1 223.03 Différentiabilité

Exercice 1

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x \text{ si } |x| > |y| \\ (x,y) \mapsto y \text{ si } |x| < |y| \\ (x,y) \mapsto 0 \text{ si } |x| = |y| \end{cases}$.

Étudier la continuité de f, l'existence des dérivées partielles et leur continuité. [001798]

Exercice 2

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) \mapsto 0 \end{cases}$.

Étudier la continuité de f et l'existence des dérivées partielles.f est-elle C^1 ? [001799]

Exercice 3

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) = 0 & \end{array}$$

Étudier la continuité de f. Montrer que f est de classe C^1. [001800]

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer les dérivées partielles de :

$$g(x,y) = f(x+y), \qquad h(x,y) = f(x^2+y^2), \qquad k(x,y) = f(xy)$$

[001801]

Exercice 5

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^6} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) \mapsto 0 \end{cases}$.

Montrer que f admet une dérivée en $(0,0)$ suivant tout vecteur mais n'admet pas de développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$. [001802]

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$\begin{array}{lll} f(x,y) = x & \text{si} & |x| > |y| \\ f(x,y) = y & \text{si} & |x| < |y| \\ f(x,y) = 0 & \text{si} & |x| = |y|. \end{array}$$

Étudier la continuité de f, l'existence des dérivées partielles et leur continuité.

[001803]

Exercice 7

Soit $a \in \mathbb{R}^2$ fixé ; l'application $x \to \langle x,a \rangle$ de $\mathbb{R}^2$ usuel dans $\mathbb{R}$ est-elle continue, admet-elle des dérivées partielles, celles-ci sont elles continues ? [001804]

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

— si $|x| \leqslant y$, $f(x,y) = x^2$.

— $f(x,y) = y^2$ sinon.

Étudier la continuité de f et l'existence de dérivées partielles. [001805]

Exercice 9

Montrer qu'une norme N sur $\mathbb{R}^2$ ne peut avoir des dérivées partielles qui existent et qui soient continues en 0. [001806]

Exercice 10

Soient $\alpha > 0$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha y}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que
$$\forall (x,y) \neq (0,0) \qquad |f(x,y)| \leqslant \left(x^2+y^4\right)^{\frac{2\alpha-3}{4}}.$$
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \left|f(y^2,y)\right|$.
   (c) Étudier la continuité de f en (0,0).
2. (a) Montrer que
$$\forall (x,y) \neq (0,0) \qquad \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant |x|^{\alpha-2}.$$
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{|f(x,x)|}{\sqrt{2}|x|}$.
   (c) Étudier la différentiabilité de f en (0,0).

[001807]

Exercice 11

1. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y) = e^{x^2+y^2}$ au point $P(1,0)$ suivant la bissectrice du premier quadrant.
2. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y,z) = x^2 - 3yz + 5$ au point $P(1,2,1)$ dans une direction formant des angles égaux avec les trois axes de coordonnées.
3. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y,z) = xy + yz + zx$ au point $M(2,1,3)$ dans la direction joignant ce point au point $N(5,5,15)$.

[001808]

Exercice 12

Etudier la continuité, ainsi que l'existence et la continuité des dérivées partielles premières, des fonctions suivantes :

1.

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

2.

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x\sin y-y\sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

3.

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{x\ln(x^2+y^2)} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

[001809]

Exercice 13

On définit la fonction

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ et que f est continue mais pas différentiable en $(0,0)$. [001810]

Exercice 14

Soit $f:]0,1[\times]0,1[\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases} x(1-y) & \text{si } x\leqslant y\\ y(1-x) & \text{si } x>y\end{cases}$$

Etudier la continuité et la différentiabilité de f. [001811]

Exercice 15

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Montrer que f est continue en $(0,0)$ et admet des dérivées partielles dans toutes les directions, mais n'y est pas différentiable. [001812]

Exercice 16

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2y^2\sin\frac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\,.\end{cases}$$

Montrer que la fonction f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais que $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ ne sont pas continues en certains points de $\mathbb{R}^2$. [001813]

Exercice 17

Etudier la différentiabilité et la continuité des dérivées partielles de la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)^{3/2}\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

[001814]

Exercice 18

Etudier la différentiabilité en $(0,0)$ des fonctions définies par

1.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

2.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^3}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

[001815]

Exercice 19

Calculer les dérivées partielles (d'ordre un) des fonctions suivantes en un point arbitraire du domaine de définition.

1. $f(x,y)=x^2e^{xy}$;
2. $g(x,y,z)=x^2y^3\sqrt{z}$;
3. $h(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

[001816]

Exercice 20

Calculer les dérivées partielles (d'ordre un) de la fonction $f(x,y)=\sqrt{xy+\frac{x}{y}}$ en $(2,1)$. [001817]

Exercice 21

On définit la fonction

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Montrer que $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ et $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ bien que f ne soit pas continue en $(0,0)$. [001818]

Exercice 22

1. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y)=x^2-xy-2y^2$ au point $P(1,2)$ dans une direction formant avec l'axe Ox un angle de $\frac{\pi}{3}$.
2. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y)=x^3-2x^2y+xy^2+1$ au point $P(1,2)$ dans la direction joignant ce point au point $M(4,6)$.
3. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ au point $P(1,1)$ suivant la bissectrice du premier quadrant.

[001819]

Exercice 23

Calculer les différentielles des fonctions suivantes en un point arbitraire du domaine de définition :

1. $f(x,y)=\sin^2 x+\cos^2 y$;
2. $f(x,y)=\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)$.

[001820]

Exercice 24

Calculer $df(1,1)$, si $f(x,y)=\frac{x}{y^2}$. [001821]

Exercice 25

Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y,z) = \ln(e^x + e^y + e^z)$ à l'origine dans une direction formant avec les axes de coordonnées x,y,z les angles α, β, γ. [001822]

Exercice 26

Trouver l'équation du plan tangent pour chaque surface ci-dessous, au point (x_0,y_0,z_0) donné :

1. $z = \sqrt{19-x^2-y^2}, \quad (x_0,y_0,z_0) = (1,3,3)$;
2. $z = \sin(\pi xy)\exp(2x^2y-1), \quad (x_0,y_0,z_0) = (1,1/2,1)$.

[002628]

Exercice 27

On demande à un étudiant de trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = x^4 - y^2$ au point $(x_0,y_0,z_0) = (2,3,7)$. Sa réponse est

$$z = 4x^3(x-2) - 2y(y-3).$$

1. Expliquer, sans calcul, pourquoi cela ne peut en aucun cas être la bonne réponse.
2. Quelle est l'erreur commise par l'étudiant ?
3. Donner la réponse correcte.

[002629]

Exercice 28

Trouver les points sur le paraboloïde $z = 4x^2 + y^2$ où le plan tangent est parallèle au plan $x+2y+z=6$. Même question avec le plan $3x+5y-2z=3$. [002630]

Exercice 29

Soit C le cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ et C^+ le demi-cône où $z \geqslant 0$. Pour un point quelconque M_0 de $C \setminus \{(0,0,0)\}$, de coordonnées $(x_0, y_0, \pm\sqrt{x_0^2+y_0^2})$, on note $\mathscr{P}_{M_0}$ le plan tangent au cône C en M_0.

