Préparation à l'Agrégation **Université de Rennes 1**

Année 2020–2021

TP 10: Compléments

Exercice 1

On considère le problème de Laplace: trouver $u : x \mapsto u(x)$ de classe $\mathcal{C}^2$ solution de

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{dans} \quad [0,1], \quad u(0) = u(1) = 0. \tag{1}$$

avec f et c continues. On veut approcher la solution u aux points de la subdivision de $[0,1]$ donnée par:

$$x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_{N+1} = 1, \quad x_i = ih := \frac{i}{N+1}, \quad i \in [[1, N+1]]; \tag{2}$$

On note $X_N \in \mathbb{R}^N$, resp. $U(X_N)$, le vecteur de composantes x_i, resp. $u(x_i)$, $i \in [[1, N]]$.

Pour simplifier les calculs, on suppose $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$ et alors $u \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$ D'après la formule de Taylor:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{6}u^{(4)}(x) + o(h^4)$$

On en déduit:

$$u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2u''(x) + \frac{h^4}{3}u^{(4)}(x) + o(h^4)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2}(-u(x+h) + 2u(x) - u(x-h)) = -u''(x) + O(h^2)$$

Soit $A_N \in \mathbb{R}^{N\times N}$ la matrice définie par ses coefficients: $\forall (i,j) \in [[1, N]]$,

$$a_{ij}^{(N)} = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad i = j, \\ -1 & \text{si} \quad |i-j| = 1, \\ 0 & \text{si} \quad |i-j| > 1 \end{cases}$$

Par construction

$$(N+1)^2 A_N U(X_N) + c(X_N)U(X_N) = F(X_N) + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \tag{3}$$

où $F(X_N) \in \mathbb{R}^N$ désigne le vecteur de composantes $f(x_i)$, $i \in [[1, N]]$.

On peut s'attendre à approcher la solution u de (1) aux points de la subdivision (2) à l'aide du schéma numérique: trouver $U_N \in \mathbb{R}^N$ le vecteur de composantes u_i, $i \in [[1, N]]$, solution de

$$((N+1)^2 A_N + c(X_N)I_N)U_N = F_N \tag{4}$$

où I_N est la matrice identité d'ordre N, $F_N \in \mathbb{R}^N$ est un vecteur donné de composantes f_i, $i \in [[1, N]]$, t.q. $f_i \sim f(x_i)$, $\forall i \in [[1, N]]$. Alors:

$$((N+1)^2 A_N + c(X_N)I_N)(U_N - U(X_N)) = F_N - F(X_N) + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

On pose:

$$\tilde{A}_N = A_N + \frac{c(X_N)}{(N+1)^2} I_N$$

On en déduit:

$$\|U_N - U(X_N)\|_2 \leq \frac{\|\tilde{A}_N^{-1}\|_2}{(N+1)^2} \|F_N - F(X_N)\|_2 + O\left(\frac{1}{N^4}\right) \|A_N^{-1}\|_2$$

avec, compte tenu de la symmétrie de $\tilde{A}_N$:

$$\|\tilde{A}_N^{-1}\|_2 = \rho(\tilde{A}_N^{-1})$$

Le calcul des valeurs propres λ de A_N se déduit du système: $A_N W_N = \lambda W_N$, soit, de façon équivalente

$$w_0 = w_{N+1} = 0, \quad -w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1} = \lambda w_i, \quad i \in [[1, N]].$$

L'équation caractéristique associée s'écrit: $r^2 + (\lambda - 2)r + 1 = 0$. Soit Δ le discriminant. Son expression, $\Delta = (\lambda - 2)^2 - 4$ conduit à considérer deux cas suivant les valeurs de $|\lambda - 2|$.

