

# Option Calcul Scientifique: Equations aux Dérivées partielles

Préparation Agrégation de Mathématiques  
Université de Rennes 1  
Isabelle Gruais

5 janvier 2023



# Chapitre 1

## Equation de transport

### 1.1 Modélisation

On considère un matériau en mouvement à la vitesse dans l'espace caractérisé par sa densité  $\rho(x, t)$  en un point  $x$  à la date  $t > 0$ . On suppose que le mouvement de ce matériau est entièrement décrit par le champ de vitesses  $\vec{v}$ . On note  $V$  un élément de volume arbitraire fixe dans l'espace. La quantité de matière présente dans ce volume à la date  $t$  est alors

$$\rho_V(t) := \int_V \rho(x, t) d\Omega(x).$$

En l'absence de forces extérieures, la variation de  $\rho_V$  coïncide avec la quantité de matière qui traverse le volume  $V$  et est modélisée par le flux au travers de la frontière de  $V$ , soit :

$$\underbrace{d\rho_V}_{=\rho'_V dt} = - \int_{\partial V} \rho(x, t) \underbrace{d\vec{M}}_{=\vec{v} dt} \cdot d\vec{S}$$

i.e. :

$$\rho'_V(t) dt = - \int_{\partial V} \rho(x, t) \vec{v}(x, t) \cdot d\vec{S} dt \quad (1.1)$$

où le vecteur surfacique  $d\vec{S} = \|d\vec{S}\| \vec{n}$  est orienté dans la direction de la normale extérieure à  $V$ . Avec cette convention,  $\vec{v} \cdot d\vec{S} > 0$  dans le cas d'un flux sortant et alors  $\rho_V$  décroît ( $\rho'_V < 0$ ),  $\vec{v} \cdot d\vec{S} < 0$  dans le cas d'un flux entrant et alors  $\rho_V$  croît ( $\rho'_V > 0$ ). On suppose que  $\rho$  est assez régulière, de classe  $\mathcal{C}^1$ , pour écrire :

$$\rho'_V(t) = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) d\Omega(x).$$

et alors (1.1) devient :

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) d\Omega = - \int_{\partial V} \underbrace{\rho(x, t) \vec{v}(x, t) \cdot d\vec{S}}_{=: \omega(x)},$$

i.e., en appliquant successivement la formule de Stokes et la définition de la divergence :

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) d\Omega = - \int_{\partial V} \omega \stackrel{Stokes}{=} - \int_V d\omega = - \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) d\Omega$$

ce qui équivaut à :

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) d\Omega = 0.$$

Le volume  $V$  étant arbitraire dans l'espace, on en déduit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+.$$

## Exemple

On suppose connu l'emplacement d'une nappe de pétrole due au dégazement intempêtif d'un supertanker au large des côtes et on cherche à anticiper son déplacement le long des côtes dans les heures à venir, par exemple pour la mise en oeuvre efficace de barrages. On suppose connu  $v : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, t) \mapsto v(x, t)$ , le champ des vecteurs vitesses des courants marins, donné par exemple par la table des marées. A  $t = 0$ , on connaît la densité initiale d'hydrocarbure  $\rho_0(x)$  et on cherche à calculer la densité d'hydrocarbure  $\rho(x, t)$  à l'instant  $t$  au point  $x \in \mathbb{R}^2$ . L'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x)$$

avec

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \in A^c, \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $A$  représente le lieu initial de la nappe. Dans le cas d'un déplacement maritime, le vecteur  $v : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$  n'est évidemment pas constant (la marée n'est pas la même d'une ville à l'autre). De plus, le déplacement de la nappe dépend également du vent qui affecte donc le vecteur  $v$ . On supposera pourtant ici, pour simplifier l'exposé, que le vecteur  $v$  est constant en espace et en temps. Alors, le problème (1.2) admet pour solution :

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - tv) \quad (1.3)$$

qui exprime que la nappe perçue au point  $x$  à la date  $t$  a été transportée dans la direction du vecteur  $v$  à la distance  $tv$  du point initial. En fait, il est clair que (1.3) n'est pas une solution classique de (1.2) : comme  $\rho_0$  n'est pas continue, la fonction  $\rho$  définie par (1.3) ne l'est pas non plus et ses dérivées partielles ne sont donc pas définies au sens classique.

Dans la suite on verra comment on peut donner une formulation correcte des solutions de (1.2). Plus généralement, les équations de transport sont très importantes en mécanique des fluides : par exemple les équations d'Euler sont utilisées pour modéliser l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion.

Dans ce cours on se limitera aux équations scalaires en une dimension d'espace d'abord dans le cas relativement simple d'une équation linéaire (paragraphes 1.2 et 1.3) puis dans le cas nettement plus difficile d'une équation non linéaire (paragraphes 1.4 et 1.5)

## 1.2 Solutions classiques et solutions faibles. Le cas linéaire

Soit à résoudre : chercher  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  solution du problème dit de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.4}$$

où la vitesse  $c \in \mathbb{R}$  et la condition initiale  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont données.

**Définition 1.2.1** (Solution classique). On dit que  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution classique de (1.4) si  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  et si  $u$  vérifie (1.4).

Une CN pour que  $u$  soit une solution classique de (1.4) est que  $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ .

**Proposition 1.2.1.** Si  $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ , alors il existe une unique solution classique de (1.4) et elle s'écrit :

$$u(x, t) = u_0(x - ct), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+. \tag{1.5}$$

*Démonstration.* Pour montrer l'existence, il suffit de remarquer que  $u$  définie par (1.5) est de classe  $\mathcal{C}^1$  et vérifie en tout point :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -cu'_0(x - ct) + cu'_0(x - ct) = 0.$$

Pour montrer l'unicité, on introduit la notion de caractéristique. Plus précisément, on cherche a priori des solutions sous la forme de courbes  $s \mapsto u(x(s), t(s))$  en partant de la relation :

$$\frac{d}{ds}u(x(s), t(s)) = \dot{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \dot{t} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Cette équation est identique à (1.4) ssi :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{t} \end{pmatrix} // d \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$$

i.e. ssi

$$\frac{\dot{x}}{c} = \frac{\dot{t}}{1} \iff \dot{x} - c\dot{t} = 0 \iff \frac{d}{ds}(x - ct) = 0 \iff x - ct = Cste.$$

Les droites  $x - ct = Cste$  sont appelés les caractéristiques du problème (cf. figure 1.1). Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  et soit  $x - ct = x_0$  la caractéristique issue du point  $(x_0, 0)$  du plan. Par construction, si  $u$  est une solution classique, alors, le long de cette droite :

$$u(x, t) = u(x_0, 0) = u_0(x_0) = u_0(x - ct).$$

i.e. (1.5). Il reste à montrer que toute solution classique de (1.4) est constante le long des droites  $\mathcal{D}_{x_0} : x - ct = x_0, x_0 \in \mathbb{R}$ . Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  et soit  $\varphi_{x_0} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi_{x_0}(t) = u(x_0 + ct, t), \forall t \geq 0$ . On a :

$$\varphi'_{x_0}(t) = c \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + ct, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_0 + ct, t) \stackrel{(1.4)}{=} 0.$$

On en déduit :  $\varphi_{x_0}(t) = \varphi_{x_0}(0) = u(x_0, 0) = u_0(x_0), \forall t \in \mathbb{R}^+$ , i.e.  $u$  est constante le long de  $\mathcal{D}_{x_0}, \forall x_0 \in \mathbb{R}$ .  $\square$

*Remarque 1* (Terme source). Le problème physique peut conduire à une équation avec terme source  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  au second membre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} &= f(x, t) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

où  $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ . La méthode des caractéristiques conduit à chercher les courbes  $s \mapsto (x(s), t(s))$  solutions de

$$\frac{d}{ds}u(x(s), t(s)) = \dot{t} \frac{\partial u}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial u}{\partial x} = f(x(s), t(s))$$

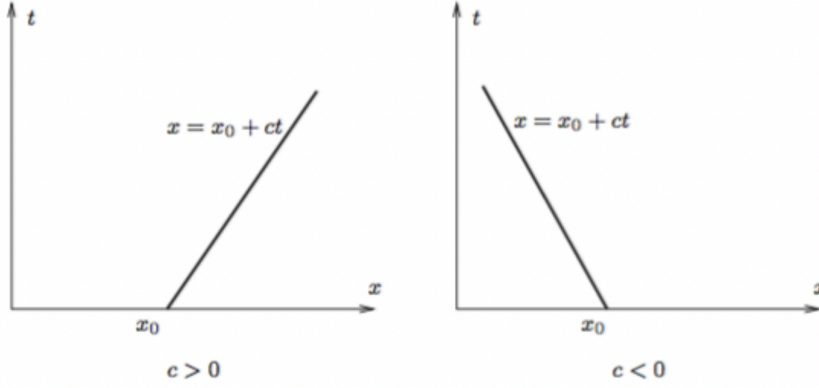


FIGURE 1.1 – Droites caractéristiques. Le cas linéaire.

avec

$$\dot{x} - c\dot{t} = 0 \iff x - ct = Cste.$$

Le choix

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{c} = c, \quad t(0) = 0, \quad x(0) = x_0$$

conduit à :  $t = s$ ,  $x(t) = ct + x_0$ , i.e. aux droites caractéristiques  $x - ct = x_0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ , le long desquelles :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(x_0 + ct, t) = u_0(x_0) + \int_0^t f(x - cs, s) ds = \\ &= u_0(x - ct) + \int_0^t f(x - c(t - s), s) ds. \end{aligned}$$

On en déduit l'unicité de la solution. Inversement, on vérifie directement que  $u$  ainsi définie est solution de (1.6) et que cette solution est classique car  $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ .

**Définition 1.2.2** (Solution faible). On appelle solution faible de (1.4) toute solution  $u$  du problème :  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  et  $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} u \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0. \quad (1.7)$$

**Proposition 1.2.2.** Si  $u$  est solution classique de (1.4), alors  $u$  est solution faible. Réciproquement, si  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  est une solution faible de (1.4), alors  $u$  est une solution classique.

**Théorème 1.2.3** (Existence et unicité de la solution faible). *Si  $u_0 \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , alors il existe une unique solution faible de (1.4).*

*Démonstration.* On va montrer que  $u(x, t) = u_0(x - ct)$  est solution faible. Par hypothèse sur  $u_0$ ,  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ . On a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} u_0(x - ct) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right) dx dt = \\ & \stackrel{y=x-ct}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} u_0(y) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t}(y + ct, t) + c \frac{\partial \varphi}{\partial x}(y + ct, t) \right) dy dt = \\ & \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} u_0(y) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t}(y + ct, t) + c \frac{\partial \varphi}{\partial x}(y + ct, t) \right) dt dy = \\ & = \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \left( \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \varphi(y + ct, t) dt \right) dy = - \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \varphi(y, 0) dy \end{aligned}$$

i.e.  $u(x, t) = u_0(x - ct)$  est solution faible de (1.4). Il reste à montrer qu'elle est unique. Soit  $v$  une solution faible de (1.4) et soit  $w = u - v$ . On a :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} w(x, t) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right) dx dt = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+). \quad (1.8)$$

D'après le Lemme 1.2.4 ci-dessous, pour tout  $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ , il existe  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$  solution de

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f,$$

et on déduit de (1.8) que :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} w(x, t) f(x, t) dx dt = 0, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}).$$

i.e.  $w = 0$  par densité de  $\mathcal{C}_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$  dans  $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ . □

**Lemme 1.2.4** (Résultat d'existence). *Pour tout  $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$  il existe  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$  t.q.*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f.$$

*Démonstration.* Soit  $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$  et soit  $T > 0$  t.q.  $f(x, t) = 0$ , si  $\max(|x|, t) \geq T$ . En particulier :  $f(x, t) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \geq T$ . On considère le problème :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f, \quad \varphi|_{t=T} = 0. \quad (1.9)$$



On vérifie directement que  $\varphi$  définie par

$$\varphi(x, t) = - \int_t^T f(x + c(s - t), s) ds, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$$

est solution classique de (1.9). De plus, si  $t > T$ , alors

$$\forall s \in [T, t], \quad s \geq T \Rightarrow f(x - c(t - s), s) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

donc  $\varphi(x, t) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Si  $0 < t \leq T$ , alors :  $\forall s \in [t, T]$ ,

$$\begin{aligned} |x + c(s - t)| &\geq ||x| - c|s - t|| \geq |x| - c|s - t| = |x| - c(s - t) \geq \\ &\geq |x| - c(T - t) \geq |x| - cT. \end{aligned}$$

Donc si  $|x| \geq (c + 1)T$  alors  $f(x + c(s - t), s) = 0, \forall s \in [t, T]$ . On en déduit que  $\varphi$  a son support dans le compact  $K = [-(c + 1)T, (c + 1)T] \times [0, T]$ .  $\square$

*Remarque 2.* La solution faible de (1.4) a les propriétés suivantes :

1. si  $u_0 \geq 0$  p.p., alors  $u \geq 0$  p.p..
2.  $\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad \forall p \in [1, +\infty], \quad \text{p.p.t. } t > 0$

Dans la suite, on s'attachera à vérifier que ces propriétés sont conservées par les schémas numériques étudiés.

### 1.3 Schémas numériques dans le cas linéaire

On considère le problème (1.4) avec  $c = 1$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(\cdot, 0) = u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}). \quad (1.10)$$

Que sait que ce problème admet une solution unique et que cette solution s'écrit :  $u(x, t) = u_0(x - t)$ . On rappelle que cette solution est classique, de classe  $\mathcal{C}^1$ , si  $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ , et faible de régularité  $L^\infty$  si  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ . On va chercher à approcher cete solution par un schéma numérique. Un tel schéma est évidemment inutile dans le cas linéaire puisque la solution exacte est alors connue, mais on commencera par ce cas pour faciliter l'exposé.

### Schéma explicite différences finies centrées

On se donne les subdivisions régulières de pas  $\Delta x > 0$ ,  $\Delta t > 0$ , en espace et en temps resp. :

$$x_i = i\Delta x, \quad t_n = n\Delta t, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N},$$

et on considère la suite  $(u_i^n)_{n \geq 0, i \in \mathbb{Z}}$  solution du schéma numérique

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad u_i^0 = u_0(x_i), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0 \quad (1.11)$$

Pour tout  $n \geq 0$ , on note  $u^n = (u_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$ . On a la formule de récurrence :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0$$

**Proposition 1.3.1.** *Le schéma (1.11) ne respecte pas la positivité.*

*Démonstration.* On suppose que  $u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  est telle que :  $u^0 \geq 0$  et

$$u_i^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } i > 0, \\ 0 & \text{si } i \leq 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Alors :

$$u_0^1 = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} < 0.$$

□

**Définition 1.3.1** (Stabilité). 1. Le schéma numérique (1.11) est  $L^\infty$ -stable, resp.  $L^2$ -stable, s'il existe une constante  $C > 0$  indépendante des pas  $\Delta x > 0$ ,  $\Delta t > 0$  t.q. :

$$\|u^n\|_\infty := \sup_{i \in \mathbb{Z}} |u_i^n| \leq C, \quad \forall n \geq 0$$

resp.

$$\|u^n\|_2 := \left( \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_i^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C, \quad \forall n \geq 0$$

2. Le schéma numérique (1.11) est stable au sens de Von Neumann si la suite  $(u^n)_{n \geq 0}$  construite à partir de la donnée initiale  $u_0(x) = e^{ipx}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ , conserve les propriétés d'amortissement de la solution exacte de (1.10).

**Proposition 1.3.2.** *Le schéma (1.11) est inconditionnellement instable.*

*Démonstration.* Si  $u^0$  est définie par (1.12), alors

$$u_i^1 = \begin{cases} 0 & \text{si } i < 0, \\ -\frac{\Delta t}{2\Delta x} & \text{si } i = 0, \\ 1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x} & \text{si } i = 1, \\ 1 & \text{si } i > 1, \end{cases}$$

On en déduit que  $\|u^1\|_\infty = \max\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}, \left|1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\right|, 1\right)$  dépend des pas de discrétisation  $\Delta t$  et  $\Delta x$ , contrairement à  $\|u^0\|_\infty = 1$ , i.e. que le schéma (1.11) n'est pas  $L^\infty$ -stable. Si  $u^0$  est définie par

$$u_0^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors  $\|u^0\|_2 = 1$  et

$$u_i^1 = \begin{cases} -\frac{\Delta t}{2\Delta x} & \text{si } i = -1, \\ 1 & \text{si } i = 0, \\ \frac{\Delta t}{2\Delta x} & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{si } |i| > 1, \end{cases}$$

et donc  $\|u^1\|_2 = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2}$ , d'où on déduit que le schéma (1.11) n'est pas  $L^2$ -stable.