1. Déterminer un vecteur normal et l'équation du plan $\mathscr{P}_{M_0}$.
2. Montrer que l'intersection du cône C avec le plan vertical d'équation $y = ax$ où $a \in \mathbb{R}$ est constituée de deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ et que l'intersection du demi-cône C^+ avec ce plan vertical est constituée de deux demi-droites $\mathscr{D}_1^+$ et $\mathscr{D}_2^+$.
3. Montrer que le plan tangent au cône C est le même en tout point de $\mathscr{D}_1 \setminus \{(0,0,0)\}$ (respectivement en tout point de $\mathscr{D}_2 \setminus \{(0,0,0)\}$).

[002631]

Exercice 30

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - 2y^3$.

1. Déterminer l'équation du plan tangent $\mathscr{P}_{M_0}$ au graphe G_f de f en un point quelconque M_0 de G_f.
2. Pour le point M_0 de coordonnées $(2,1,2)$, déterminer tous les points M tels que le plan tangent en M soit parallèle à $\mathscr{P}_{M_0}$.

[002632]

Exercice 31

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

et $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f est continue et que, quel que soit $v \in \mathbb{R}^2$, la dérivée directionnelle $D_v f(x,y)$ existe en chaque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mais que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.
2. La dérivée directionnelle $D_v f(0,0)$ est-elle linéaire en v ? Les droites appartenant à la famille des droites passant par l'origine et de vecteurs directeurs $(v, D_v f(0,0)) \in \mathbb{R}^3$, forment-elles un plan ? Expliquer comment on peut observer la réponse sur la figure.
3. Le vecteur v étant fixé, qu'est-ce qu'on peut dire de la continuité de $D_v f(x,y)$ en (x,y) ?

[002633]

Exercice 32

Utiliser une approximation affine bien choisie pour calculer une valeur approchée des nombres suivants :

$$\exp[\sin(3.16)\cos(0.02))], \quad \arctan[\sqrt{4.03} - 2\exp(0.01)].$$

[002634]

Exercice 33

1. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $a \in D$. Donner la définition de "f est différentiable en a".
2. Montrer que, si f est différentiable en a, alors toutes ses dérivées partielles existent. Exprimer le lien entre la différentielle df_a de f en a et les dérivées partielles de f en a.
3. Les affirmations suivantes, sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera brièvement sa réponse.
   (A) Si f est différentiable en a, alors elle y est continue.
   (B) Si toutes les dérivées partielles de f en a existent, alors f est différentiable en a.

[002651]

Exercice 34

1. Soit f une application de E dans F espaces vectoriels normés et supposons f différentiable en a ; montrer que pour tout vecteur $u \in E^*$, la dérivée de f en a dans la direction u existe , i.e. $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(a+hu) - f(a)\big)$ et l'exprimer à l'aide de $f'(a)$.
2. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et, si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^4+y^2}$. Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ dans toutes les directions, mais que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

[002504]

Exercice 35

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \text{ si } x \neq y, \;\; F(x,x) = g'(x).$$

Montrer que F est de classe C^1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et calculer sa différentielle. [002505]

Exercice 36

Soit E^n l'espace des polynômes de degré $\leqslant n$. Etudier la différentiabilité des applications $P \mapsto \int_0^1 (P^3(t) - P^2(t))\, dt$ et $P \mapsto P' - P^2$. [002506]

Exercice 37

Soit f une application différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, propre (i.e. $||f(x)||$ tend vers ∞ quand $||x|| \to \infty$), telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ $Df(x)$ soit injective. On va montrer que f est surjective. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $g(x) = ||f(x) - a||^2$;

1. Calculer $Dg(x)$.
2. Montrer que g atteint sa borne inférieure en un point x_0 de $\mathbb{R}^2$, et que $Dg(x_0) = 0$; en déduire le résultat.

[002507]

Exercice 38

Soit, dans $\mathbb{R}^n$, F un sous-espace fermé, et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = d(x,F)$. On rappelle que f est 1-lipschitzienne, et que pour chaque x il existe $y \in F$ tel que $f(x) = d(x,y)$.

1. On suppose que f est différentiable en $x \notin F$. Montrer que $||Df(x)||_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} \leqslant 1$.
2. On considère la fonction $\varphi : t \in [0,1] \to f((1-t)x+ty)$; en calculant $\varphi'(0)$ de deux façons, montrer que $Df(x).\frac{x-y}{||x-y||} = 1$ et $||Df(x)||_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} = 1$.
3. En déduire que y est unique.

[002508]

Exercice 39

Soit E un espace de Banach et $\mathscr{L}(E)$ l'espace des endomorphismes linéaires continus de E.

1. Soit $A \in \mathscr{L}(E)$; montrer que l'application $\varphi : t \in \mathbb{R} \to e^{tA}$ est dérivable et calculer sa dérivée.
2. On suppose que la norme de E est associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $x \in E$. Montrer que l'application $\Phi : t \to \langle e^{tA}x, e^{tA}x \rangle$ est dérivable et calculer sa dérivée.
3. On suppose que A est antisymétrique. Montrer que pour tout t, e^{tA} est unitaire.

[002509]

Exercice 40

Soit $\alpha > 0$. Étudier la différientiabilité à l'origine de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui est définie par $f(0,0) = 0$ et par

$$f(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+3y^2}} \quad \text{si} \;\; (x,y) \neq (0,0)\ .$$

[002510]

Exercice 41

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

et $f(0,0) = 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, que pour tout $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ existe, mais que f n'est pas différentiable en $(0,0)$. [002511]

Exercice 42

Soit $X = \mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme uniforme et soit f une application de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note F l'application $\varphi \mapsto f \circ \varphi$ de X dans X. Montrer que pour chaque $\varphi \in X$, $DF(\varphi)$ est l'opérateur linéaire de multiplication par $f' \circ \varphi$ dans X :

$$DF(\varphi) \cdot (h) = h\, f' \circ \varphi\ ,$$

et que DF est continue. [002512]

Exercice 43

Soit $\mathscr{F}$ l'algèbre des matrices carrés $p \times p$ munie d'une norme.

1. Soit $f : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ l'application qui associe à une matrice A son determinant $f(A) = \det(A)$. Montrer qu'elle est différentiable et déterminer Df.

2. Pour $n \geqslant 1$, on considère l'application $\varphi_n(A) = A^n$ de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}$. Montrer qu'elle est différentiable en toute matrice $A \in \mathscr{F}$.
3. On désigne par U l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{F}$. Montrer que U est un ouvert de $\mathscr{F}$ et calculer la différentielle de l'application $A \mapsto A^{-1}$ de U dans U.

[002513]

Exercice 44

1. Que peut-on dire de la différentiabilité de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = \|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$?
2. Généraliser ceci à $f : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_\infty$, avec $\mathscr{F} = \mathbb{R}^n$ ou $\mathscr{F}$ l'ensemble des suites convergentes vers zero.

[002514]

Exercice 45

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application $x = (x_1, x_2) \mapsto \|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$. Est-ce qu'elle est différentiable ?
Considérons maintenant l^1 l'espace des suites réelles muni de la norme $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$.