Si $|\lambda - 2| \leq 2$, soit $\lambda - 2 = 2\cos\theta$. Alors $\lambda = 4\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|^2$ et les racines de l'équation caractéristique sont $-e^{\pm i\theta}$, d'où on déduit:

$$w_k = A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta), \quad k \in [[0, N+1]] \tag{5}$$

où les constantes A, B sont déterminées par les conditions: $W_N \neq 0$, $w_0 = w_{N+1} = 0$, i.e. $A = 0$ et

$$w_{N+1} = 0 = B\sin((N+1)\theta) \Rightarrow \theta = \frac{j\pi}{(N+1)}, \quad j \in [[1, N]].$$

On en déduit N valeurs propres distinctes

$$\lambda_j = 4\left|\cos\left(\frac{j\pi}{2(N+1)}\right)\right|^2, \quad j \in [[1, N]]. \tag{6}$$

Le cas $|\lambda - 2| > 2$ conduit à des composantes w_k de la forme

$$w_k = Ae^{k\theta} + Be^{-k\theta}, \quad k \in [[0, N+1]]$$

avec $w_0 = w_{N+1} = 0 \Rightarrow A = B = 0$, en contradiction avec $W_N \neq 0$.

Finalement:

$$\|\tilde{A}_N^{-1}\|_2 = \rho(\tilde{A}_N^{-1}) = \frac{1}{4\cos\left(\frac{N\pi}{2(N+1)}\right)^2 + \frac{c(X_N)}{(N+1)^2}}$$

$$= \frac{1}{4\sin\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right)^2 + \frac{c(X_N)}{(N+1)^2}}.$$

On en déduit:

$$\frac{\|\tilde{A}_N^{-1}\|_2}{(N+1)^2} = \frac{1}{4(N+1)^2\sin\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right)^2 + c(X_N)} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi^2 + c(X_N)}.$$

Donc

$$c \geq 0 \Rightarrow \|U_N - U(X_N)\|_2 \leq C\|F_N - F(X_N)\|_2 + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

En particulier, si on prend $F_N = F(X_N)$, alors

$$\|U_N - U(X_N)\|_2 = O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

- L'approximation $u'(1) \sim \dfrac{u(x_{N+1}) - u(x_N)}{h}$ conduit à choisir la condition $u_{N+1} = u_N$. Alors

$$\begin{cases} -u_{N-1} + 2u_N - u_{N+1} = f_N, \\ u_{N+1} = u_N \end{cases} \Rightarrow -u_{N-1} + u_N = f_N,$$

Le schéma numérique (4) reste vrai avec A_N défine par

$$a_{ij}^{(N)} = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 1 \leq i = j \leq N-1, \\ 1 & \text{si} \quad i = j = N, \\ -1 & \text{si} \quad |i-j| = 1, \\ 0 & \text{si} \quad |i-j| > 1 \end{cases}$$

Le calcul des valeurs propres de A_N conduit à (5) avec les conditions $w_0 = 0$ et $w_N = w_{N+1}$. On en déduit: $A = 0$ et $B \neq 0 \Rightarrow$

$$\sin((N+1)\theta) = \sin(N\theta) \iff \sin(\mathbb{N}\theta)\cos(\theta) + \cos(N\theta)\sin(\theta) = \sin(N\theta)$$

$$\iff \sin(N\theta)(1 - \cos(\theta)) = \cos(N\theta)\sin(\theta)$$

$$\iff \sin(N\theta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \cos(N\theta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\iff \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left((2N+1)\frac{\theta}{2}\right) = 0.$$

Finalement $\sin(k\theta) \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$\cos\left((2N+1)\frac{\theta}{2}\right) = 0 \iff \theta = \frac{(2k+1)\pi}{(2N+1)}, \quad k \in [[0, N-1]]$$

On en déduit:

$$\frac{\|\tilde{A}_N^{-1}\|_2}{(N+1)^2} = \frac{1}{4(N+1)^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{(2N+1)}\right)^2 + c(X_N)} \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi^2 + c(X_N)}.$$

Donc

$$c \geq 0 \Rightarrow \|U_N - U(X_N)\|_2 \leq C\|F_N - F(X_N)\|_2 + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

