

TP4 – Approximation de valeurs propres

Exercice 1. Méthode de la puissance

Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$. La méthode de la puissance consiste à calculer les suites $\nu \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbf{x} \in (\mathbb{C}^n)^{\mathbb{N}}$ suivantes :

$$\nu_k = \langle \mathbf{x}_k, A\mathbf{x}_k \rangle, \quad \mathbf{x}_{k+1} = \frac{A\mathbf{x}_k}{\|A\mathbf{x}_k\|_2}, \quad k \geq 0.$$

Théorème. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice admettant une valeur propre dominante : $\text{spec}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ avec $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_p|$. On note D_1 l'intersection de $\text{Ker}(A - \lambda_1 I_n)$ avec la sphère unité de \mathbb{C}^n et d la distance en norme hermitienne sur \mathbb{C}^n . Alors pour tout $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ admettant une composante non-nulle dans le sous-espace caractéristique associé à λ_1 , la méthode converge au sens où

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = \lambda_1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}_k, D_1) = 0.$$

De plus on a les comportements asymptotiques suivants.

★ Si λ_1 et toutes les valeurs propres de même module que λ_2 sont non-défectives, alors

$$d(\mathbf{x}_k, D_1) = O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right).$$

★ Si λ_1 n'est pas déficiente mais qu'au moins une valeur propre de module égal à $|\lambda_2|$ est déficiente, alors en notant $r \in \llbracket 2, n \rrbracket$ la taille du plus grand bloc de Jordan associé, on a

$$d(\mathbf{x}_k, D_1) = O\left(k^{r-1} \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right).$$

★ Si λ_1 est déficiente, alors

$$d(\mathbf{x}_k, D_1) = O\left(\frac{1}{k}\right).$$

- Sans écrire de fonction, programmer cet algorithme et illustrer numériquement le théorème avec les (contre-)exemples suivants (partagez-vous le travail !):

$$A_0 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On initialisera la méthode avec un vecteur $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-1, 1]^3$.

Exercice 2. Projections orthogonales

Soient $n \in \mathbb{N}$. Étant donnée une famille libre $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ de \mathbb{C}^n , on souhaite déterminer une famille orthonormée $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$ telle que

$$\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \text{Vect}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_j) = \text{Vect}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_j). \tag{1}$$

- Définir une fonction `Z=orthonorm(Y)` qui procède à l'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour répondre à cette question. La matrice Y aura pour colonnes les vecteurs \mathbf{y}_j et la matrice Z aura pour colonnes les vecteurs \mathbf{z}_j . On pourra utiliser le fait que la matrice de la projection orthogonale sur $\text{Vect}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_j)$ s'obtient simplement par $Z*Z'$
 - On vérifiera ensuite la propriété (1) en utilisant la commande `rank` et la caractéristique orthonormée de la famille $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m)$ par le calcul de $Z' * Z$.
- On se place dans \mathbb{C}^4 . Ecrire une fonction `householder` qui construit la première matrice de Householder dans la factorisation QR . Tester les commandes :


```
--> A=np.random.rand(4,4), A0=A.copy(), x=A0[:,0], x.shape=(4,1), H1=householder(x)
--> A1=np.dot(H1,A0), A0=A1.copy()
--> H=np.eye(4), x=A0[1:,1], x.shape=(3,1), H1=np.eye(4), H1[1:,1:]=householder(x), H=np.dot(H1,H).
```

· Compléter cet algorithme par une troisième itération, afin d'obtenir la factorisation QR de la matrice A. Vérifier alors les différentes propriétés attendues.

• À partir de l'exemple précédent, définir une fonction $[Q,R]=QR(A)$ qui prend en argument une matrice A de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ et renvoie une matrice Q unitaire d'ordre n et une matrice R de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure à diagonale réelle positive ou nulle, telles que $A=Q \cdot R$.

• Vérifier que les deux algorithmes coïncident, en examinant ce que renvoie

--> `A = np.random.rand(20,15), Z = orthonorm(A), Q,R = QR(A)`

--> `np.linalg.norm(Z-Q[:, :15])`

Exercice 3. Adaptation de la méthode de la puissance pour le calcul de plusieurs valeurs propres

Soient $A \in H_n(\mathbb{C})$ et $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'entier n peut être relativement grand et m raisonnablement petit devant n . On souhaite déterminer une approximation des m « plus dominantes » valeurs propres (réelles) de A et des vecteurs propres associés, qui peuvent être choisis formant une famille libre orthonormée de \mathbb{C}^n . Pour les expériences numériques, on choisira en premier lieu la matrice fixée suivante :

--> `n=40; J=tril(ones(n,n)); J=(J-J')/2; U=expm(J); A = U*diag(100*0.9^(1:n))*U'` ;

Considérons une famille libre $\mathbf{x}_0^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_0^{(m)}$ de \mathbb{C}^n et définissons la suite $(N_k)_{k \geq 0}$ à valeurs dans $H_m(\mathbb{C})$ ainsi que les suites $\mathbf{x}_k^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_k^{(m)}$ indexées par $k \in \mathbb{N}$, à valeurs dans \mathbb{C}^n , de la manière suivante :

$$\forall k \geq 0, \quad N_k = \left(\langle \mathbf{x}_k^{(i)}, A \mathbf{x}_k^{(j)} \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq m}$$

$$\forall k \geq 0, \quad \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \mathbf{y}_{k+1}^{(j)} = A \mathbf{x}_k^{(j)}$$

et les vecteurs $\mathbf{x}_{k+1}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{k+1}^{(m)}$ sont alors obtenus par orthonormalisation de la famille $\mathbf{y}_{k+1}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}_{k+1}^{(m)}$, comme on l'a fait dans l'exercice 1, dans le cas particulier $m = 1$.

- En adaptant l'algorithme de la méthode de la puissance, programmer l'algorithme en question. *Indication* : on pourra structurer les vecteurs $(\mathbf{x}_k^{(j)})_{1 \leq j \leq m}$ dans une matrice rectangulaire X et transcrire toutes les opérations d'algèbre linéaire utilisées en produits matriciels bien choisis.
- Estimer la vitesse de convergence de la suite (N_k) pour l'exemple proposé.
- Tester d'autres matrices hermitiennes ou non-hermitiennes. Trouvez-vous la méthode robuste ?
- Quelles seraient selon vous les hypothèses typiques garantissant la convergence de la méthode ?

Exercice 4. Algorithme QR de calcul de valeurs propres

Pour approcher toutes les valeurs propres de $A \in GL_n(\mathbb{C})$, on peut utiliser la méthode QR, fortement apparentée à l'algorithme précédent, qui consiste à construire la suite de matrice (A_k) à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$ par la récurrence :

$$\begin{cases} A_0 = A \\ \forall k \geq 0 \quad A_k = Q_k R_k \quad (\text{décomposition QR de } A_k) \\ A_{k+1} = R_k Q_k. \end{cases}$$

On a vu dans le cours que A_k devient asymptotiquement triangulaire supérieure (mais est, en général, non convergente au sens usuel), sa diagonale convergeant vers les valeurs propres de A (éventuellement par blocs si A n'est pas hermitienne) ordonnées par module décroissant. Pour obtenir les vecteurs propres associés, on pourrait utiliser une méthode de la puissance inverse avec translation ou utiliser à bon escient les matrices Q_k successives.

- À l'aide de l'exercice 1, programmer la méthode QR.
- Tester sur différentes matrices (non triangulaires!), hermitiennes ou non-hermitiennes.
- Examiner la convergence.