La solution exacte de (1.10) avec la donnée initiale  $u^0(x) = e^{ipx}$ , où  $p \in \mathbb{Z}$  est fixé quelconque, est définie par  $u(x, t) = u_0(x-t) = e^{ip(x-t)} = e^{-ipt}u_0(x)$ , et donc  $|u(x, t)| = |u_0(x)|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Par ailleurs, le calcul donne :

$$u_j^1 = e^{ijp\Delta x} \left(1 - i\frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(p\Delta x)\right) = \underbrace{\left(1 - i\frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(p\Delta x)\right)}_{=: \mathcal{J}(\Delta t, \Delta x)} u_j^0, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

où

$$|\mathcal{J}(\Delta t, \Delta x)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(p\Delta x)\right)^2} > 1 \quad \text{si } \sin(p\Delta x) \neq 0,$$

i.e. le schéma (1.11) n'est pas stable au sens de Von Neumann.

Plus généralement, on suppose que  $u_0$  est  $2\pi$ -périodique. Alors  $u_0$  se décompose en série de Fourier :

$$u_0(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikx} \quad \text{avec} \quad a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(y) e^{-iky} dy, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.13)$$

On en déduit :

$$u_j^0 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikj\Delta x}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Après application de (1.11), on obtient :

$$u_j^1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \underbrace{\left(1 - i \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)\right)}_{=: \gamma_k} e^{ikj\Delta x}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

Par récurrence sur  $n \geq 0$ , on en déduit :

$$u_j^n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \gamma_k^n e^{ikj\Delta x}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

où  $\gamma_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , est appelé le coefficient d'amplification de la  $k$ ème harmonique.

On a :

$$|\gamma_k| = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)\right)^2} > 1 \quad \text{si} \quad \sin(k\Delta x) \neq 0.$$

On remarque que si  $0 < \Delta x < \pi$ , alors il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  t.q.  $\sin(k_0\Delta x) \neq 0$ .

On en déduit :  $\forall j \in \mathbb{Z}$

$$\|u_j^n\|_2^2 \geq |a_{k_0} \gamma_{k_0}^n|^2 = |a_{k_0}|^2 \left(1 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k_0\Delta x)\right)^2\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u^n\|_2^2 = +\infty.$$

□

**Définition 1.3.2** (Consistance). On appelle erreur de consistance locale du schéma (1.11) au point  $(x_i, t_n)$  la quantité :

$$\varepsilon_i^n = \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\Delta t} + \frac{u(x_{i+1}, t_n) - u(x_{i-1}, t_n)}{2\Delta x}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0.$$

L'erreur de consistance du schéma (1.11) est alors définie par :

$$\mathcal{E}(\Delta x, \Delta t) = \max_{i \in \mathbb{Z}, n \geq 0} |\varepsilon_i^n|.$$

Le schéma (1.11) est dit consistant si  $\lim_{(\Delta x, \Delta t) \rightarrow (0,0)} \mathcal{E}(\Delta x, \Delta t) = 0$ .

**Définition 1.3.3** (Convergence). On introduit l'erreur de discrétisation :

$$e_i^n = u(x_i, t_n) - u_i^n, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \geq 0$$

Le schéma (1.11) est dit convergent si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|e^n\|_\infty = 0$$

où on a posé :

$$\|e^n\|_\infty := \max_{i \in \mathbb{Z}} |e_i^n|.$$

**Proposition 1.3.3.** *Le schéma (1.11) n'est pas convergent.*

*Démonstration.* Soit  $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  t.q.

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Soit  $\Delta x = \Delta t \in ]\frac{1}{2}, 1[$ . Alors :

$$u_i^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i \neq 0. \end{cases}$$

De plus :

$$\begin{aligned} u_1^1 &= u_1^0 - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_2^0 - u_0^0) = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \\ u_{-1}^1 &= u_{-1}^0 - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_0^0 - u_{-2}^0) = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \\ u_i^1 &= u_i^0 - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^0 - u_{i-1}^0) = 0 \quad \text{si } i > 1 \\ u_i^1 &= u_i^0 - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^0 - u_{i-1}^0) = 0 \quad \text{si } i < -1 \end{aligned}$$

On suppose que

$$u_n^n = \left( \frac{\Delta t}{2\Delta x} \right)^n, \quad (1.14)$$

$$u_i^n = 0 \quad \text{si } i > n \quad (1.15)$$

Alors

$$u_{n+1}^{n+1} = u_{n+1}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{n+2}^n - u_n^n) = \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_n^n = \left( \frac{\Delta t}{2\Delta x} \right)^{n+1}$$

i.e. (1.14)–(1.15) est vrai,  $\forall n \geq 0$ . De plus :

$$u(x_n, t_n) = u_0(n(\Delta x - \Delta t)) = u_0(0) = 1, \quad \forall n \geq 1,$$

On en déduit :

$$\|e^n\|_\infty \geq |u_n^n - u(x_n, t_n)| = \left| 1 - \frac{1}{2^n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq 0$$

i.e. le schéma (1.11) ne converge pas pour ce choix de  $u_0$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta t$ . □

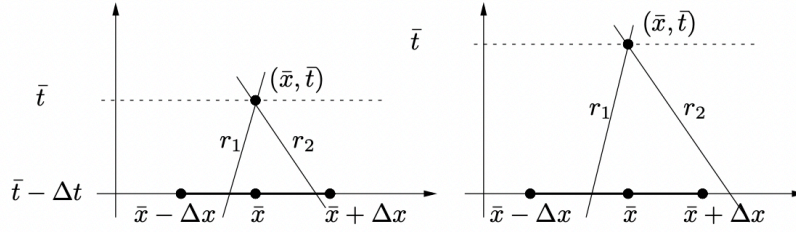


FIGURE 1.2 – Condition CFL : vérifiée à gauche, non vérifiée à droite

### Schéma différences finies décentré amont

On considère le schéma explicite décentré amont :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad u_i^0 = u_0(x_i), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0 \quad (1.16)$$

**Proposition 1.3.4.** *Le schéma (1.16) est stable sous la condition dite de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) :*

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (1.17)$$

i.e. :  $\forall n \geq 0, \forall A, B > 0,$

$$A \leq u^n \leq B \Rightarrow A \leq u^{n+1} \leq B.$$

*Démonstration.* On suppose que (1.17) est vérifié. On a :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) = \left( 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i-1}^n, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0.$$

On suppose qu'il existe  $A > 0$ ,  $B > 0$  t.q.  $A \leq u^n \leq B$ . Alors :  $\forall i \in \mathbb{Z}$ ,

$$u_i^{n+1} \underset{(1.17)}{\leq} \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) B + \frac{\Delta t}{\Delta x} B = B.$$

et de même :

$$u_i^{n+1} \underset{(1.17)}{\geq} \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) A + \frac{\Delta t}{\Delta x} A = A,$$

i.e. le schéma (1.16) est stable.  $\square$

**Théorème 1.3.5** (Convergence du schéma décentré amont). *On suppose que  $u_0 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et que  $u_0$ ,  $u_0'$ ,  $u_0''$  sont bornées.*

1. On pose :

$$A = \inf_{x \in \mathbb{R}} u_0(x), \quad B = \sup_{x \in \mathbb{R}} u_0(x).$$

Alors :

$$A \leq u_i^n \leq B, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \geq 0.$$

2. Soit  $T > 0$ . Alors, il existe une constante  $C > 0$  ne dépendant que de  $u_0$  t.q. :

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}, n \Delta t \leq T} |u(x_i, t_n) - u_i^n| \leq CT(\Delta t + \Delta x).$$

*Démonstration.* 1. C'est une conséquence immédiate de la Proposition 1.3.4.

2. Soit  $(\mu_i^n)_{i \in \mathbb{Z}, n \geq 0}$  une suite de réels et soit  $(z_i^n)_{i \in \mathbb{Z}, n \geq 0}$  la suite solution du schéma numérique :

$$\frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\Delta t} + \frac{z_i^n - z_{i-1}^n}{\Delta x} = \mu_i^n, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0.$$

On a :  $\forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0$ ,

$$\|z^{n+1}\|_\infty \leq \|z^n\|_\infty + \Delta t \|\mu^n\|_\infty \leq \|z^0\|_\infty + \Delta t \sum_{k=0}^n \|\mu^k\|_\infty, \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

Si  $z_i^n = u(x_i, t_n) - u_i^n$ ,  $\forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0$ , alors  $z_i^0 = 0$  et  $\mu_i^n$  coïncide avec l'erreur de consistance  $\varepsilon_i^n$  définie par :

$$\varepsilon_i^n = \frac{1}{\Delta t} (u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)) + \frac{1}{\Delta x} (u(x_i, t_n) - u(x_{i-1}, t_n))$$

Le calcul direct montre que :

$$\varepsilon_i^n = \frac{1}{2} (c^2 \Delta t - \Delta x) u_0''(x_i - t_n) + o(\Delta t + \Delta x), \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \geq 0.$$

d'où on déduit que :

$$\|\varepsilon^n\|_\infty \leq C(\Delta t + \Delta x)(1 + \|u_0''\|_\infty), \quad \forall n \geq 0;$$

