}$$

où :

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\ln N \underset{N\to+\infty}{\to} \gamma$$

et où le produit infini du membre de droite est convergent d'après l'Exercice 1 vers une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. De (6) on déduit :

$$\left|\Gamma(z)ze^{\gamma z}\Pi_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\Gamma(z)\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!n^z}\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\Gamma(z+n+1)}{n!n^z}\right| \leq 1,$$

i.e. que la fonction $z \mapsto \Gamma(z)ze^{\gamma z}\Pi_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}$, qui est holomorphe sur $\mathbb{C}$ car les pôles de Γ sont les éléments de $-\mathbb{N}$ et sont simples, est bornée sur $\mathbb{C}$, donc constante sur $\mathbb{C}$. On remarque que :

$$\lim_{z\to 0} z\Gamma(z) = \Gamma(1) = 1$$

et

$$\lim_{z=to0} e^{\gamma z}\Pi_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}} = 1$$

car le produit infini est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Il en résulte que

$$\Gamma(z)ze^{\gamma z}\Pi_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}} = 1, \quad \forall z\in\mathbb{C}.$$

Exercice 7

Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3\pi}{8}.$$

On pose :

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}.$$

Alors f est méromorphe sur $\mathbb{C}$, de pôles $\pm i$ et ses pôles sont d'ordre 3.

Soit $R>0$ et soit γ_R le demi-cercle :

$$\gamma_R = \{z\in\mathbb{Z},\ |z|=R \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z)>0\}.$$

orienté positivement.

D'après le Théorème des Résidus :

$$\int_{-R}^{R} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi\mathrm{Res}(f)|_{z=i}.$$

Comme $z = i$ est un pôle d'odere $3 > 1$, o utilise un DL au voisinage de $z = i$ pour calculer le résidu de f en ce point. Le changement de variable $z = u + i$ conduit à

$$f(z) = \frac{i}{(2i)^3 u^3}\left(1 + \frac{u}{2i}\right)^{-3} = \frac{i}{(2i)^3 u^3}\left(1 - \frac{3u}{2i} - \frac{3}{2}u^2 + o(|u|^2)\right) \Rightarrow \mathrm{Res}(f)|_{z=i} = -\frac{3i}{16}.$$

Il en résulte :

$$\int_{-R}^{R} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{3\pi}{8}.$$

Il reste à montrer que $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$.

On a :

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz \underset{z=Re^{i\theta}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\theta}}{(R2e^{2i\theta}+1)^3} \Rightarrow \left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq R\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|R^2e^{2i\theta}+1|^3}$$

avec :

$$|R^2e^{2i\theta}+1| \geq |R-1|, \quad \forall\theta \in [0, 2\pi],$$

donc :

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \frac{2\pi R}{|R-1|^3} \underset{R\to+\infty}{\sim} \frac{2\pi}{R^2} \underset{R\to+\infty}{\to} 0.$$

Finalement, quand $R \to +\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = \frac{3\pi}{8}.$$