En particulier, si on prend $F_N = F(X_N)$, alors

$$\|U_N - U(X_N)\|_2 = O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

- Soit à résoudre:
$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) + c(x,y)u = f(x,y) \quad (x,y) \in]0,1[\times]0,1[,$$
avec la condition au bord: $u(x,y) = 0$ si $x \in \{0,1\}$ ou $y \in \{0,1\}$.
On construit un maillage régulier $(x_{i,j})_{0\le i\le I+1, 0\le j\le J+1}$ de $[0,1]\times[0,1]$ en posant
$$h_x = \frac{1}{I+1}, \quad h_y = \frac{1}{j+1},$$
$$x_{i,j} = (ih_x, jh_y), \quad \forall i,j \in [[0, I+1]] \times [[0, J+1]]$$
où $h_x > 0$, resp. $h_y > 0$, est le pas de la subdivision régulière de $[0,1]$ sur l'axe $0x$, resp. $0y$. Le même raisonnement que précédemment pour chacune des dérivées partielles conduit à chercher $U = (u_{ij}) \in \mathbb{R}^{I+2} \times \mathbb{R}^{J+2}$ solution de:
$$-\frac{1}{h_x^2}(u_{i-1,j}+u_{i+1,j}) + \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} + c(x_{i,j})\right) u_{i,j} - \frac{1}{h_y^2}(u_{i,j-1}+u_{i,j+1}) = f(x_{i,j}),$$
$$u_{0,j} = u_{1,j} = u_{i,0} = u_{j,0}, = 0 \quad 1 \le i \le I, \quad 1 \le j \le J$$
Pratiquement, on résout ce problème par une méthode de point fixe dite de Gauss-Seidel consistant à construire une suite $(u_{ij}^{(n)})_{n\ge 0}$ de points de $\mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^J$ solutions de la récurrence:
$$u_{0,j}^{(n+1)} = u_{I+1,j}^{(n+1)} = u_{i,0}^{(n+1)} = u_{i,J+1}^{(n+1)} = 0, \quad 1 \le i \le I, \quad 1 \le j \le J$$
$$u_{i,j}^{(n+1)} = \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} + c(x_{i,j})\right)^{-1} \left(f(x_{i,j}) + \frac{1}{h_x^2}(u_{i-1,j}^{(n)} + u_{i+1,j}^{(n)}) + \frac{1}{h_y^2}(u_{i,j-1}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)})\right),$$
$$1 \le i \le I, \quad 1 \le j \le J, \quad n \ge 0.$$
Dans l'exemple numérique, on considère le problème associé aux dnnées:
$$c(x,y) = 2\pi^2, \quad f(x,y) = 4\pi^2 \cos(\pi(x+y)).$$
de solution $u(x,y) = \cos(\pi(x+y))$. Par symétrie des variables x et y, on peut choisir: $h_x = h_y = h > 0$ et alors le schéma devient
$$u_{0,j}^{(n+1)} = u_{I+1,j}^{(n+1)} = u_{i,0}^{(n+1)} = u_{i,J+1}^{(n+1)} = 0, \quad 1 \le i \le I, \quad 1 \le j \le J$$
$$u_{i,j}^{(n+1)} = \left(\frac{4}{h^2} + c(x_{i,j})\right)^{-1} \left(f(x_{i,j}) + \frac{1}{h^2}(u_{i-1,j}^{(n)} + u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)})\right),$$
$$1 \le i \le I, \quad 1 \le j \le J, \quad n \ge 0.$$

Exercice 2

Soit à résoudre l'équation de la chaleur:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) = f(t,x), \quad (tx) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1], \tag{7}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u(t,0) = u(t,1) = 0. \tag{8}$$

dont on approche la solution aux points (2) de la subdivision régulière de $[0,1]$ de pas $h = 1/(N+1)$ en des instants $t_n = n\Delta t$, $n \geq 0$, où le pas de temps Δt est donné, à l'aide du schéma numérique: trouver

$$U_N^{(n)} := \begin{pmatrix} u_1^{(n)} \\ \vdots \\ u_N^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

solution de

$$\frac{1}{\Delta t}(U_N^{(n+1)} - U_N^{(n)}) + (N+1)^2 A_N U_N^{(n)} = F_N^{(n)}$$

i.e., sous forme résolue, et en utilisant la notation $h = 1/(N+1)$:

$$U_N^{(n+1)} = U_N^{(n)} - \frac{\Delta t}{h^2} A_N U_N^{(n)} + \Delta t F_N^{(n)}, \quad n \geq 0. \tag{9}$$