1. Montrer que pour toute forme linéaire continue L sur l^1 il existe une suite bornée $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$ telle que
$$L(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j \ .$$
2. Montrer que la norme $\|.\|_1 : l^1 \to \mathbb{R}$ n'est pas différentiable en aucun point de l^1 (raisonner par l'absurde en utilisant (1.)).

[002515]

Exercice 46

Dans un espace normé $(\mathscr{F}, N)$, on considére l'application $x \mapsto N(x)$. Rappeler que, lorsque cette application N est différentiable en $x \in \mathscr{F}$, alors
$$DN(x) \cdot (h) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(N(x + th) - N(x) \right) \ .$$
En déduire que N n'est pas différentiable en $0 \in \mathscr{F}$. Supposons N différentiable en $x \in \mathscr{F}$, alors justifier que N l'est aussi en λx, où $\lambda > 0$, et que $DN(x) = DN(\lambda x)$. En considérant la dérivée en $\lambda = 1$ de l'application $\lambda \mapsto N(\lambda x)$, montrer que $DN(x) \cdot (x) = N(x)$ et en déduire $|||DN(x)||| = 1$. [002516]

Exercice 47

Soit $\mathscr{E}$ un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ et de la norme associée $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$.
Soit u un endomorphisme continu de $\mathscr{E}$ que l'on suppose symétrique, i.e.
$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle \quad \text{pour tout } \ x, y \in \mathscr{E} \ .$$

1. Montrer que l'application $x \in \mathscr{E} \mapsto \langle u(x), x \rangle$ est différentiable sur $\mathscr{E}$ et calculer sa différentielle. L'application $x \mapsto \|x\|^2$ est donc différentiable.
2. On définit une application $\varphi : \mathscr{E} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ en posant $\varphi(x) = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle}$. Établir qu'il s'agit d'une application différentiable. Calculer ensuite $D\varphi$. Montrer que, pour un élément non nul $a \in \mathscr{E}$, on a $D\varphi(a) = 0$ si et seulement si a est vecteur propre de u.

[002517]

Exercice 48

1. Soit f une application réelle continue et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f'(x)$ ait une limite quand $x \overset{<}{\to} b$; alors f se prolonge en une fonction continue et dérivable à gauche au point b.
2. Soit f une application continue et dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et de dérivée croissante ; montrer que f est convexe sur I i.e. $f((1-t)x+ty) \leqslant (1-t)f(x)+tf(y)$ pour tous $x<y$ de I et $t \in [0,1]$. (Poser $z=(1-t)x+ty$ et appliquer les AF à $[x,z]$ puis $[z,y]$.)

[002518]

Exercice 49

Montrer que l'identité des accroissements finis n'est pas vraie pour les fonctions vectorielles en considérant $f(x)=e^{ix}$. [002519]

Exercice 50 partiel du 5 décembre 1999

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y)=(x^2-y, x^2+y^2)$ et $g=f\circ f$.

1. Montrer que f et g sont de classe C^1.
2. Calculer en tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ la matrice jacobienne de f notée $Df(x,y)$; calculer la matrice jacobienne de g au point $(0,0)$ notée $Dg(0,0)$.
3. Montrer qu'il existe $\rho>0$ tel que pour tout $(x,y)\in\overline{B_\rho((0,0))}$ (la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon ρ) on a $||Dg(x,y)||\leqslant\frac{1}{2}$.
4. Montrer que la fonction g admet un unique point fixe dans $\overline{B_\rho((0,0))}$.

[002520]

Exercice 51

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $F(x,y)=(\cos x-\sin y,\ \sin x-\cos y)$; on note $F^{(k)}$ l'application F composée k-fois

1. Montrer que $||DF(x,y)||\leqslant\sqrt{2}$ pour tout (x,y).
2. En déduire que la suite récurrente définie par x_0, y_0 et pour $n\geqslant 1$
$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(\cos x_n-\sin y_n),\quad y_{n+1}=\frac{1}{2}(\sin x_n-\cos y_n)$$
converge pour tout (x_0,y_0). Donnez l'équation que vérifie sa limite ?

[002521]

Exercice 52

Soit f une application différentiable de $]a,b[\subset\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$; on suppose qu'il existe $k>0$ tel que
$$||f'(x)||\leqslant k||f(x)||,\ \ \forall x\in]a,b[.$$
Montrer que si f s'annule en un point $x_0\in]a,b[$, f est identiquement nulle dans $]a,b[$ (montrer que $E=\{x\in]a,b[\ ;\ f(x)=0\}$ est ouvert). [002522]

Exercice 53

Soit E un espace de Banach, U un ouvert de E et f une application différentiable de U dans $\mathbb{R}$ telle que l'on ait $||f'(x)||\leqslant k|f(x)|,\ \ \forall x\in U$. Montrer que pour x assez voisin de $a\in U$,
$$|f(x)|\leqslant e^{k||x-a||}\ |f(a)|.$$
Indication : considérer l'application $t\in[0,1]\to f(a+t(x-a))$). [002523]

Exercice 54

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $F(x,y)=(x^2+y^2, y^2)$; on note $F^{(k)}$ l'application F composée k-fois avec elle-même. On considère $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ \lim_{k\to\infty}F^{(k)}(x,y)=(0,0)\}$.

1. Vérifier que $(x,y) \in \Omega \Longleftrightarrow F(x,y) \in \Omega$.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $||(x,y)|| < \varepsilon \Longrightarrow ||F'(x,y)|| \leqslant \frac{1}{2}$; en déduire que 0 est intérieur à Ω puis que Ω est ouvert.
3. Montrer que Ω est connexe.

[002524]

Exercice 55

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x,y) = (x^2+y^2, y^2)\ .$$

Soit $\Omega = \{p \in \mathbb{R}^2\,;\ \lim_{k\to\infty} F^k(p) = (0,0)\}$.

1. Vérifier que $p \in \Omega$ si et seulement si $F(p) \in \Omega$.
2. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|||DF(p)||| < \frac{1}{2}$ si $\|p\| < \delta$. En déduire que $(0,0)$ est dans l'intérieur de Ω puis que Ω est un ouvert.
3. Utiliser l'homogénéité de F pour montrer que Ω est connexe.

[002525]

Exercice 56

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 qui est injective sur Ω et telle que $Df(x)$ soit injective pour tout $x \in \Omega$. Montrer que, pour tous $a, b \in \Omega$,

$$\|f(b) - f(a) - Df(a)(b-a)\| \leqslant \|b-a\| \sup_{c\in[a,b]} \|Df(c) - Df(a)\|\ .$$

[002526]

Exercice 57

Soit H un espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$, et $f(x) = ||x||$ de H dans $\mathbb{R}$; montrer que f est différentiable en tout point de $H\backslash\{0\}$, et calculer sa différentielle. (indic. étudier directement $||x+h||$ ou considérer la fonction composée $x \to ||x||^2 \to \sqrt{||x||^2}$.) Décrire le noyau $\mathrm{Ker} f'(x)$ en tout $x \neq 0$. [006255]

Exercice 58

Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n\backslash\{a\} \to \mathbb{R}^n$ définie par $f(x) = \frac{a-x}{||x-a||^2}$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{a\}$.
2. Montrer que $f'(x).h = \frac{Sh}{||x-a||^2}$ où S est la symétrie orthogonale d'axe $x-a$. Que peut-on dire de la transformation $f'(x)$ de $\mathbb{R}^n$?

