TP2 – Méthode de Newton

Théorie. La méthode de Newton (dite souvent Newton-Raphson en dimension $d \geq 1$) s'applique à la résolution d'un système d'équations $F(x) = 0$, où $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Elle est définie par l'itération récurrente dans $\mathbb{R}^d$:

$$x_{n+1} = x_n - [dF(x_n)]^{-1} F(x_n).$$

La convergence est garantie lorsque la donnée initiale x_0 est suffisamment proche de la solution recherchée x^* de $F(x) = 0$ à condition que l'application différentielle $dF(x^*) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ soit inversible. La convergence est alors quadratique, i.e.

$$\exists C > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_{n+1} - x^*\| \leq C \|x_n - x^*\|^2.$$

Ainsi quelques itérations suffisent pour obtenir une précision redoutable.

But du TP. *Il s'agit de mettre en œuvre la méthode de Newton et d'en estimer la vitesse de convergence numériquement dans différents situations élémentaires, puis de traiter des cas d'application plus riches.*

Consignes d'organisation. *Les fonctions correspondant à des méthodes numériques générales (symbole* ☐*) seront placées dans le fichier* `methodes.sci`*. Les fonctions définissant les différents tests menés seront placées dans le fichier* `library.sci`*. Les scripts d'exécution seront enregistrés dans des fichiers intitulés* `questionN.sce` *et débuteront par les lignes suivantes :*

```
clear
exec library.sci
exec methodes.sci
```

Mise en œuvre.

☐ Programmer la méthode de Newton pour une fonction F, de différentielle dF qui sera supposée calculable explicitement.

1. Tester la méthode sur l'exemple monodimensionnel $F_1(x) = e^x - e$, illustrer graphiquement la vitesse de convergence puis la quantifier.

2. Utiliser la méthode de Newton pour la résolution du système polynomial suivant

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

Illustrer de nouveau la convergence une première fois en traçant les itérés dans le plan (x, y), et ensuite en quantifiant l'erreur et l'ordre de convergence. Tester plusieurs initialisations.

◇ Sur ce même exemple, on déterminera numériquement une relation entre le nombre d'itérations nécessaire à la convergence pour une donnée initiale $x_0 = (2^{-p}, 1)$ et le nombre entier p).

◇ Lorsque $x_0 = (2^{-10}, 1)$, on pourra enfin tracer le ratio $\ln(\|x_{n+1} - x^\star\|)/\ln(\|x_n - x^\star\|)$ en fonction de n et interpréter les résultats.

3. Déterminer l'ordre de convergence dans le cas de la recherche des zéros de $F_2(x) = (e^x - e)^2$ et $F_3(x) = (e^x - e)^{5/2}$.

☐ Programmer la méthode de Newton modifiée définie par l'itération :

$$x_{n+1} = x_n - p[dF(x_n)]^{-1} F(x_n).$$

où p est la « multiplicité » du zéro recherché.

◇ Reprendre l'étude de convergence de la question **3** par cette méthode modifiée.

☐ Programmer la méthode de quasi-Newton dans laquelle l'application différentielle $dF(x)$ est remplacée par l'approximation suivante, dépendant du réel $h > 0$:

$$\widetilde{dF}(x) : y \mapsto \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{h}(f(x+he_i) - f(x))y_i.$$

4. Tester cette méthode sur les exemples traités précédemment, pour différentes valeurs de h, et déterminer l'ordre de convergence effectif.

5. Trouver une approximation des valeurs $\lambda \in [0, 10]$ telles que $\displaystyle\int_0^1 \sin(\lambda e^{x^2})\,\mathrm{d}x = 1/2$.

6. On souhaite obtenir une approximation de la solution $u \in \mathcal{C}^2([0, 1])$ du problème différentiel aux limites (dont on admettra l'existence) :

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 2, \quad \frac{d^2}{dx^2}(uv) = u^2,\ x \in [0, 1], \quad v(x) = 1 + \cos^2(\pi x).$$

Pour ce faire, on se donne un entier $N \geq 2$ et on pose $V_n = 1 + \cos^2(\pi\frac{n-1}{N-1})$ pour $1 \leq n \leq N$. Le problème continu est approché par une formulation aux différences finies sur $[0, 1]$. L'inconnue est un vecteur $U_n \in \mathbb{R}^N$ solution de

$$U_1 = 1, \quad U_N = 2, \quad N^2(U_{n+1}V_{n+1} - 2U_nV_n + U_{n-1}V_{n-1}) = U_n^2,\ 2 \leq n \leq N - 1.$$

Résoudre ce système approché pour N fixé suffisamment grand.

7. (Extrait du TP précédent)
On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + a(x)u(x) = f(x), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

où les fonctions $a \geq 0$ et f sont données. Pour résoudre ce problème, on introduit le problème de Cauchy dépendant du paramètre α :

$$\begin{cases} -u_\alpha''(x) + a(x)u_\alpha(x) = f(x), \\ u_\alpha(0) = 0 \text{ et } u_\alpha'(0) = \alpha, \end{cases}$$

Ce dernier problème peut être résolu à l'aide d'une méthode d'intégration des équations différentielles ordinaires. Il suffit de trouver α tel que $u_\alpha(1) = 0$, ce qui n'est pas difficile puisque l'application $\varphi : \alpha \mapsto u_\alpha(1)$ est affine !

Appliquer la même méthode au problème non-linéaire

$$\begin{cases} -u''(x) + a(x)u^3(x) = f(x), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

pour lequel l'application $\varphi : \alpha \mapsto u_\alpha(1)$ est non-linéaire. On pourra alors utiliser la méthode de Newton ou une variante pour résoudre le problème de tir.