1. On suppose que $f(t,x) = f(x)$ ne dépend pas de la variable t. Alors $F_N^{(n)} = F_N$ ne dépend pas de $n \geq 0$. Si on pose:

$$B_N := I_N - \frac{\Delta t}{h^2} A_N$$

alors le système (9) se réécrit sous la forme d'un schéma numérique itératif:

$$U_N^{(n+1)} = B_N U_N^{(n)} + \Delta t F_N \tag{10}$$

dont la suite solution $(U_N^{(n)})_{n\geq 0}$ converge vers la solution du problème:

$$U_N = B_N U_N + \Delta t F_N \iff (N+1)^2 A_N U_N = F_N$$

qui coïncide avec la solution du problème stationnaire étudié précédemment, ssi $\rho(B_N) < 1$.

La contrainte $\rho(B_N) < 1$ permet d'ajuster le pas Δt laissé en suspens. On pose $\alpha = \frac{\Delta t}{h^2} = \Delta t\,(N+1)^2$. Le spectre de B_N est donné par:

$$\sigma(B_N) = \{1 - \alpha\lambda,\ \lambda \in \sigma(A_N)\}$$

On a

$$\rho(B_N) < 1 \iff \max_{1 \leq j \leq N} |1 - \alpha\lambda_j| < 1$$

où les valeurs propres λ_j, $j \in [[1, N]$, sont données par (6). On a: $\forall \lambda \in \sigma(A_N)$,

$$|1 - \alpha\lambda| < 1 \iff -1 < 1 - \alpha\lambda < 1 \iff 0 < \alpha < \frac{2}{\lambda}.$$

On en déduit:

$$\rho(B_N) < 1 \iff 0 < \alpha < \min_{1 \leq j \leq N} \frac{2}{\lambda_j} = \frac{2}{\lambda_1} = \frac{1}{2\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{2(N+1)}\right)\right|^2}.$$

On a

$$\frac{2}{\lambda_1} = \frac{1}{2\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{2(N+1)}\right)\right|^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi^2}{4N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)\right).$$

On en déduit qu'une condition suffisante de convergence vers la solution du problème stationnaire est que $\alpha < 1/2$, ce qui revient à choisir la pas $\Delta t > 0$ t.q.

$$\Delta t < \frac{1}{2(N+1)^2} = \frac{h^2}{2}.$$

2. On suppose $\alpha > 1/2$. Alors le shéma numérique (10) diverge et on est ramené à étudier la solution explose en temps fini, ce qui est la situation rencontrée habituellement dans le cas d'un schéma de type Euler.

   On peut interpréter le schéma (9) en termes de schéma associé à l'équation différentielle de condition initiale u_0 sous-jacente à (7)–(8) dès lors que la variable spatiale est jelée ou considérée comme paramètre.

   On pose:

$$U_N(t) = U(t, X_N) := \begin{pmatrix} u(t, x_1) \\ \vdots \\ u(t, x_N) \end{pmatrix}, \quad F_N(t) = F(t, X_N) := \begin{pmatrix} f(t, x_1) \\ \vdots \\ f(t, x_N) \end{pmatrix},$$

Par définition, l'erreur de consistance du schéma est donnée par:

$$\varepsilon_N^{(n)} = U_N(t_{n+1}) - U_N(t_n) + \Delta t((N+1)^2 A_N U_N(t_n) - F_N(t_n)).$$

Alors, compte tenu de (3):

$$\varepsilon_N^{(n)} = \Delta t \left(\frac{\partial U}{\partial t}(t_n) - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t_n) - F_N(t_n) \right) + O(\Delta t^2) + \Delta t \, O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$= \Delta t \left(O(\Delta t) + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right) = O(\Delta t^2)$$