[006256]

Exercice 59

Soit B une application bilinéaire de $E\times F$ dans G, où E, F, G sont des evn de dimension finie.

1. Calculer $B'(a)$ sa différentielle en un point $a = (a_1, a_2)$ de $E \times F$.
2. En déduire, pour f et g deux applications différentiables de I intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$, la différentielle de $t \to f(t)\wedge g(t)$ et de $t \to \langle f(t), g(t)\rangle$ en tout $t \in I$.
3. Application : Soit A un opérateur de $\mathbb{R}^n$ tel que $Ax \perp x$ pour tout x ; montrer que e^{tA} est une isométrie pour tout réel t. (Dériver $t \to ||e^{tA}x||^2$.)

[006257]

Exercice 60

Soit E et F deux evn sur $\mathbb{C}$. Une application de E dans F $\mathbb{C}$-linéaire est $\mathbb{R}$-linéaire, mais la réciproque est fausse.

1. Soit $\varphi : E \to F$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Montrer que φ est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si $\varphi(ix) = i\varphi(x)$ pour tout $x \in E$. En déduire les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui sont $\mathbb{C}$-linéaires.

   Soit U un ouvert de E et $f : U \to F$. On suppose f $\mathbb{R}$-différentiable en $a \in U$. Il est clair que f est $\mathbb{C}$-différentiable en a si et seulement si $f'(a)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.
2. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s'écrit $f(z) = u(z) + iv(z) = f(x+iy)$ avec u et v réelles, qu'on identifie à $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, traduire à l'aide de a) "f est $\mathbb{C}$-différentiable en $a = \alpha + i\beta$". En quels points les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont-elles $\mathbb{C}$-différentiables : $f_1(z) = e^x$; $f_2(z) = |z|^2$; $f_3(z) = e^{x-iy}$?
3. (extrait de septembre 99) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : U \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-différentiable en $a = \alpha + i\beta \in U$, telle que $f(a) \neq 0$. Montrer que si $g = |f|$ est $\mathbb{C}$-différentiable en $a = \alpha + i\beta \in U$, alors $f'(a) = 0$.

[006258]

Exercice 61

1. Montrer que l'identité des accroissements finis n'est pas vraie pour les fonctions vectorielles en considérant $f(x) = e^{ix}$.
2. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, on a vu que $f'(]a,b[)$ est connexe. Montrer que ceci est faux pour les fonctions vectorielles en considérant $f(x) = (x^2\cos(\frac{1}{x}), x^2\sin(\frac{1}{x}))$.

[006259]

Exercice 62

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R}^n)$ et soit F un sous-espace vectoriel de E constitué de fonctions différentiables, telles que

$$||f'(x)|| \leqslant M, \ \ \forall x \in [0,1], \ \ \forall f \in F, \ ||f|| \leqslant 1$$

où M est une constante fixée à l'avance. Montrer que la boule unité de F est compacte ; que peut-on dire de F ?
[006260]

Exercice 63

Soient E, F des espaces normés, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ une application continue.

1. Soit a un point de Ω. Si f est différentiable dans $\Omega \setminus \{a\}$ et si l'application $x \in \Omega \setminus \{a\} \mapsto Df(x)$ admet une limite $T \in \mathscr{L}(E,F)$ quand x tend vers a dans Ω, montrer que f est différentiable au point a et que $Df(a) = T$ (appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $g : x \mapsto f(x) - T(x)$).
2. Supposons f différentiable dans Ω. Montrer que $Df : \Omega \to \mathscr{L}(E,F)$ est continue en $a \in \Omega$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

   $$\|f(a+h) - f(a+k) - Df(a)(h-k)\| \leqslant \varepsilon\|h-k\| \quad \text{si } \|h\| < \delta \textit{ et } \|k\| < \delta \; .$$

3. Supposons maintenant qu'il existe une application continue $x \in \Omega \mapsto T_x \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que pour tout $x \in \Omega$ et tout $h \in E$

   $$\lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = T_x(h) \; .$$

   Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $Df(x) = T_x$ pour tout $x \in \Omega$. (On pourra considérer la fonction $g(t) = f(x+th) - tT_x(h)$.)

[006261]

Exercice 64

Soient E, F des espaces de Banach, Ω un ouvert connexe de E et $f_n : \Omega \to F$ une suite d'applications différentiables. On suppose que cette suite vérifie :

(i) Il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $(f_n(x_0))$ converge dans F.

(ii) La suite (Df_n) converge uniformément sur toute boule fermée $B_F(a,r) \subset \Omega$.

Alors, montrer que (f_n) converge uniformément sur toute boule fermée de Ω et que, si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ et $L_x = \lim_{n\to\infty} Df_n(x)$, alors f est différentiable avec $Df(a) = L_a$, $a \in \Omega$. [006262]

Exercice 65

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 qui est injective sur Ω et telle que $Df(x)$ soit injective pour tout $x \in \Omega$.

1. Montrer que, pour tous $a, b \in \Omega$,
$$\|f(b) - f(a) - Df(a)(b-a)\| \leqslant \|b-a\| \sup_{c\in[a,b]} \|Df(c) - Df(a)\| .$$
2. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 telle que $f_n \to f$ et $Df_n \to Df$ uniformément sur tout compact de Ω. On va montrer : *pour tout compact K de Ω il existe n_0 tel que f_n soit injective sur K pour $n \geqslant n_0$.*
   — En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existerait K compact et, pour une infinité d'entiers n, des points $a_n, b_n \in K$ tels que $f_n(a_n) = f_n(b_n)$.
   — Quitte à extraire, montrer qu'alors $b_n - a_n \to 0$.
   — Utiliser (1.) pour en déduire une contradiction.

[006263]

Exercice 66

1. Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.
2. Soit $B_\varepsilon(x_o)$ la boule de rayon ε dans $\mathbb{R}^n$, et soit $f : \overline{B_\varepsilon(x_o)} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que f est Lipschitzienne et donner une expression de son rapport.

[006796]

Exercice 67

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application dérivable.

1. Énoncer l'inégalité des accroissements finis. (Pour cette question on peut supposer que U est con**v**exe.)
2. Démontrer, à l'aide de 1., la proposition suivante :
   Si pour tout $x \in U$ la dérivée de f en x est nulle : $Df(x) = 0$, alors pour tout x dans U il existe un voisinage V de x dans U (par exemple une boule centrée en x) tel que f est constante sur V.
3. À l'aide de 2., démontrer que si en plus U est co**nn**exe, alors f est constante sur U.