Il en résulte :

$$\|u(\cdot, t_n) - u^n\|_\infty \leq \Delta t \sum_{k=0}^n \|\varepsilon^k\|_\infty \leq Cn\Delta t(\Delta t + \Delta x)(1 + \|u_0''\|_\infty)$$

et donc

$$\sup_{n\Delta t \leq T} \|u(\cdot, t_n) - u^n\|_\infty \leq CT(1 + \|u_0''\|_\infty)(\Delta t + \Delta x).$$

□

*Remarque 3* (Décentrement). Soit le schéma explicite décentré en aval :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0, \quad u_i^0 = u_0(x_i), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0.$$

On a :

$$u_i^{n+1} = \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i+1}^n, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \geq 0.$$

On suppose que :  $u_0(x) = 0, \forall x \geq 0$ . Alors :  $u_i^0 = 0, \forall i \in \mathbb{N}$ . On vérifie directement que :  $u_i^n = 0, \forall i \in \mathbb{N}, \forall n \geq 0$ . On en déduit :  $\forall \geq 0$ ,

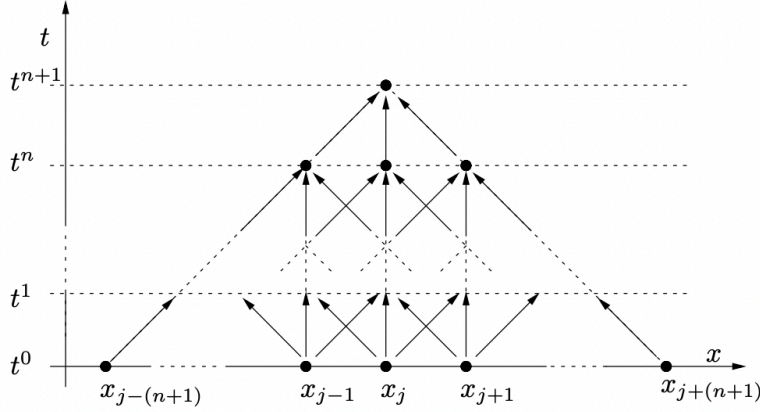
$$u_{-1}^{n+1} = \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_{-1}^n = \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^{n+1} u_{-1}^0$$

et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{-1}^n| = +\infty$ .

*Remarque 4*. Si  $u_0 \notin \mathcal{C}(\mathbb{R})$  la donnée initiale dans (1.16) n'est plus définie. On considère alors plutôt le schéma :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta t} = 0, & i \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0, \\ u_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_0(y) dy, & i \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (1.18)$$



FIGURE 1.3 – Domaine de dépendance numérique au point  $(x_j, t^{n+1})$ 

## 1.4 Le cas non linéaire

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et soit  $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ . On considère le problème : trouver  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $((x, t) \mapsto u(x, t)$  solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+. \quad (1.19)$$

**Définition 1.4.1** (Solution classique). Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et soit  $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ . On appelle solution classique de (1.19) toute solution  $u$  du problème : trouver  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  t.q.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

On commence par le résultat préliminaire sur les edos.

**Proposition 1.4.1.** Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  et soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Si  $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est solution de l'équation différentielle :

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

et si  $T_{\max} > 0$  désigne le temps d'existence de  $x$ , alors

$$T_{\max} < +\infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|x(t)\| = +\infty.$$

**Définition 1.4.2** (Courbe caractéristique). On appelle courbe caractéristique du problème (1.19) issue de  $x_0 \in \mathbb{R}$  la courbe définie par le problème de Cauchy :

$$x' = f'(u(x(t), t)), \quad x(0) = x_0, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (1.20)$$

**Théorème 1.4.2** (Non existence). *Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On suppose que  $f'$  n'est pas constante. Alors, il existe  $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  t.q. (1.19) n'admette pas de solution classique.*

*Démonstration.* La méthode des caractéristiques conduit à chercher les courbes  $s \mapsto u(x(s), t(s))$  t.q.

$$\frac{d}{ds}u(x(s), t(s)) = \dot{t} \frac{\partial u}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Par comparaison avec (1.19), on en déduit qu'il faut avoir :

$$\det \begin{vmatrix} \dot{x} & f'(u) \\ \dot{t} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

i.e. :

$$\dot{x} - \dot{t} f'(u) = 0. \quad (1.21)$$

Soit  $s \mapsto (x(s), t(s))$  solution de  $\dot{x} = \dot{t} f'(u)$ ,  $\dot{t} \neq 0$ . Le choix  $\dot{t} = 1$  revient à choisir  $s = t$  pour paramètre et alors  $t \mapsto (x(t), t)$  est une caractéristique de (1.19) au sens de la Définition 1.4.2.

Comme  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on a  $f' \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à (1.20). Il existe donc une solution maximale  $x$  de (1.20) définie sur  $[0, T_{\max}[$  et  $\lim_{t \rightarrow T_{\max}} |x(t)| = +\infty$  si  $T_{\max} < +\infty$ . Par construction :

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = \dot{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, t)) + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

i.e.

$$u(x(t), t) = Cste = u(x(0), 0) = u_0(x_0), \quad \forall t \in [0, T_{\max}[.$$

On en déduit, par définition de (1.20) :

$$\dot{x}(t) = f'(u(x(t), t)) = f'(u_0(x_0)), \quad \forall t \in [0, T_{\max}[.$$

et donc

$$x(t) = f'(u_0(x_0))t + x_0, \quad \forall t \in [0, T_{\max}[.$$

i.e. le système (1.20) décrit une droite issue de  $x_0$ ,  $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ , et on en déduit :  $T_{\max} = +\infty$ .

Comme  $f'$  est non constante, il existe  $v_0, v_1 \in \mathbb{R}$  t.q.  $f'(v_0) > f'(v_1)$ . On peut construire  $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  t.q.  $u_0(x_0) = v_0$ ,  $u_0(x_1) = v_1$  et  $x_0 < x_1$  (voir Figure 1.4.) On suppose que  $u$  est une solution classique avec cette donnée initiale. Alors :

$$u(x_0 + f'(u_0(x_0))t, t) = u_0(x_0) = v_0, \quad u(x_1 + f'(u_0(x_1))t, t) = u_0(x_1) = v_1.$$

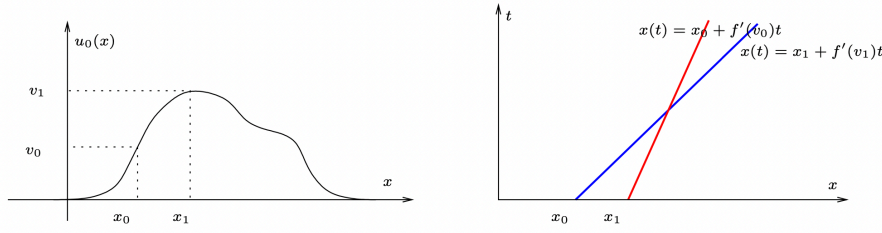


FIGURE 1.4 – Droites caractéristiques. Le cas non linéaire.

Soit  $T > 0$  t.q.  $x_0 + f'(u_0(x_0))T = x_1 + f'(u_0(x_1))T =: \bar{x}$ , i.e.

$$T = \frac{x_1 - x_0}{f'(v_0) - f'(v_1)}.$$

On a :

$$u(\bar{x}, T) = u(x_0 + f'(u_0(x_0))T, T) = u_0(x_0) = v_0$$

$$u(\bar{x}, T) = u(x_1 + f'(u_0(x_1))T, T) = u_0(x_1) = v_1$$

ce qui contredit  $v_0 \neq v_1$ . □

**Définition 1.4.3** (Solution faible). Soit  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$  et soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On appelle solution faible de (1.19) toute solution du problème : trouver  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  t.q. :  $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \left( u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0. \quad (1.22)$$

Le Théorème 1.4.2 montre qu'une solution faible de (1.19) perd sa régularité le long des droites caractéristiques, par exemple à l'intersection de deux telles droites. La Proposition 1.4.3 ci-dessous précise le rapport entre solution faible et solution classique. En particulier, elle montre qu'une solution de (1.19) qui serait classique en-dehors de ses droites caractéristiques est globalement une solution faible.