Pour étudier l'erreur de stabilité, on se donne une suite de vecteurs $(\mu_N^{(n)})_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^N$ t.q.

$$\|\mu_N\|_\infty := \sup_{n\geq 0} \|\mu_N^{(n)}\|_2 < +\infty.$$

et on note $W_N^{(n)} \in \mathbb{R}^N$, $n \geq 0$, la suite de solutions:

$$W_N^{(n+1)} = W_N^{(n)} + \Delta t \left(-(N+1)^2 A_N W_N^{(n)} + F_N^{(n)} + \mu_N^{(n)} \right), \quad n \geq 0,$$

$$W_N^{(0)} = U_N^{(0)}.$$

Alors: $\forall n \geq 0$,

$$W_N^{(n+1)} - U_N^{(n+1)} = (I_N - \alpha A_N)(W_N^{(n)} - U_N^{(n)}) + \Delta t \mu_N^{(n)}$$

$$\Rightarrow \|W_N^{(n+1)} - U_N^{(n+1)}\|_2 \leq \|I_N - \alpha A_N\|_2 \|W_N^{(n)} - U_N^{(n)}\|_2 + \Delta t \|\mu_N^{(n)}\|_2$$

$$\leq \|I_N - \alpha A_N\|_2^{n+1} \|W_N^{(0)} - U_N^{(0)}\|_2 + \Delta t \sum_{k=0}^{n} \|I_N - \alpha A_N\|_2^k \|\mu_N^{(n-k)}\|_2$$

$$= \Delta t \sum_{k=0}^{n} \|I_N - \alpha A_N\|_2^k \|\mu_N^{(n-k)}\|_2 \leq \Delta t \sum_{k=0}^{n} \|I_N - \alpha A_N\|_2^k \|\mu_N\|_\infty$$

$$= \Delta t \frac{\|I_N - \alpha A_N\|_2^{n+1} - 1}{\|I_N - \alpha A_N\|_2 - 1} \|\mu_N\|_\infty$$

avec

$$\|I_N - \alpha A_N\|_2 = \max_{1\leq j\leq N} |1 - \alpha \lambda_j| = \max(|1 - \alpha\lambda_1|, |1 - \alpha\lambda_N|).$$

On a

$$\lambda_N < \cdots < \lambda_1 \iff 1-\alpha\lambda_N < \cdots < 1-\alpha\lambda_1$$

avec

$$1-\alpha\lambda_1 = 1-4\alpha\left|\cos\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right)\right|^2 =$$

$$= 1-4\alpha\left(1-\frac{\pi^2}{4N^2}+o\left(\frac{1}{N^2}\right)\right) = 1-4\alpha+\frac{\alpha\pi^2}{N^2}+\alpha\, o\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$= 1-4\alpha+O(\Delta t)$$

avec $\alpha > 1/2 \Rightarrow 1-4\alpha < 1-2 = -1 < 0$ donc

$$|1-\alpha\lambda_1| = \alpha\lambda_1 - 1 = 4\alpha-1+O(\Delta t).$$

De même:

$$1-\alpha\lambda_N = 1-4\alpha\left|\cos\left(\frac{N\pi}{2(N+1)}\right)\right|^2 = 1-4\alpha\left|\sin\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right)\right|^2$$

$$= 1-\frac{\pi^2\alpha}{N^2}+\alpha\, o\left(\frac{1}{N^2}\right) = 1+O(\Delta t)$$

donc

$$|1-\alpha\lambda_N| = 1-\alpha\lambda_N = 1+O(\Delta t).$$

Finalement:

$$\|I_N-\alpha A_N\|_2 = \max(4\alpha-1+O(\Delta t), 1+O(\Delta t)) \underset{\alpha>1/2}{=} 4\alpha-1+O(\Delta t)$$