[006832]

Exercice 68

Soit $O \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : O \to \mathbb{R}^p$ une fonction. Supposons qu'il existe une fonction continue $L : O \times O \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^p)$ (l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ muni de la norme d'opérateurs) telle que pour tout $x, y \in O$ on a
$$f(x) - f(y) = L(x,y)\,(x-y) .$$
Démontrer que f est de classe C^1 sur O et que $Df(x) = L(x,x)$. [006839]

---

2 371.00 Différentielle d'ordre supérieur, formule de Taylor

Exercice 69

Calculez $D^2 f(x)$ dans les cas suivants :

1. $f \in L(E,G)$ continue

2. $f : E \times F \to G$, bilinéaire continue.
3. $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $f(A) = A^2$

[002553]

Exercice 70

Etudier les extrémas locaux et globaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{4}x^3$
2. $f(x,y) = x^2y - x^2/2 - y^2$
3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$
4. $f(x,y) = \sin^2 x - \operatorname{sh}^2 y$
5. $f(x,y) = x^3 + y^3$
6. $f(x,y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4$

[002554]

Exercice 71

Trouver le volume maximum d'une boite rectangulaire inscrite dans la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
[002555]

Exercice 72

Déterminez le parallélipipède rectangle de volume V donné dont la surface totale est minimale. [002556]

Exercice 73 Rappel du Cours

Soient E_1, E_2 et F des espaces normés et $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire continue. Montrer que B est de classe C^∞ et déterminer les différentielles D^kB. [006287]

Exercice 74

Soient E et F des espaces de Banach et $f : E \to F$ une application de classe C^2.

1. Soit $h \in E$ et $\varphi_h : E \to F$ l'application définie par $\varphi_h(x) = Df(x)(h)$. Justifier que
$$D^2f(a)(k,h) = D\varphi_h(a)(k) \quad \text{pour tout } \; k \in E \; .$$
2. Supposons que, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, $f(tx) = t^2 f(x)$. Montrer que $D^2f(0)(x,x) = 2f(x)$ pour tout $x \in E$.
3. Soit $a,h,k \in E$ et soit $\Psi : \mathbb{R}^2 \to F$ définie par $\Psi(t,s) = f(a+th+sk)$. Calculer $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial s}(0,0)$.

[006288]

Exercice 75

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $Df(x)$ est un automorphisme orthogonal, i.e. $Df(x)$ est linéaire bijective et conserve le produit scalaire :

$$\langle Df(x)(h), Df(x)(k) \rangle = \langle h,k \rangle \quad \text{pour tout } \; h,k \in \mathbb{R}^n \; .$$

Montrer que l'application f est elle même un automorphisme orthogonal.
Indications :

1. Déterminer la différentielle de $x \mapsto \langle Df(x)(h), Df(x)(k) \rangle$.
2. Vérifier que $A(h,k,l) = \langle Df(x)(h), D^2f(x)(k,l) \rangle$ est antisymétrique par rapport aux deux premières variables et symétrique par rapport aux deux dernières variables.
3. En déduire que $A(h,k,l) = 0$ pour tous $h,k,l \in \mathbb{R}^n$ puis conclure.

[006289]

Exercice 76

1. Trouver les applications $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = 0$.
2. Trouver les applications $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \ .$$

(Indication : poser $\varphi(u,v) = \frac{1}{2}(u+v, u-v)$ et $G = F \circ \varphi$).

[006290]

Exercice 77

Soient E, F, G des Banach et $u : E \to F$, $v : F \to G$ deux applications C^2. Calculer, à l'aide de la définition, la différentielle seconde de $w = v \circ u$. [006291]

Exercice 78

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application C^∞ et soit $n \geqslant 1$. Établir l'équivalence des propriétés suivantes :
   — $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$.
   — $f(x) = x^n g(x)$ avec $g \in C^\infty$.
2. Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et soit $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On suppose $f(0) = Df(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g_{i,j} \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ telles que $f(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j g_{i,j}(x)$.

[006301]

Exercice 79

Déterminer approximativement la valeur de $1,05^{1,02}$ avec une erreur d'au plus $\varepsilon < 10^{-2}$ (Indication : Appliquer Taylor à la fonction $f(x,y) = x^y$). [006302]

Exercice 80

Montrer que si $x = 1,32 \pm 10^{-2}$ et $y = 0,45 \pm 10^{-2}$, alors $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} = 0,14 \pm 10^{-2}$. [006303]

Exercice 81

Ecrire le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 au voisinage de (0,0) pour la fonction $f(x,y) = \frac{e^x}{\cos y}$. En déduire la limite $\frac{e^x - (1+x)\cos y}{(x^2+y^2)\cos y}$ quand (x,y) tend vers (0,0). [006304]

Exercice 82

Soit $f(x,y)$ une fonction de classe C^2 au voisinage du cercle $x^2 + y^2 = 1$. On pose $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = a$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = b$. Pour tout nombre réel θ, soit $F(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$. Calculez $F''(0)$ en fonction de a et b. [006305]

3 372.00 Difféomorphisme, théorème d'inversion locale et des fonctions implicites

Exercice 83

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = ((x-2)^2 + y^2 - 4)((x-1)^2 + \frac{y^2}{4} - 1).$$

1. Tracer rapidement la courbe C d'équation $f(x,y)=0$.
2. En quels points de C la relation $f(x,y)=0$ permet-elle de définir une fonction implicite de la forme $y=\phi(x)$?

[001858]

Exercice 84

Montrer que les relations proposées définissent au voisinage du couple (a,b) indiqué une fonction implicite $y=\phi(x)$.
Donner un développement limité à l'ordre 3 de ϕ en a.

1. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy-1=0 \qquad (a,b)=(0,1)$.
2. $f(x,y)=2e^{x+y-1}+\ln(x-y)-2x+y^3 \qquad (a,b)=(1,0)$.

[001859]

Exercice 85

Montrer que la relation

$$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-2z(x+y)-2x+y-2z-1=0$$

définit au voisinage de $(0,0,-1)$ une fonction implicite $z=\phi(x,y)$. Donner un développement limité de ϕ à l'ordre 2 en $(0,0)$. [001860]

Exercice 86

1. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et telle que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)\neq 0$. Montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ et que f^{-1} est différentiable en tout point de $f(\mathbb{R})$.
2. Soit f définie par $f(x)=x+x^2\sin\frac{\pi}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.
   Montrer que $f'(0)$ existe et est $\neq 0$, mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Expliquer.

[002527]

Exercice 87

1. Montrer que l'application $\varphi:(r,\theta)\to(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $]0,\infty[\times]-\pi,\pi[$ sur le plan privé de la demi-droite $\mathbb{R}^-$. Si $f(x,y)=g(r,\theta)$ donner les formules de passage entre les dérivées partielles de f et celles de g.
2. Soit U le plan privé de l'origine, et $f(x,y)=(x^2-y^2,2xy)$.
   Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U mais n'est pas un difféomorphisme global.
3. Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y)=(x+y,xy)$. Trouver un ouvert connexe maximal $U\subset\mathbb{R}^2$ tel que g soit un difféomorphisme de U sur $g(U)$.
4. Soit h l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $(x,y)\to(e^x\cos y,e^x\sin y)$.
   Montrer que h est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$; que $h'(x,y)$ est un élément de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$; mais que h n'est pas un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $h(\mathbb{R}^2)$.