**Proposition 1.4.3.** Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et soit  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

1. Toute solution classique de (1.19) est une solution faible de (1.19).
2. Si  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  est une solution faible de (1.19), alors  $u$  est une solution classique de (1.19).
3. Soit  $\sigma \in \mathbb{R}$ . On pose :

$$D_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mid x < \sigma t\}, \quad D_2 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mid x > \sigma t\}$$

Soit  $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  vérifiant :  $u|_{D_i} \in \mathcal{C}^1(D_i, \mathbb{R})$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , et  $u$  vérifie (1.19) en tout  $(x, t) \in D_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Alors  $u$  est une solution faible de (1.19).

*Démonstration.* 1. Soit  $u$  une solution classique de (1.19) et soit  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On a

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \varphi(x, t) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x, t))) \varphi(x, t) dx dt = 0.$$

On applique le théorème de Fubini et on intègre par parties :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \varphi(x, t) dt dx + \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x, t))) \varphi(x, t) dx dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dt dx - \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} f(u(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx, \end{aligned}$$

car  $\text{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  est compact.

2. Soit  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{++}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  une solution faible de (1.19). On a suffisamment de régularité pour intégrer par parties dans (1.22), dans un premier temps avec  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{++}, \mathbb{R})$ , ce qui donne :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \underbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x, t))) \right)}_{\in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})} \varphi(x, t) dx dt = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{++}, \mathbb{R}).$$

Par densité de  $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{++}, \mathbb{R})$  dans  $\mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{++}, \mathbb{R})$ , on en déduit que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x, t))) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{++}.$$

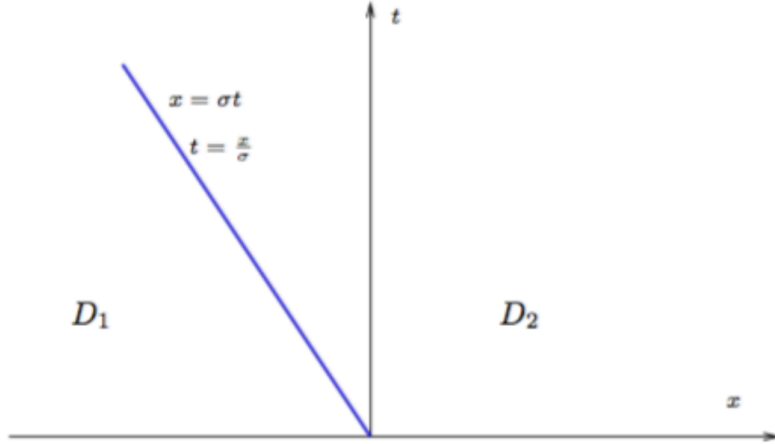
On intègre à nouveau par parties dans (1.22) avec  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ , ce qui donne :

$$\int_{\mathbb{R}} (u_0(x) - u(x, 0)) \varphi(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \underbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x, t))) \right)}_{=0} \varphi(x, t) dx dt = 0.$$

On en déduit :

$$\int_{\mathbb{R}} \underbrace{(u_0(x) - u(x, 0))}_{\in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \varphi(x, 0) dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Par densité de  $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  dans  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on en déduit que  $u(x, 0) = u_0(x), \forall x \in \mathbb{R}$ . Donc  $u$  est une solution classique de (1.19).

FIGURE 1.5 – Domaines  $D_1$  et  $D_2$ 

3. Soit  $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  vérifiant (1.19) en tout  $(x, t) \in D_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Soit  $\sigma \in \mathbb{R}$ . On suppose  $\sigma < 0$  (voir figure 1.5) pour fixer les idées. Le cas  $\sigma > 0$  se traite de la même façon. On a :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = \\
 & = \sum_{i=1,2} \int_{D_i} \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = \\
 & = - \sum_{i=1,2} \int_{D_i} \underbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) \right)}_{=0} \varphi dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx + \\
 & \quad + \sum_{i=1,2} \int_{\partial D_i} (u \varphi \nu_t^i + f(u) \varphi \nu_x^i) d\sigma_i
 \end{aligned}$$

où  $\nu^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , désigne le vecteur normal unitaire le long de  $\partial D_i$  orienté vers l'extérieur de  $D_i$ . On pose :

$$\nu = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sigma \end{pmatrix}.$$

Alors :  $\nu^1 = -\nu^2 = \nu$  le long de la droite  $x = \sigma t$  et la continuité de  $u\varphi$ , resp.  $f(u)\varphi$ , entraîne :  $u\varphi|_{\partial D_1 \cap \{x=\sigma t\}} = u\varphi|_{\partial D_2 \cap \{x=\sigma t\}} = u|_{x=\sigma t}$ , resp.  $f(u)\varphi|_{\partial D_1 \cap \{x=\sigma t\}} = f(u)\varphi|_{\partial D_2 \cap \{x=\sigma t\}} = u|_{x=\sigma t}$ . Il en résulte :

$$\sum_{i=1,2} \int_{\partial D_i \cap \{x=\sigma t\}} (u\varphi\nu_t^i + f(u)\varphi\nu_x^i) d\sigma_i = 0.$$

Il reste :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1,2} \int_{\partial D_i \setminus \{x=\sigma t\}} (u\varphi\nu_t^i + f(u)\varphi\nu_x^i) d\sigma_i &= \sum_{i=1,2} \int_{\partial D_i \cap \{t=0\}} (u\varphi\nu_t^i + f(u)\varphi \underbrace{\nu_x^i}_{=0}) d\sigma_i = \\ &= - \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\varphi(x,0) dx = - \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x,0) dx. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x,0) dx &= \\ = - \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x,0) dx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x,0) dx &= 0. \end{aligned}$$

□

La démonstration du Théorème 1.4.2 a montré qu'une solution de (1.19) perd sa régularité à l'intersection de deux droites caractéristiques. En de tels points, le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz ne s'applique plus au système des caractéristiques (1.20) et donc en particulier, on peut s'attendre à l'existence de plusieurs solutions faibles. Un exemple de non unicité de la solution faible est donné par l'équation de Burgers qui s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) = 0. \quad (1.23)$$

On complète (1.23) par une donnée initiale ad hoc permettant de déterminer analytiquement les solutions du problème de Cauchy associé aux caractéristiques qui sont les droites :

$$x - 2u_0(x_0)t = x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

où on choisit :

$$u_0(x) = \begin{cases} u_d & \text{si } x > 0, \\ u_g & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad (1.24)$$

avec  $u_d, u_g \in \mathbb{R}$ . On suppose  $u_g < 0 < u_d$ . Alors la méthode des caractéristiques donne :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_d & \text{si } x - 2u_d t < 0, \\ u_g & \text{si } x - 2u_g t > 0, \end{cases}$$

A priori,  $u(x, t)$  n'existe pas si  $x - 2u_g t < 0$  et  $x - 2u_d t > 0$ . D'après la Proposition 1.4.3, on obtient une solution faible en posant :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_d & \text{si } x - 2u_d t < 0, \\ \frac{x}{2t} & \text{si } x - 2u_d t > 0 \text{ et } x - 2u_g t < 0, \\ u_g & \text{si } x - 2u_g t > 0, \end{cases}$$

On peut aussi chercher une solution faible sous la forme

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \sigma t \\ u_d & \text{si } x > \sigma t \end{cases}$$

où le paramètre  $\sigma \in \mathbb{R}$  reste à choisir. mais alors le critère de la Proposition 1.4.3 ne s'applique plus puisque la solution  $u$  est discontinue sur la droite  $x - \sigma t = 0$ . Après report dans (1.22), on obtient,  $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\{x < \sigma t\}} u_g \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt + \int_{\{x > \sigma t\}} u_d \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt + \int_{\{x < \sigma t\}} f(u_g) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt + \\ & + \int_{\{x > \sigma t\}} f(u_d) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt + \int_{-\infty}^0 u_g \varphi(x, 0) dx + \int_0^{+\infty} u_d \varphi(x, 0) dx = 0. \end{aligned}$$

On remarque que la normale à la droite  $x - \sigma t = 0$  admet pour vecteur directeur (non unitaire, masi la relation est linéaire)  $\nu \in \mathbb{R}^2$  de composantes  $\nu_x = 1$ ,  $\nu_t = \sigma$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{C}1_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ . Alors  $\varphi(x, 0) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  et on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\{x < \sigma t\}} u_g \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt + \int_{\{x > \sigma t\}} u_d \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt = \int_0^{+\infty} [u] \varphi(\sigma t, t) \nu_t dt = \\ & = -(u_d - u_g) \sigma \int_0^{+\infty} \varphi(\sigma t, t) dt \\ & \int_{\{x < \sigma t\}} f(u_g) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt + \int_{\{x > \sigma t\}} f(u_d) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt = \int_0^{+\infty} [f(u)] \varphi(\sigma t, t) \nu_x dt = \end{aligned}$$

$$= (f(u_d) - f(u_g)) \int_0^{+\infty} \varphi(\sigma t, t) dt.$$

Il en résulte :  $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ ,

$$0 = -(u_d - u_g) \sigma \int_0^{+\infty} \varphi(\sigma t, t) dt + (f(u_d) - f(u_g)) \int_0^{+\infty} \varphi(\sigma t, t) dt,$$

i.e.

$$\sigma(u_d - u_g) = f(u_d) - f(u_g). \quad (1.25)$$

La relation (1.25), appelée condition de Rankine et Hugoniot, donne pour  $f(u) = u^2$  :

$$\sigma = u_d + u_g,$$

et fournit la solution faible :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < (u_g + u_d)t, \\ u_d & \text{si } x > (u_g + u_d)t. \end{cases} \quad (1.26)$$

Néanmoins, parmi les solutions faibles, on peut distinguer une unique solution dite entropique.