donc

$$\|I_N-\alpha A_N\|_2 - 1 = 4\alpha-2+O(\Delta t) > 0$$

dès que $\Delta t > 0$ est suffisamment petit. On en déduit: $\forall n \geq 1$,

$$\|W_N^{(n)} - U_N^{(n)}\|_2 \leq \frac{\|I_N-\alpha A_N\|_2^n}{\|I_N-\alpha A_N\|_2-1}\|\mu_N\|_\infty \leq \frac{e^{n\|I_N-\alpha A_N\|_2}}{\|I_N-\alpha A_N\|_2-1}\|\mu_N\|_\infty$$

$$\leq C_N\frac{e^{n(4\alpha-1)}}{4\alpha-2}\|\mu_N\|_\infty \leq C_N\frac{e^{4n\alpha}}{2(2\alpha-1)}\|\mu_N\|_\infty \leq C_N\frac{e^{4T/N}}{2(2\alpha-1)}\|\mu_N\|_\infty$$

où $[0,T]$ est l'intervalle d'intégration.

Le choix $\mu_N^{(n)} = \varepsilon_N^{(n)}$, $n \geq 0$, correspond à $W_N^{(n)} = U_N(t_n)$, ce qui entraîne:

$$\forall n \geq 0, \quad \|U_N(t_n) - U_N^{(n)}\|_2 \leq C_N\frac{e^{4T/N}}{2(2\alpha-1)}(\Delta t)^2$$

3. On suppose que $\alpha < 1/2$ dans le cas général où le second membre f dépend de t. Alors

$$1 - \alpha\lambda_1 = 1 - 4\alpha \left| \cos\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right) \right|^2 =$$

$$= 1 - 4\alpha + \frac{\alpha\pi^2}{N^2} + \alpha\, o\left(\frac{1}{N^2}\right) = 1 - 4\alpha + \alpha\pi^2\Delta t + o(\Delta t).$$

Si $1/4 < \alpha < 1/2$, alors:

$$|1 - \alpha\lambda_1| = \alpha\lambda_1 - 1 = 4\alpha - 1 - \alpha\pi^2\Delta t + o(\Delta t).$$

De même:

$$1 - \alpha\lambda_N = 1 - 4\alpha \left| \cos\left(\frac{N\pi}{2(N+1)}\right) \right|^2 = 1 - 4\alpha \left| \sin\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right) \right|^2$$

$$= 1 - \frac{\pi^2\alpha}{N^2} + \alpha\, o\left(\frac{1}{N^2}\right) = 1 - \pi^2\Delta t + o(\Delta t)$$

donc

$$|1 - \alpha\lambda_N| = 1 - \alpha\lambda_N = 1 - \pi^2\Delta t + o(\Delta t).$$

On en déduit:

$$|1 - \alpha\lambda_N| - |1 - \alpha\lambda_1| = 1 - (4\alpha - 1) + O(\Delta t) = 2(1 - 2\alpha) + O(\Delta t) > 0$$

$$\Rightarrow \|I_N - \alpha A_N\|_2 = |1 - \alpha\lambda_N| = 1 - \pi^2\Delta t + o(\Delta t) < 1.$$

Si $\alpha < 1/4$, alors:

$$|1 - \alpha\lambda_N| - |1 - \alpha\lambda_1| = 1 - (1 - 4\alpha) + O(\Delta t) = 4\alpha + O(\Delta t) > 0$$

Dans tous les cas: $\alpha < 1/2 \Rightarrow$

$$\|W_N^{(n)} - U_N^{(n)}\|_2 \le \Delta t \left(\frac{\|I_N - \alpha A_N\|_2^n - 1}{\|I_N - \alpha A_N\|_2 - 1}\right) |\mu_N\|_\infty =$$

$$= \Delta t \left(\frac{1 - \|I_N - \alpha A_N\|_2^n}{1 - \|I_N - \alpha A_N\|_2}\right) |\mu_N\|_\infty \le \left(\frac{\Delta t}{1 - \|I_N - \alpha A_N\|_2}\right) \|\mu_N\|_\infty =$$

$$= \left(\frac{\Delta t}{1 - (1 - \pi^2\Delta t + o(\Delta t))}\right) \|\mu_N\|_\infty = \left(\frac{\Delta t}{\pi^2\Delta t + o(\Delta t)}\right) \|\mu_N\|_\infty$$

$$\leq C_N \frac{\|\mu_N\|_\infty}{\pi^2} \tag{11}$$

donc $\mu_N = \varepsilon_N$ et $W_N^{(n)} = U_N(t_n) \Rightarrow$

$$\forall n \geq 0, \quad \|U_N(t_n) - U_N^{(n)}\|_2 \leq C_N \frac{|\Delta t|^2}{\pi^2} \tag{12}$$