[002528]

Exercice 88

Soit φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie pas

$$\varphi(x,y)=(\sin(y/2)-x,\sin(x/2)-y).$$

1. Justifier que φ est de classe C^1, calculer sa différentielle et voir que $D\varphi(x,y)$ est inversible pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\varphi(\mathbb{R}^2)$ et justifier que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert.
3. Montrer que φ^{-1} est lipschitzienne (on prendra comme norme sur $\mathbb{R}^2$: $\|(x,y)\| = |x| + |y|$).
4. En déduire que φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$
5. Calculer $D\varphi^{-1}(p)$ où $p = (1-\pi/2, \sqrt{2}/2-\pi)$.

[002529]

Exercice 89

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^1. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $h, x \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle Df(x)(h), h\rangle \geqslant \alpha\langle h, h\rangle.$$

1. En considérant la fonction $t \to \varphi(t) = \langle f(a+t(b-a)), b_a)\rangle$, montrez que
$$\langle f(b)-f(a), b-a\rangle \geqslant \alpha\langle b-a, b-a\rangle \text{ pour tout } a, b \in \mathbb{R}^n.$$
En déduire que f est une application fermée.
2. Démontrer que, pour tout $x \in E, Df(x)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$. En déduire que f est une application ouverte.
3. Conclure que f est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ sur lui même.

[002530]

Exercice 90

Soit U l'ouvert $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Soit $(x,y,z) \to (X,Y,Z)$ l'application inversion de pôle 0, de puisssance 1, définie dans U, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, par les formules

$$X = \frac{x}{x^2+y^2+z^2} \quad ; \quad Y = \frac{y}{x^2+y^2+z^2} \quad ; \quad Z = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

Calculer la matrice jacobienne de cette transformation (on posera $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$) et vérifier que cette matrice est égale à son inverse. [002531]

Exercice 91

Reconsidérez l'exercice **??** dans l'esprit suivant : "si f est un difféomorphisme, la matrice inverse de la matrice jacobienne de f est la matrice jacobienne de f^{-1}." [002532]

Exercice 92

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et I la matrice unité dans E. En considèrant $\varphi : E \to E$ telle que $\varphi(A) = A^2$, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que toute matrice A vérifiant $||A-I|| < \alpha$ admette une racine carrée. [002533]

Exercice 93

1. Montrer que si a, b sont voisins de 1, on peut trouver $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $y + e^{xy} = a,\ x + e^{-xy} = b$.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par $f(x,y) = (x\sin(xy)+y, y\cos(xy)+x)$, et soit (a_n, b_n) une suite tendant vers $(0,0)$. Montrer que si $f(a_n,b_n) = 0$ pour tout n, la suite (a_n,b_n) stationne.

[002534]

Exercice 94

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 $\varphi = (f,g)$. On considère u, v réels et on cherche x, y tels que

$$(*) \quad f(x,y) = u,\ g(x,y) = v.$$

1. On suppose que la différentielle de φ est de rang 2 en tout point de U. Montrer que pour tout (u,v) le système $(*)$ admet une solution, unique localement. Que peut-on dire si la différentielle est de rang 2 en un point de U seulement ?
2. A-t-on des solutions si la différentielle est de rang 0 ?
3. On suppose maintenant que la différentielle de φ est de rang 1 en tout point de U. Si f'_x ne s'annule pas sur U, montrer que $\psi : (x,y) \to (f(x,y),y)$ définit un difféomorphisme d'un ouvert $V \subset U$ sur $\psi(V)$. En déduire G telle que $g(x,y) = G(f(x,y))$ sur V. Que peut-on dire des solutions du système $(*)$?

[002535]

Exercice 95

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni d'une norme quelconque, et B_r la boule fermée $||x|| \leqslant r$. Soit f un C^1-difféomorphisme entre deux ouverts U et V de E, contenant 0, tel que $f(0) = 0$. On pose $A = f'(0) \in \mathscr{L}(E)$. Soit $0 < \varepsilon < 1$.

1. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \in B_R$,
$$||A^{-1}(f(x)) - x|| \leqslant \varepsilon \, ||x||.$$
2. Montrer qu'il existe $R' > 0$ tel que pour $0 \leqslant r \leqslant R'$,
$$(1-\varepsilon)\, A(B_r) \subset f(B_r) \subset (1+\varepsilon)\, A(B_r).$$
3. En déduire que $\lim_{r\to 0} \frac{\text{vol } f(B_r)}{\text{vol } (B_r)} = |\det A|$.

[002536]

Exercice 96

Soit $a,b \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x + a\sin y, y + b\sin x)$.

1. Montrer que si $|ab| < 1$, f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.
2. Montrer que si $|ab| = 1$, f n'est plus un difféomorphisme mais reste un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

[002537]

Exercice 97

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que
$$||f(x) - f(y)|| \geqslant k||x-y||$$
pour tous $x,h \in \mathbb{R}^n$, k étant une constante > 0. On va montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

1. Montrer que f est injective et que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermée dans $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $f'(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
3. En déduire que $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert-fermé de $\mathbb{R}^n$.

[002538]

Exercice 98

Soit G un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ une application continue dans $\overline{G}$ et C^1 dans G. Pour tout $x \in G$, on suppose $Df(x)$ inversible. Démontrer que, sous ces conditions, l'application $x \mapsto \|f(x)\|$ atteint son maximum en un point du bord $\partial G = \overline{G} \setminus G$. [002539]

Exercice 99

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, Ω un ouvert connexe de E et soit $f : \Omega \to E$ une application de classe C^1 telle que $|||Df(x)||| \leqslant c$, pour tout $x \in \Omega$, où $0 \leqslant c < 1$. Montrer que $Id_{|E} - f$ est un difféomorphisme C^1 de Ω sur son image. [002540]

Exercice 100

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0,0)$. Montrez qu'il existe un intervalle I contenant x_0 et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$. [002541]

Exercice 101

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Démontrer que, pour x suffisamment proche de 0, il existe un nuique $y = y(x) > 0$ tel que $F(x,y) = 0$. Vérifier, sans résolution explicite, que $y'(x) = -x/y$. [002542]

Exercice 102

On considère le système d'équations :

$$\left(\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \end{array} \right)$$

Montrer que, pour x proche de l'origine, il existe des fonctions positives $y(x)$ et $z(x)$ telles que $(x, y(x), z(x))$ soit solution du système. On déterminera y' en fonctionde x, y et z' en fonction de x, z. [002543]

Exercice 103

Considérons $F(x,y) = y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + ... + a_1(x)y + a_0(x)$ un polynôme à coefficients variables. On suppose :

1. Les fonctions $x \to a_j(x)$ sont C^1, $j = 0, 1, ..., n-1$.
2. pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$, le polynôme $y \to F(x_0, y)$ a un zéro simple $y_0 \in \mathbb{R}$.

