

## TP6 – Optimisation numérique

**Théorème.** Soit  $E = \mathbb{R}^d$  et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 On suppose que  $f$  est continue et coercive :  $f(x) \rightarrow +\infty$  lorsque  $\|x\| \rightarrow +\infty$ . Alors il existe  $\bar{x} \in E$  tel que  $f(\bar{x}) \leq f(y)$  pour tout  $y \in E$ .  
 Si de plus  $f$  est strictement convexe, alors  $\bar{x}$  est unique.

### Principe des méthodes numériques

<p><b>Gradient à pas fixe</b>                  Paramètres : <math>\rho &gt; 0, u_0 \in \mathbb{R}^d</math>                  Itér. : <math>u_{k+1} = u_k - \rho \nabla f(u_k)</math></p>	<p><b>Gradient à pas optimal</b>                  Paramètres : <math>u_0 \in \mathbb{R}^d</math>                  Itér. : <math>u_{k+1} = \operatorname{argmin}_{v \in u_k + F_k} f(v)</math>                  où <math>F_k = \operatorname{Vect}(\nabla f(u_k))</math></p>	<p><b>Gradient conjugué</b>                  Paramètres : <math>u_0 \in \mathbb{R}^d</math>                  Itér. : <math>u_{k+1} = \operatorname{argmin}_{v \in u_k + G_k} f(v)</math>                  où <math>G_k = \operatorname{Vect}(\nabla f(u_i), 0 \leq i \leq k)</math></p>
<p><b>Gradient à pas fixe avec projection</b>                  Minimisation de <math>f</math> sur <math>K</math>, convexe fermé non-vide :                  Paramètres : <math>\rho &gt; 0, u_0 \in \mathbb{R}^d</math>.                  Itérations : <math>u_{k+1} = P_K(u_k - \rho \nabla f(u_k))</math>.</p>	<p><b>Méthode de pénalisation</b>                  Minimisation de <math>f</math> sur <math>\{g(u) \leq 0\}</math> :                  Minimiser par une autre méthode <math>f_\epsilon</math> sur <math>\mathbb{R}^d</math> avec  <math>f_\epsilon(u) = f(u) + g_+(u)^2/\epsilon</math></p>	

### Exercice 1. Méthodes de minimisation pour une fonctionnelle quadratique

Soient  $A \in M_d(\mathbb{R})$  une matrice symétrique définie positive et  $b \in \mathbb{R}^d$  est un vecteur donné. Alors la fonctionnelle quadratique  $F$  définie sur  $\mathbb{R}^d$  par

$$F(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle.$$

vérifie les hypothèses du théorème. L'unique minimiseur  $\bar{x}$  est alors la solution du système linéaire  $A\bar{x} = b$ .

- Expliciter l'itération du gradient à pas optimal dans ce contexte quadratique.
- Programmer la méthode de gradient à pas fixe et à pas optimal pour chacune des fonctions suivantes.

$$f_1(x, y) = 2x^2 + 3x + y^2 - 2 \quad \text{et} \quad f_2(x, y) = y^2 - 2y + x^2 + 1.$$

- Représenter les incréments de descente successifs sur une figure, avec les lignes de niveau de  $f_1$

```
--> t=linspace(-3,2,30);
--> function z=f1(x,y),z=2*x^2+3*x+y^2-2, endfunction
--> contour2d(t,t,f1,20);
--> square(-3,-3,2,2);
```

Dans un second temps, on pourra ne tracer que les lignes de niveau effectivement rencontrées par les itérées de la méthode considérée.

### Exercice 2. Minimisation d'une fonctionnelle plus générale

- Expérimenter la méthode du gradient à pas fixe dans le cas non-quadratique suivant

$$f_3(x) = x^4 - 7x + 8.$$

On testera successivement les pas  $\rho = 0.15, 0.1, 0.01$ .

### Exercice 3. Minimisation avec contrainte de type inégalité

On note  $K$  le convexe fermé non-vide de  $\mathbb{R}^2$  suivant :  $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \text{ et } x_1 + x_2 \geq 1\}$ .

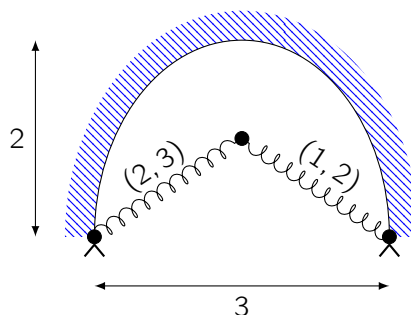
- Après l'avoir identifiée géométriquement, implémenter la fonction  $Y = \text{Proj}_K(X)$  qui réalise la projection d'un point  $X$  de  $\mathbb{R}^2$  sur  $K$ .
- Utiliser un algorithme de gradient à pas fixe avec projection pour résoudre le problème de minimisation :

$$\min_{x \in K} g(x), \quad \text{avec } g(x) = x_1^2 - x_2.$$

- Représenter les itérés successifs de la méthode (en distinguant les itérés de gradient et leur projeté).
- Reprendre le problème précédent à l'aide d'une méthode de pénalisation.

### Exercice 4. Minimisation d'un problème non-linéaire avec contrainte

Considérons un système de trois points matériels (sans masse) reliés par des ressorts comme l'indique le schéma suivant. Deux des points sont fixés dans le plan  $\mathbb{R}^2$  aux positions  $(0,0)$  et  $(3,0)$ . Le troisième point, dont la position reste à déterminer est placé sous une cloche elliptique, également fixée, dont les dimensions principales figurent sur le schéma. Ce dernier point peut être amené à entrer en contact avec la cloche. Chacun des deux ressorts  $r$  est caractérisé par une constante de raideur  $k_r$ , une longueur d'équilibre propre  $L_r^0$  et la longueur effective dans la configuration constatée  $L_r$ . Les valeurs indiquées sur le schéma correspondent à  $(k_r, L_r^0)$ .



Par une méthode de votre choix, déterminer une configuration d'équilibre minimisant l'énergie du système :

$$E_{\text{pot}} = \sum_r \frac{1}{2} k_r (L_r^0 - L_r)^2.$$