Si on remplace $F_N^{(n)}$ par $\tilde{F}_N := F_N^{(0)}$ pour se ramener au cas du système itératif, alors la solution obtenue $\tilde{U}_N^{(n)}$ vérifie, compte tenu de (11) $\mu_N^{(n)} = F^{(n)} - F_N^{(0)} \Rightarrow$

$$\|F^{(n)} - F_N^{(0)}\|_2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|F_N^{(k+1)} - F_N^{(k)}\|_2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t \left\|\frac{\partial F_N}{\partial t}\right\|_\infty = n\Delta t \left\|\frac{\partial F_N}{\partial t}\right\|_\infty$$

$$\leq T \left\|\frac{\partial F_N}{\partial t}\right\|_\infty$$

où $[0, T]$ désigne l'intervalle d'intégration. Donc

$$\|\tilde{U}_N^{(n)} - U_N^{(n)}\|_2 \leq C_N T \frac{\Delta t}{\pi^2} \underset{(12)}{\Rightarrow} \|\tilde{U}_N^{(n)} - U_N(t_n)\|_2 \leq C_N T \frac{\Delta t}{\pi^2}$$

où $C_N > 0$ est une constante générique ne dépendant que de N.

4. Soit le schéma implicite:

$$U_N^{(n+1)} = U_N^{(n)} - \frac{\Delta t}{h^2} A_N U_N^{(n+1)} + \Delta t F_N^{(n)}, \quad n \geq 0, \tag{13}$$

que l'on réécrit sous forme résolue:

$$\left(I_N + \frac{\Delta t}{h^2} A_N\right) U_N^{(n+1)} = U_N^{(n)} + \Delta t F_N^{(n)}, \quad n \geq 0,$$

Les valeurs propres de la matrice

$$\tilde{B}_N := I_N + \frac{\Delta t}{h^2} A_N = I_N + \alpha A_N$$

sont les réels

$$\tilde{\lambda}_j = 1 + \alpha\lambda_j = 1 + 4\alpha \left|\cos\left(\frac{j\pi}{2(N+1)}\right)\right|^2 > 1, \quad j \in [[1, N]],$$

où les valeurs propres λ_j, $j \in [[1, N]]$ sont données par (6). On en déduit que 0 n'est pas valeur propre de $\tilde{B}_N$, donc que $\tilde{B}_N$ est inversible. De plus: $\tilde{\lambda}_j > 1$, $\forall j \in [[1, N]]$, donc $\rho(\tilde{B}_N) < 1$ et le schéma (13) converge inconditionnellement vers le schéma stationnaire de Laplace (4) dont la solution approche la solution stationnaire de (1) dès que la limite $\lim_{t\to+\infty} f(t, x)$ existe, i.e. dès que la limite $\lim_{n\to+\infty} F_N^{(n)}$ existe.

On a:

$$\|\tilde{B}_N\|_2 = \rho(\tilde{B}_N) = 1 + \alpha\lambda_1 = 1 + 4\alpha - \pi^2\Delta t + o(\Delta t)$$

$$\|\tilde{B}_N^{-1}\|_2 = \rho(\tilde{B}_N^{-1}) = \frac{1}{1 + \alpha\lambda_N} = 1 - \pi^2\Delta t + o(\Delta t).$$