**Définition 1.4.4** (Solution entropique). Soit  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$  et soit  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On dit que  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  est une solution entropique de (1.19) si pour toute fonction  $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  convexe appelée entropie et pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  t.q.  $f'\eta' = \phi'$  appelée flux d'entropie on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \left( \eta(u) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \phi(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0) \varphi(x, 0) dx \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^+). \quad (1.27)$$

**Théorème 1.4.4** (Kruskov). Soit  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$  et soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ . Il existe une unique solution entropique de (1.19) au sens de la Définition 1.4.4.

**Proposition 1.4.5.** Toute solution classique de (1.19) est une solution entropique.

*Démonstration.* Soit  $u$  une solution classique de (1.19). Soit  $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  convexe une entropie et soit  $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  t.q.  $\phi' = f'\eta'$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \left( \eta(u) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \phi(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0) \varphi(x, 0) dx = \\ & - \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0) \varphi(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \left( \eta'(u) \frac{\partial u}{\partial t} + \phi'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varphi dx dt + \end{aligned}$$



$$+ \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0) \varphi(x, 0) dx \stackrel{\phi' = f' \eta'}{=} - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \underbrace{\eta'(u) \left( \frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right)}_{=0} \varphi dx dt.$$

□

**Proposition 1.4.6.** *Toute solution faible entropique de (1.19) est une solution faible de (1.19).*

*Démonstration.* On remarque que  $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  définie par :  $\eta(x) = x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  est convexe, donc une entropie. Alors  $\phi = f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est un flux d'entropie associé. □

On déduit de la Proposition 1.4.5 et du Théorème 1.4.4 de Kruskov que si (1.19) admet plusieurs solutions faibles et si l'une d'entre elles est régulière, alors cette dernière est nécessairement la solution entropique. Enfin, la caractérisation suivante, que l'on admettra, est souvent utilisée en pratique.

**Proposition 1.4.7** (Entropies de Kruskov). *Si  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$  et si  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ , alors  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  est une solution entropique de (1.19) au sens de la Définition 1.4.4 ssi pour tout  $\kappa \in \mathbb{R}$ , la caractérisation (1.27) des solutions entropiques est vérifiée avec l'entropie  $\eta_\kappa$  définie par  $\eta_\kappa(s) = |s - \kappa|$  et le flux d'entropie associé  $\phi_\kappa$  défini par :*

$$\phi_\kappa(u) = \max(f(u), \kappa) - \min(f(u), \kappa), \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

*Remarque 5.* Dans la Proposition 1.4.7, l'entropie  $\eta_\kappa$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Proposition 1.4.8** (Estimation  $L^\infty$ ). *Soit  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$  et soit  $A, B \in \mathbb{R}$  t.q.  $A \leq u_0 \leq B$  p.p. Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ . Alors la solution entropique  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  de (1.19) vérifie :  $A \leq u \leq B$  p.p.*

Cette propriété est fondamentale dans les problèmes de transport et il est donc important qu'elle soit conservée par les schémas numériques.

On termine cette Section par un résultat sur les solutions du problème de Riemann dont on s'est servi d'ailleurs pour montrer la non unicité des solutions faibles de (1.24).

**Définition 1.4.5** (Problème de Riemann). Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ . On appelle problème de Riemann avec données  $u_g, u_d \in \mathbb{R}$  le problème : trouver  $u$  solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0, \\ u_d & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (1.28)$$

Lorsque  $f$  est convexe ou concave, alors les solutions de (1.28) se calculent facilement. En effet, on peut montrer :

**Proposition 1.4.9.** *Soit  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  strictement convexe et soit  $u_g, u_d \in \mathbb{R}$ .*

1. *Si  $u_d < u_g$ , on pose :*

$$\sigma = \frac{[f(u)]}{[u]} \quad \text{avec} \quad [u] = u_d - u_g, \quad [f(u)] = f(u_d) - f(u_g).$$

*Alors, la fonction  $u$  définie par :*

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \sigma t, \\ u_d & \text{si } x > \sigma t, \end{cases} \quad (1.29)$$

*est l'unique solution entropique de (1.28). Une solution de la forme (1.29) est appelée une onde de choc.*

2. *Si  $u_g < u_d$ , alors la fonction  $u$  définie par :*

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < f'(u_g)t, \\ u_d & \text{si } x > f'(u_d)t, \\ \xi & \text{si } x = f'(\xi)t \quad \text{avec } u_g < \xi < u_d \end{cases} \quad (1.30)$$

*est l'unique solution entropique de (1.28). Une solution de la forme (1.30) est appelée une onde de détente.*

*Démonstration.* 1. On cherche une solution  $u$  sous la forme (1.29). Le même raisonnement que pour (1.25) montre que nécessairement :

$$\sigma = \frac{[f(u)]}{[u]}.$$

la méthode des caractéristiques fournit la solution :

$$u(x, t) = u_0(x - f'(u_0(x_0))t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

i.e :  $u(x, t) = u_0(x - f'(u_d)t)$  resp.  $u(x, t) = u_0(x - f'(u_g)t)$  le long des caractéristiques issues de  $x_0 > 0$ , resp.  $x_0 < 0$ . Comme  $f$  est strictement convexe,  $f'$  est strictement croissante, et donc les deux caractéristiques issues de  $x_0 = 0$  ont pour pentes respectives  $f'(u_d) < f'(u_g)$ . On en déduit que  $u$  vérifie :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_d & \text{si } x > f'(u_g)t, \\ u_g & \text{si } x < f'(u_d)t. \end{cases}$$

Il reste à définir  $u(x, t)$  pour  $f'(u_d)t < x < f'(u_g)t$ ,  $t > 0$ . De l'hypothèse  $u_d < u_g$  on déduit que  $u(x, t)$  peut prendre les deux valeurs  $u_d$ ,  $u_g$  si  $f'(u_d)t < x < f'(u_g)t$ ,  $t > 0$ , i.e. qu'il existe une infinité de possibilités pour  $u$ . On discrimine en retenant la valeur  $\sigma$  ci-dessus compatible avec la caractérisation des solutions faibles. La stricte convexité de  $f$  entraîne :

$$\begin{aligned} f(u_g) > f(u_d) + (u_g - u_d)f'(u_d) &\stackrel{u_g > u_d}{\Rightarrow} \sigma = \frac{f(u_g) - f(u_d)}{u_g - u_d} > f'(u_d) \\ f(u_d) > f(u_g) + (u_d - u_g)f'(u_g) &\stackrel{u_g > u_d}{\Rightarrow} -\sigma = \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_g - u_d} > -f'(u_g) \\ &\iff \sigma < f'(u_g) \end{aligned}$$

Finalement :

$$f'(u_d) < \sigma < f'(u_g)$$

et on peut prolonger  $u$  par continuité le long des caractéristiques  $x - f'(u_d)t = 0$  et  $x - f'(u_g)t = 0$  en posant :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \sigma t, \\ u_d & \text{si } x > \sigma t. \end{cases}$$

Il reste à vérifier que  $u$  est la solution entropique. Soit  $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  convexe et soit  $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  t.q.  $\phi' = f'\eta'$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ . Après intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \left( \eta(u) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \phi(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx = \\ = \underbrace{(-\sigma[\eta(u)] + [\phi(u)])}_{\substack{\geq 0 \\ \text{Lemme 1.4.10}}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \varphi(\sigma t, t) dt}_{> 0} \geq 0. \end{aligned}$$

2. On remarque que par convexité stricte de  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ ,  $f'$  est continue et strictement croissante donc inversible. En particulier :  $u_g < u_d \Rightarrow f'(u_g) < f'(u_d)$  Par la méthode des caractéristiques, on obtient la solution :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_d & \text{si } x > f'(u_d)t, \\ u_g & \text{si } x < f'(u_g)t. \end{cases}$$