Démontrer que, dans ces conditions, $F(x,y)$ possède, pour x voisin de x_0, un zéro $y(x)$ qui lui est proche de y_0 et que la dépendance $x \to y(x)$ est C^1. [002544]

Exercice 104

Donner l'allure de $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0\}$ au voisinage des points $(0,0)$ et $(1,1)$. [002545]

Exercice 105

Montrer que l'équation $e^x + e^y + x + y - 2 = 0$ définit, au voisinage de l'origine, une fonction implicite φ de x dont on calculera le développement limité d'ordre trois en 0. [002546]

Exercice 106

Soit $i = \sqrt{-1}$. Calculer la matrice jacobienne de l'application $(x,y) \to (X,Y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $X + iY = (x + iy)^3$. [006264]

Exercice 107

Démontrer le résultat suivant (théorème d'inversion globale) :
Soit E, F deux Banach, U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application de classe C^1 sur U. Alors f est un C^1-difféomorphisme de U sur $f(U)$ si et seulement si :
(i) f est injective ;
(ii) $f'(x) \in \mathrm{Isom}(E,F)$ pour tout $x \in U$. [006265]

Exercice 108

1. On considère l'application φ de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par $(x,y,z) \to (e^{2y}+e^{2z}, e^{2x}-e^{2z}, x-y)$. Montrer que φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur son image que l'on précisera.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et F l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par $(x,y,z) \to (e^{x-y+2z}+e^{-x+y+2z}, e^{2x}+e^{2y}-2\lambda e^{x-y}, e^{2x}+e^{2y}-2e^{-x+y})$. Montrer que F s'écrit $G\circ\varphi$, G à préciser, et que c'est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur son image si et seulement si $\lambda \geqslant 0$.

[006266]

Exercice 109

On va proposer trois démonstrations possibles de l'exercice classique suivant : soit f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans lui-même, telle que $|f'(x)| \leqslant k$ pour tout x réel, où $k \in]0,1[$. Alors F définie par $F(x,y) = (x+f(y), y+f(x))$ est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ **sur** lui-même.

1. Remarquer que F est injective et $F'(x,y) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ pour tout (x,y).
   Reste à établir la surjection.
2. 1ère méthode : Montrer que F est propre ($\lim ||F(x,y)|| = +\infty$ quand $||(x,y)|| \to +\infty$) et que si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $g(x,y) = ||F(x,y)-(a,b)||^2$ est différentiable et atteint sa borne inférieure en un point annulant $g'(x,y)$; conclure.
3. 2ème méthode : Montrer que $F(\mathbb{R}^2)$ est à la fois ouverte et fermée. Conclure.
4. 3ème méthode : Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, appliquer le théorème du point fixe à l'application $\phi(x,y) = (a-f(y), b-f(x))$; conclure.

[006267]

Exercice 110

Soit P un polynôme de degré 3 normé, de racines $x_1 < x_2 < x_3$:

$$P(t,x_1,x_2,x_3) = \Pi_{l=1}^3 (t-x_l) = t^3 + \sum_{k=1}^3 a_k t^{k-1}.$$

Les coefficients a_k sont des fonctions polynômiales, donc de classe C^1, des racines. On pose $\Omega = \{x_1 < x_2 < x_3\}$ et on définit $f : x \in \Omega \to (a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3$. On va montrer que f est un C^1-difféomorphisme de Ω sur $f(\Omega)$.

1. Vérifier que f est injective sur Ω.
2. On appelle J la matrice jacobienne de f, et V la matrice de coefficients $v_{ij} = x_i^{j-1}$. En calculant $\dfrac{\partial P}{\partial x_k}(t,x_1,x_2,x_3)$ de deux façons, montrer que VJ est une matrice diagonale inversible si $x \in \Omega$. Conclure.
3. En déduire la dérivée de f^{-1} en tout point de $f(\Omega)$.

[006268]

Exercice 111

1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$ et C l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) = 0$.
   En quels points (a,b) peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites ? Calculer la dérivée de la fonction implicite lorsqu'elle existe et écrire l'équation de la tangente à C.
2. Montrer que l'équation $e^x+e^y+x+y-2=0$ définit au voisinage de 0 une fonction implicite φ de x dont on calculera le développement limité à l'ordre 3 en 0.
3. Montrer que les équations $x+y-zt=0,\ xy-z+t=0$ définissent au voisinage de $(0,1)$ deux fonctions implicites $x=\varphi_1(z,t),\ y=\varphi_2(z,t)$ avec $\varphi_1(0,1)=1$, dont on calculera les différentielles en ce point.

[006269]

Exercice 112

Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \to F(u,v) \in \mathbb{R}$ une application de classe C^1, telle que $F(0,0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial v}(0,0) \neq 0$. On considère $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\varphi(x,y,z) = (xy, x^2 - y^2 - z)$ et l'application $f = F \circ \varphi$. Montrer que l'équation $f(x,y,z) = 0$ définit au voisinage de $(0,0)$ une application $z = \psi(x,y)$ vérifiant

$$x\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2(x^2 + y^2).$$

[006270]

Exercice 113 novembre 1999

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f : O \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $(a,b,c) \in O$ tel que $f(a,b,c) = 0$.

1. Donner une condition suffisante pour qu'on puisse résoudre : et x en fonction de (y,z) et y en fonction de (x,z) et z en fonction de (x,y). Plus précisément, donner une condition suffisante pour qu'il existe U voisinage de a, V voisinage de b, W voisinage de c avec $U \times V \times W \subset O$, et $\varphi : V \times W \to U$, $\chi : U \times W \to V$, $\psi : U \times V \to W$ des fonctions de classe C^1 tels que pour $(x,y,z) \in U \times V \times W$:
$$f(x,y,z) = 0 \Longleftrightarrow x = \varphi(y,z) \Longleftrightarrow y = \chi(x,z) \Longleftrightarrow z = \psi(x,y).$$
2. Si la condition donnée en 1. est satisfaite, démontrer que pour $(x,y,z) \in U \times V \times W$ tel que $f(x,y,z) = 0$ on a
$$\partial_1 \varphi(y,z) \partial_2 \chi(x,z) \partial_1 \psi(x,y) = -1.$$

[006271]

Exercice 114

On considère $E = M_n(\mathbb{R})$, $F = GL(n,\mathbb{R})$ et l'application Ψ de $F \times E$ dans E définie par $\Psi(A,B) = AB - I$. Montrer à l'aide du théorème des fonctions implicites que $\varphi : A \in F \to A^{-1}$ est différentiable en tout point de F et retrouver sa différentielle. [006272]

Exercice 115

On considère le système d'équations d'inconnues x et y :

$$x = \frac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1, \quad y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2}.$$

1. Montrer que pour chaque $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution (x_0, y_0), et que la fonction ainsi définie est continue..
2. Montrer en considérant la fonction $F(x,y,t) = (x - \frac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1, \quad y - \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2})$, que le système admet une unique solution $x = x(t),\ y = y(t)$ constituée de fonctions C^∞.
3. Donner un développement limité à l'ordre 2 de $x(t), y(t)$ au point $(0,0)$.

[006273]

Exercice 116

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0,0)$. Montrer qu'il existe un intervalle I contenant x_0 et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$. [006274]

Exercice 117

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Démontrer que, pour x suffisamment proche de 0, il existe un unique $y = y(x) > 0$ tel que $F(x,y) = 0$. Vérifier, sans résolution explicite, que $y'(x) = -\frac{x}{y}$. [006275]

Exercice 118

On considère le système d'équations :

$$\begin{cases} x^2+y^2-2z^2 & = & 0 \\ x^2+2y^2+z^2 & = & 4 \end{cases}.$$

Montrer que, pour x proche de l'origine, il existe des fonctions positives $y(x)$ et $z(x)$ telles que $(x,y(x),z(x))$ soit solution du système. On déterminera y' en fonction de x,y et z' en fonction de x,z. [006276]

Exercice 119

Considérons $F(x,y)=y^n+a_{n-1}(x)y^{n-1}+...+a_1(x)y+a_0(x)$ un polynôme à coefficients variables. On suppose :

1. les fonctions $x\mapsto a_j(x)$ sont C^1, $j=0,1,...,n-1$,
2. pour un certain $x_0\in\mathbb{R}$, le polynôme $y\mapsto F(x_0,y)$ a un zéro simple $y_0\in\mathbb{R}$.