L'erreur de consistance est donnée par:

$$\varepsilon_N^{(n)} = \tilde{B}_N U_N(t_{n+1}) - U_N(t_n) - \Delta t F_N(t_n) =$$

$$= U_N(t_{n+1}) - U_N(t_n) - \Delta t \frac{\partial^2 U_N}{\partial x^2}(t_{n+1}) - \Delta t F_N(t_n) + \Delta t O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$= \Delta t \left(\frac{\partial U_N}{\partial t}(t_n) - \frac{\partial^2 U_N}{\partial x^2}(t_{n+1}) - F_N(t_{n+1})\right) + \Delta t (F_N(t_{n+1}) - F_N(t_n)) +$$

$$+ O(\Delta t^2) + \Delta t\, O\left(\frac{1}{N^2}\right) = O(\Delta t^2).$$

Soit $(\mu_N^{(n)})_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^N$ une suite de vecteurs t.q.

$$\|\mu_N\|_\infty := \sup_{n\geq 0} \|\mu^{(n)}\|_2 < +\infty$$

et soit $(W_N^{(n)})_{n\geq 0}$ la suite de solutions associées définie par: $W_N^{(0)} = U_N^{(0)}$ et

$$\tilde{B}_N W_N^{(n+1)} = W_N^{(n)} + \Delta t F_N^{(n)} + \mu_N^{(n)}, \quad n \geq 0.$$

On a: $\forall n \geq 0$,

$$\tilde{B}_N (W_N^{(n+1)} - U_N^{(n+1)}) = W_N^{(n)} - U_N^{(n)} + \mu_N^{(n)},$$

donc

$$\|W_N^{(n+1)} - U_N^{(n+1)}\|_2 \leq \|\tilde{B}_N^{-1}\|_2 \|W_N^{(n)} - U_N^{(n)}\|_2 + \|\tilde{B}_N^{-1}\|_2 \|\mu_N^{(n)}\|_2$$

$$\leq \|\tilde{B}_N^{-1}\|_2^{n+1}\|W_N^{(0)} - U_N^{(0)}\|_2 + \|\tilde{B}_N^{-1}\|_2 \sum_{k=0}^{n} \|\tilde{B}_N^{-1}\|_2^k \|\mu_N^{(n-k)}\|_2$$

$$\leq \|\tilde{B}_N^{-1}\|_2^{n+1}\|W_N^{(0)} - U_N^{(0)}\|_2 + \|\tilde{B}_N^{-1}\|_2 \frac{\|\tilde{B}_N^{-1}\|_2^{n+1} - 1}{\|\tilde{B}_N^{-1}\|_2 - 1}\|\mu_N\|_\infty$$

$$\leq \|\tilde{B}_N^{-1}\|_2^{n+1}\|W_N^{(0)} - U_N^{(0)}\|_2 + \frac{\|\tilde{B}_N^{-1}\|_2}{1 - \|\tilde{B}_N^{-1}\|_2}\|\mu_N\|_\infty.$$

i.e.: $\forall n \geq 0$,

$$\|W_N^{(n)} - U_N^{(n)}\|_2 \leq \frac{\|\tilde{B}_N^{-1}\|_2}{1 - \|\tilde{B}_N^{-1}\|_2}\|\mu_N\|_\infty$$

avec

$$\frac{\|\tilde{B}_N^{-1}\|_2}{1 - \|\tilde{B}_N^{-1}\|_2} = \frac{1 - \pi^2\Delta t + o(\Delta t)}{1 - (1 - \pi^2\Delta t + o(\Delta t))} = \frac{1}{\pi^2\Delta t} + o(1)$$

donc: $\forall n \geq 0$,

$$\|W_N^{(n)} - U_N^{(n)}\|_2 \leq \frac{C_N}{\pi^2\Delta t}\|\mu_N\|_\infty.$$

Il en résulte que pour $\mu_N^{(n)} = \varepsilon_N^{(n)}$ et $W_N^{(n)} = U_N(t_n)$ alors

$$\|U_N(t_n) - U_N^{(n)}\|_2 \leq \frac{C_N}{\pi^2\Delta t}|\Delta t|^2 \leq C_N \frac{\Delta t}{\pi^2}.$$