Il reste à définir  $u(x, t)$  pour  $f'(u_g)t < x < f'(u_d)t$ ,  $t > 0$ . On prolonge  $u$  par continuité le long des caractéristiques  $x = f'(u_d)t$  et  $x = f'(u_g)t$  en posant :

$$u(x, t) = f'^{-1} \left( \frac{x}{t} \right) \quad \text{si } f'(u_g)t < x < f'(u_d)t, \quad t > 0. \quad (1.31)$$

Il reste à vérifier que  $u$  est la solution entropique. Soit  $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  convexe et soit  $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  t.q.  $\phi' = f'\eta'$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ . Après intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \left( \eta(u) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \phi(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx = \\ &= - \iint_{\{f'(u_g)t < x < f'(u_d)t\}} \eta'(u) \left( \frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varphi(x, t) dx dt = \\ &= - \iint_{\{f'(u_g)t < x < f'(u_d)t\}} \eta' \left( \frac{x}{t} \right) \left( -\frac{x}{t^2} + f'(u) \frac{1}{t} \right) \varphi(x, t) dx dt = \\ &= - \iint_{\{f'(u_g)t < x < f'(u_d)t\}} \eta' \left( \frac{x}{t} \right) \underbrace{\left( -\frac{x}{t} + f'(u) \right)}_{\substack{=0 \\ (1.31)}} \varphi(x, t) \frac{dx}{t} dt = 0 \end{aligned}$$

□

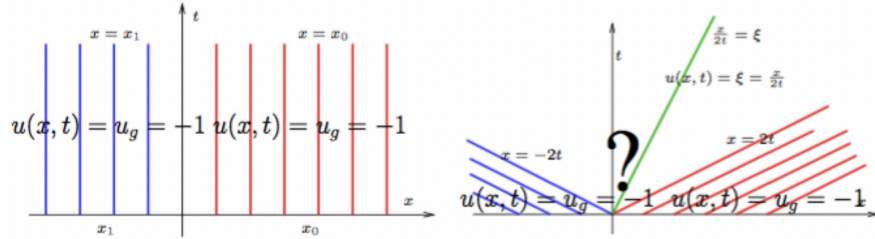


FIGURE 1.6 – Problème de Riemann pour l'équation de Burgers.

**Lemme 1.4.10.** Soit  $a < b$ , soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  et  $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  des fonctions convexes et soit  $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  t.q.  $\phi' = f'\eta'$ . Alors :

$$(b - a)(\phi(b) - \phi(a)) \geq (f(b) - f(a))(\eta(b) - \eta(a)).$$

*Démonstration.* On a :

$$\phi(b) - \phi(a) = \int_a^b \phi'(x) dx = \int_a^b f'(x) \eta'(x) dx$$

donc :

$$\phi(b) - \phi(a) = \int_a^b f'(x)(\eta'(x) - \eta'(y))dx + \eta'(y) \int_a^b f'(x)\eta'(x)dx, \quad \forall y \in [a, b].$$

On intègre par rapport à  $y$  :

$$\begin{aligned} (b-a)(\phi(b) - \phi(a)) &= \int_a^b \int_a^b f'(x)(\eta'(x) - \eta'(y))dxdy + \int_a^b \eta'(y)dy \int_a^b f'(x)dx = \\ &= \int_a^b \int_a^b f'(x)(\eta'(x) - \eta'(y))dxdy + (\eta(b) - \eta(a))(f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

avec, par convexité de  $\eta$  et  $f$  :

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b f'(x)(\eta'(x) - \eta'(y))dxdy &= \iint_{\{x < y\}} f'(x)(\eta'(x) - \eta'(y))dxdy + \\ &+ \iint_{\{x > y\}} \underbrace{f'(x)(\eta'(x) - \eta'(y))}_{>0}dxdy \\ &\geq \iint_{\{x < y\}} f'(x)(\eta'(x) - \eta'(y))dxdy + \iint_{\{x > y\}} f'(y)(\eta'(x) - \eta'(y))dxdy = 0 \end{aligned}$$

donc

$$(b-a)(\phi(b) - \phi(a)) \geq (\eta(b) - \eta(a))(f(b) - f(a)).$$

□

## 1.5 Le cas non linéaire : schémas numériques

Soit  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$  et soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On cherche une approximation numérique de la solution entropique de (1.19). On utilise les mêmes notations que pour le schéma (1.18). On note  $f_{i+\frac{1}{2}}^n \sim f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n))$  l'approximation du flux numérique. On considère le schéma :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0, & i \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0, \\ u_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_0(x)dx, & i \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (1.32)$$

dans lequel  $f_{i+\frac{1}{2}}^n$  reste à définir. Un premier choix possible est le schéma centré :

$$f_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{f(u_{i+1}^n) + f(u_i^n)}{2}$$

dont on a vu qu'il est à proscrire puisque, dans le cas linéaire, il est instable. On va s'intéresser aux schémas les plus simples à trois points, i.e. dans lesquels l'équation associée à l'inconnue  $u_i^n$  fait intervenir les trois inconnues discrètes  $u_{i\pm 1}^n$  et  $u_i^n$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ . Le flux numérique s'écrit sous la forme  $f_{i+\frac{1}{2}}^n = g(u_i^n, u_{i+1}^n)$ . Un bon schéma est obtenu en choisissant un flux monotone au sens suivant.

**Définition 1.5.1.** Une fonction  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est un flux monotone pour la discrétisation de (1.19) si :

1.  $g$  est consistante par rapport à  $f$ , i.e.  $g(u, u) = f(u)$  ;
2.  $(x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2)$  est croissante par rapport à la variable  $x_1$  et décroissante par rapport à la variable  $x_2$  ;
3.  $g$  est lipschitzienne sur  $[A, B]$  où  $A = \inf_{\mathbb{R}} u_0$  et  $B = \sup_{\mathbb{R}} u_0$ .

*Remarque 6* (Flux monotones et schémas monotones). Si le schéma (1.32) est à flux monotone et s'il vérifie la condition de CFL, alors on peut montrer qu'il est monotone, i.e. qu'il peut s'écrire sous la forme  $u_i^{n+1} = H(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n)$  où  $H$  est une fonction croissante de chacun de ses trois arguments.

## Cas où $f$ est monotone

Pour illustrer le choix de  $g$ , on suppose par exemple que  $f$  est croissante. Un choix très simple consiste alors à prendre  $g(u_i^n, u_{i+1}^n) = f(u_i^n)$ . Alors :  $g(u, u) = f(u)$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}$ , i.e.  $g$  est consistante par rapport à  $f$ . Par construction :

$$g(x_1, x_2) = f(x_1), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

i.e.  $g$  est croissante par rapport à la variable  $x_1$  par hypothèses sur  $f$ , et manifestement décroissante par rapport à la variable  $x_2$ . Soit  $x, y \in [A, B]^2$ . On a :

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |f(x_1) - f(y_1)| = \left| \int_{x_1}^{y_1} f'(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_1}^{y_1} |f'(t)| dt \right| \leq \\ &\leq |x_1 - y_1| \sup_{[A, B]} |f'| \leq C \|x - y\| \sup_{[A, B]} |f'| < +\infty \end{aligned}$$

où  $C > 0$  est une constante ne dépendant que du choix de la norme  $\|\cdot\|$  de  $\mathbb{R}^2$ , i.e.  $g$  est lipschitzienne sur  $[A, B]$ . Le schéma résultant est dit décentré amont et s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n)}{\Delta x} = 0, & i \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0, \\ u_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_0(x) dx, & i \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

On vérifie directement que dans le cas linéaire on retrouve le schéma décentré amont (1.18).

### Schéma à décomposition de flux

Le schéma à décomposition de flux (flux splitting) est caractérisé par le choix  $f = f_1 + f_2$  où  $f_1$ , resp.  $f_2$ , est croissante, resp. décroissante. Alors on pose :  $g(u_1, u_2) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$ ,  $\forall u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ , et alors :  $g(u_i^n, u_{i+1}^n) = f_1(u_i^n) + f_2(u_{i+1}^n)$ ,  $\forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0$ .

### Schéma de Lax-Friedrich

Le schéma de Lax-Friedrich consiste à modifier le schéma centré de façon à le rendre stable en posant :

$$f_{i+\frac{1}{2}}^n = g(u_i^n, u_{i+1}^n) = \frac{1}{2} (f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n)) + D(u_i^n - u_{i+1}^n)$$

où  $D \geq 0$  est suffisamment grand pour que  $(u_1, u_2) \mapsto (u_1, u_2)$  soit croissante, resp. décroissante, par rapport à  $u_1$ , resp.  $u_2$ .

