

TP6 – Optimisation numérique

Théorème. Soit $E = \mathbb{R}^d$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.
On suppose que f est continue et coercive : $f(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$. Alors il existe $\bar{x} \in E$ tel que $f(\bar{x}) \leq f(y)$ pour tout $y \in E$.
Si de plus f est strictement convexe, alors \bar{x} est unique.

Principe des méthodes numériques

Gradient à pas fixe

Paramètres : $\rho > 0, u_0 \in \mathbb{R}^d$
Itér. : $u_{k+1} = u_k - \rho \nabla f(u_k)$

Gradient à pas optimal

Paramètres : $u_0 \in \mathbb{R}^d$
Itér. : $u_{k+1} = \operatorname{argmin}_{v \in u_k + F_k} f(v)$
où $F_k = \operatorname{Vect}(\nabla f(u_k))$

Gradient conjugué

Paramètres : $u_0 \in \mathbb{R}^d$
Itér. : $u_{k+1} = \operatorname{argmin}_{v \in u_k + G_k} f(v)$
où $G_k = \operatorname{Vect}(\nabla f(u_i), 0 \leq i \leq k)$

Gradient à pas fixe avec projection

Minimisation de f sur K , convexe fermé non-vide :
Paramètres : $\rho > 0, u_0 \in \mathbb{R}^d$.
Itérations : $u_{k+1} = P_K(u_k - \rho \nabla f(u_k))$.

Méthode de pénalisation

Minimisation de f sur $\{g(u) \leq 0\}$:
Minimiser par une autre méthode f_ϵ sur \mathbb{R}^d avec
 $f_\epsilon(u) = f(u) + g_+(u)^2/\epsilon$

Exercice 1. Méthodes de minimisation pour une fonctionnelle quadratique

Soient $A \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur donné. Alors la fonctionnelle quadratique F définie sur \mathbb{R}^d par

$$F(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle.$$

vérifie les hypothèses du théorème. L'unique minimiseur \bar{x} est alors la solution du système linéaire $A\bar{x} = b$.

- Expliciter l'itération du gradient à pas optimal dans ce contexte quadratique.
- Programmer la méthode de gradient à pas fixe et à pas optimal pour chacune des fonctions suivantes.

$$f_1(x, y) = 2x^2 + 3x + y^2 - 2 \quad \text{et} \quad f_2(x, y) = y^2 - 2y + x^2 + 1.$$

- Représenter les incréments de descente successifs sur une figure, avec les lignes de niveau de f_1

```
--> t=linspace(-3,2,30);
--> function z=f1(x,y),z=2*x^2+3*x+y^2-2, endfunction
--> contour2d(t,t,f1,20);
--> square(-3,-3,2,2);
```

Dans un second temps, on pourra ne tracer que les lignes de niveau effectivement rencontrées par les itérées de la méthode considérée.

Exercice 2. Minimisation d'une fonctionnelle plus générale

- Expérimenter la méthode du gradient à pas fixe dans le cas non-quadratique suivant

$$f_3(x) = x^4 - 7x + 8.$$

On testera successivement les pas $\rho = 0.15, 0.1, 0.01$.

Exercice 3. Minimisation avec contrainte de type inégalité

On note K le convexe fermé non-vide de \mathbb{R}^2 suivant : $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \text{ et } x_1 + x_2 \geq 1\}$.

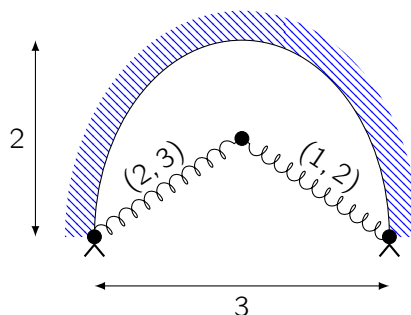
- Après l'avoir identifiée géométriquement, implémenter la fonction $Y = \text{Proj}_K(X)$ qui réalise la projection d'un point X de \mathbb{R}^2 sur K .
- Utiliser un algorithme de gradient à pas fixe avec projection pour résoudre le problème de minimisation :

$$\min_{x \in K} g(x), \quad \text{avec } g(x) = x_1^2 - x_2.$$

- Représenter les itérés successifs de la méthode (en distinguant les itérés de gradient et leur projeté).
- Reprendre le problème précédent à l'aide d'une méthode de pénalisation.

Exercice 4. Minimisation d'un problème non-linéaire avec contrainte

Considérons un système de trois points matériels (sans masse) reliés par des ressorts comme l'indique le schéma suivant. Deux des points sont fixés dans le plan \mathbb{R}^2 aux positions $(0,0)$ et $(3,0)$. Le troisième point, dont la position reste à déterminer est placé sous une cloche elliptique, également fixée, dont les dimensions principales figurent sur le schéma. Ce dernier point peut être amené à entrer en contact avec la cloche. Chacun des deux ressorts r est caractérisé par une constante de raideur k_r , une longueur d'équilibre propre L_r^0 et la longueur effective dans la configuration constatée L_r . Les valeurs indiquées sur le schéma correspondent à (k_r, L_r^0) .



Par une méthode de votre choix, déterminer une configuration d'équilibre minimisant l'énergie du système :

$$E_{\text{pot}} = \sum_r \frac{1}{2} k_r (L_r^0 - L_r)^2.$$