### Schéma de Godunov

Le schéma de Godunov est un des plus connus et il a inspiré de nombreux autres schémas. Le flux numérique du schéma de Godunov s'écrit :

$$f_{i+\frac{1}{2}}^n = g(u_i^n, u_{i+1}^n) = f(w_R(u_i^n, u_{i+1}^n)) \quad (1.33)$$

où  $w_R(u_i^n, u_{i+1}^n)$  est la solution du problème de Riemann avec conditions  $u_i^n$ ,  $u_{i+1}^n$  qui s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_i^n & \text{si } x < 0, \\ u_{i+1}^n & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

On montre que le flux de Godunov (1.33) vérifie les conditions de la Définition 1.5.1. Pour le voir on montre que le flux de Godunov s'écrit (*Exercice*) :

$$g(u_i^n, u_{i+1}^n) = \begin{cases} \min_{\xi \in [u_i^n, u_{i+1}^n]} f(\xi) & \text{si } u_i^n \leq u_{i+1}^n, \\ \max_{\xi \in [u_{i+1}^n, u_i^n]} f(\xi) & \text{si } u_{i+1}^n \leq u_i^n, \end{cases}$$

### Schéma de Murman

Une façon de simplifier le schéma de Godunov est de remplacer le schéma de Riemann par un schéma de Riemann linéaire. Plus précisément on introduit le flux numérique :  $f_{i+\frac{1}{2}}^n = g(u_i^n, u_{i+1}^n) = f(\tilde{w}_R(u_i^n, u_{i+1}^n))$  où  $w_R(u_i^n, u_{i+1}^n)$  est solution du schéma :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_i^n & \text{si } x < 0, \\ u_{i+1}^n & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ , de solution :  $u(x, t) = u_0(x - \alpha t)$ . Le schéma résultant est donc très simple. Malheureusement, le schéma de Murman n'est pas monotone (*Exercice*) car le flux n'est pas monotone par rapport aux deux variables. On peut montrer que le schéma peut converger vers des solutions non entropiques.

**Théorème 1.5.1** (Stabilité et convergence). *Soit  $(u_i^n)_{i \in \mathbb{Z}, n \geq 0}$  la suite définie par le schéma numérique :*

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} (g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)) = 0, & i \in \mathbb{Z}, n \geq 0, \\ u_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_0(y) dy, & i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

*On suppose que  $g$  est un flux monotone au sens de la Définition 1.5.1 et lipschitzienne de constante  $M$  sur  $[A, B]$  avec*

$$A = \inf_{\mathbb{R}} u_0, \quad B = \sup_{\mathbb{R}} u_0.$$

*On suppose de plus que*

$$0 < \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2M}.$$



Alors le schéma est stable en temps fini et converge vers la solution du problème (1.19). De plus :

$$A \leq u_i^n \leq B, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \geq 0.$$

*Démonstration.* On pose :  $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ,

$$\varepsilon(x, t) = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} (g(u(x, t), u(x + \Delta x, t)) - g(u(x - \Delta x, t), u(x, t))).$$

Soit  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . On a :

$$g(u(x, t), u(x + \Delta x, t)) = f(u(x, t)) + \Delta x \frac{\partial g}{\partial u_2} \circ (u, u) \frac{\partial u}{\partial x} + O((\Delta x)^2)$$

$$g(u(x - \Delta x, t), u(x, t)) = f(u(x, t)) - \Delta x \frac{\partial g}{\partial u_1} \circ (u, u) \frac{\partial u}{\partial x} + O((\Delta x)^2)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, t) &= \frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{\left( \frac{\partial g}{\partial u_2} + \frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \circ (u, u) \frac{\partial u}{\partial x}}_{= \frac{\partial}{\partial x} g(u, u) = f'(u)} + O(\Delta t) + O(\Delta x) \\ &= \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(u(x, t)))}_{\stackrel{=0}{(1.19)}} + O(\Delta t) + O(\Delta x) = O(\Delta t) + O(\Delta x). \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\varepsilon_i^n := \varepsilon(x_i, t_n) = O(\Delta t) + O(\Delta x), \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \geq 0.$$

On en déduit l'erreur de consistance :

$$\mathcal{E}(\Delta x, \Delta t) := \sup_{i \in \mathbb{Z}, n \geq 0} |\varepsilon_i^n| = O(\Delta t) + O(\Delta x).$$

Soit  $(\mu_i^n)_{i \in \mathbb{Z}, n \geq 0}$  une suite de réels  $> 0$  et soit  $(z_i^n)_{i \in \mathbb{Z}, n \geq 0}$  la suite définie par le schéma :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} (g(z_i^n, z_{i+1}^n) - g(z_{i-1}^n, z_i^n)) = \mu_i^n, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0, \\ z_i^0 = u_i^0, \quad i \in \mathbb{Z}. \end{array} \right. \quad (1.34)$$

Alors :  $\forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}
|z_i^{n+1} - u_i^{n+1}| &\leq |z_i^n - u_i^n| + \frac{M\Delta t}{\Delta x} (|z_{i+1}^n - u_{i+1}^n| + 2|z_i^n - u_i^n| + |z_{i-1}^n - u_{i-1}^n|) + \Delta t |\mu_i^n| \\
&\leq \left(1 + \frac{4M\Delta t}{\Delta x}\right) \|z^n - u^n\|_\infty + \Delta t \|\mu^n\|_\infty \\
\Rightarrow \|z^{n+1} - u^{n+1}\|_\infty &\leq \left(1 + \frac{4M\Delta t}{\Delta x}\right) \|z^n - u^n\|_\infty + \Delta t \|\mu^n\|_\infty \\
&\leq \left(1 + \frac{4M\Delta t}{\Delta x}\right)^{n+1} \underbrace{\|z^0 - u^0\|_\infty}_{\substack{=0 \\ (1.34)}} + \Delta t \sum_{k=0}^n \left(1 + \frac{4M\Delta t}{\Delta x}\right)^k \|\mu^{n-k}\|_\infty
\end{aligned}$$

Si  $z_i^n = u(x_i, t_n)$ , alors  $\mu_i^n = \varepsilon_i^n$  et on note  $e_i^n = z_i^n - u_i^n$  l'erreur de convergence en  $(x_i, t_n)$ ,  $\forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0$ . On en déduit :

$$\begin{aligned}
\|e^n\|_\infty &\leq C\Delta t \left( \frac{\left(1 + \frac{4M\Delta t}{\Delta x}\right)^n - 1}{\frac{4M\Delta t}{\Delta x}} \right) (\Delta t + \Delta x) \\
\Rightarrow \sup_{i \in \mathbb{Z}, n \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq T} \|e^n\|_\infty &\leq \frac{C}{4M} (\Delta x)^2 \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) e^{4MT}, \quad \forall T > 0.
\end{aligned}$$

Dans la relation :

$$u_i^{n+1} = \underbrace{u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n))}_{=: H(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n)}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \geq 0$$

La fonction  $H$  est croissante par rapport à chacune de ses variables. En effet :  $\forall u = (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3, \forall v = (v_0, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{H(u_0, v_1, u_2) - H(u_0, u_1, u_2)}{v_1 - u_1} &= 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \underbrace{-\frac{g(v_1, u_2) - g(u_1, u_2)}{v_1 - u_1}}_{>0} + \underbrace{\frac{g(u_0, v_1) - g(u_0, u_1)}{v_1 - u_1}}_{<0} \right) \\
&\geq 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (-M - M) = 1 - 2M \frac{\Delta t}{\Delta x} > 0, \\
\frac{H(v_0, u_1, u_2) - H(u_0, u_1, u_2)}{v_0 - u_0} &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( 0 + \underbrace{\frac{g(v_0, u_1) - g(u_0, u_1)}{v_0 - u_0}}_{>0} \right) > 0,
\end{aligned}$$

$$\frac{H(u_0, u_1, v_2) - H(u_0, u_1, u_2)}{v_2 - u_2} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \underbrace{-\frac{g(u_1, v_2) - g(u_1, u_2)}{v_2 - u_2}}_{<0} + 0 \right) > 0$$

On en déduit :  $\forall i \in \mathbb{Z}$ ,

$$u_i^1 = H(u_{i-1}^0, u_i^0, u_{i+1}^0) \leq H(B, B, B) = B$$

et

$$u_i^1 = H(u_{i-1}^0, u_i^0, u_{i+1}^0) \geq H(A, A, A) = A.$$

On suppose que :  $A \leq u_i^n \leq B, \forall i \in \mathbb{Z}$ . Alors :

$$u_i^{n+1} = H(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n) \leq H(B, B, B) = B$$

et

$$u_i^{n+1} = H(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n) \geq H(A, A, A) = A.$$

□