Démontrer que, dans ces conditions, $F(x,y)$ possède, pour x voisin de x_0, un zéro $y(x)$ qui lui est proche de y_0 et que la dépendance $x\mapsto y(x)$ est C^1. [006277]

Exercice 120

Donner l'allure de $\mathscr{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x^4+y^3-x^2-y^2+x-y=0\}$ au voisinage des points $(0,0)$ et $(1,1)$. [006278]

Exercice 121

Montrer que l'équation $e^x+e^y+x+y-2=0$ définit, au voisinage de l'origine, une fonction implicite φ de x dont on calculera le développement limité d'ordre trois en 0. [006279]

Exercice 122

1. Donner la définition d'une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.
2. Enoncer le théorème des fonctions implicites.

   Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ une fonction de classe C^1 et soit $M=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)=\mathbf{0}\}$. Supposons en plus que f vérifie la condition : $\forall x\in M$: $\mathrm{rang}(J(x))=p$, où $J(x)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,p}$ est la matrice Jacobienne de f en x de taille $n\times p$.
3. Montrer, en utilisant le théorème des fonctions implicites, que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k=n-p$.

[006792]

Exercice 123

Soit $E=\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne et $F=M(n,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n\times n$ à coefficients réels; on identifie F avec l'ensemble d'applications linéaires de E dans E. Soit $\|\cdot\|_{op}$ la norme d'opérateurs sur F.

1. Démontrer que $\forall A,B\in F$: $\|AB\|_{op}\leqslant\|A\|_{op}\cdot\|B\|_{op}$.
2. Démontrer que pour $A\in F$, la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$ est une série normalement convergente sur tout compact de F. (Nota Bene : $A^0=Id\in F$ désigne la matrice identité.) On note $\exp: F\to F$ l'application $A\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$.
3. Calculer $D_{\mathbf{0}}\exp$, où $\mathbf{0}$ est l'application nulle de E dans E. Quelle est la taille de la matrice $D_{\mathbf{0}}\exp$? Déduire qu'il existe un voisinage U de $\mathbf{0}\in F$ et un voisinage V de $Id=\exp(\mathbf{0})$ tels que exp est un (C^1-)difféomorphisme de U sur V. Justifier votre réponse !

[006820]

Exercice 124

Soit $f:O\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur l'ouvert O et $(x_o,y_o,z_o)\in O$ tel que $f(x_o,y_o,z_o)=0$.

1. Donner une condition suffisante pour qu'on puisse résoudre : et x en fonction de (y,z), et y en fonction de (x,z), et z en fonction de (x,y). Plus précisément, donner une condition suffisante pour qu'il existe U un voisinage de x_o, V un voisinage de y_o, W un voisinage de z_o, $U \times V \times W \subset O$, et $\phi : V \times W \to U$, $\chi : U \times W \to V$ et $\psi : U \times V \to W$ des fonctions de classe C^1 telles que $\forall (x,y,z) \in U \times V \times W$:
$$f(x,y,z) = 0 \Longleftrightarrow x = \phi(y,z) \Longleftrightarrow y = \chi(x,z) \Longleftrightarrow z = \psi(x,y) \ .$$
Justifier votre réponse.
2. Si la condition donnée en 1. est satisfaite, démontrer que $\forall (x,y,z) \in U \times V \times W$ tels que $f(x,y,z) = 0$ on a
$$(\partial_1 \phi)(y,z) \cdot (\partial_2 \chi)(x,z) \cdot (\partial_1 \psi)(x,y) = -1 \ .$$
(Remarque, cette relation est beaucoup utilisée en thermodynamique, où elle est écrite comme $(\frac{x}{y})_z \cdot (\frac{y}{z})_x \cdot (\frac{z}{x})_y = -1$, avec l'interprétation que $(\frac{x}{y})_z$ est la dérivée de x par rapport à y en gardant z constant.)

[006821]

Exercice 125

Dans cet exercice, $\mathscr{O}$ désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1. Quand dit-on qu'une fonction $f : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$ est de classe C^k $(k \geqslant 1)$?
2. Démontrer par récurrence sur k que si $f : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{O} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sont de classe C^k, alors $h : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)/g(x)$ est aussi de classe C^k.
3. Démontrer par récurrence sur k que la composée de deux fonctions de classe C^k est aussi de classe C^k.
4. Soit $Gl(2,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels 2×2 inversibles. Démontrer que l'application $I : Gl(2,\mathbb{R}) \to Gl(2,\mathbb{R})$, $I(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1}$ est de classe C^k pour tout $k \geqslant 1$.
5. Énoncer le théorème de l'inversion locale pour une fonction $f : \mathscr{O} \to \mathbb{R}^n$.
6. On se restreint au cas $n = 2$ et on se place dans les conditions du théorème de l'inversion locale. Démontrer que si f est de classe C^k, $k > 1$, alors la réciproque f^{-1} (donnée par le théorème de l'inversion locale) est de classe C^k.

[006833]

---

4 373.00 Extremum, extremum lié

Exercice 126

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - xy^2$. Montrer que $(0,0)$ est le seul point critique de f, qu'il n'est pas un extremum local, mais que pourtant la restriction de f à toute droite passant par $(0,0)$ admet en ce point un minimum local. [001823]

Exercice 127

Ecrire la formule de Taylor de second ordre pour chacune des fonctions suivantes au point (x_0,y_0) donné.

1. $f(x,y) = \sin(x+2y)$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
2. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
3. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2} \cos xy$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
4. $f(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy)$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
5. $f(x,y) = e^{(x-1)^2} \cos y$, $(x_0,y_0) = (1,0)$.

[001824]

Exercice 128

Pour chacune des fonctions suivantes etudiez la nature du point critique donné :

1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ au point critique $(0,0)$;
2. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$ au point critique $(0,0)$;
3. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xyz$ au point critique $(0,0,0)$;
4. $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$ au point critique $(0,0)$.

[001825]

Exercice 129

Trouvez les points critiques des fonctions suivantes et déterminez si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.

1. $f(x,y) = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x$;
2. $f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$;
3. $f(x,y,z) = \cos 2x \cdot \sin y + z^2$;
4. $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$.

[001826]

Exercice 130

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

1. Étudier les extremums locaux de f.
2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Montrer que f a un maximum M et un minimum m sur D.
3. Soit $(x,y) \in D$. Montrer que si $f(x,y) = M$ ou $f(x,y) = m$, alors $x^2 + y^2 = 1$.
4. Étudier la fonction $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$. En déduire les valeurs de M et m.

[001827]

Exercice 131

Trouver le point du plan $(2x - y + z = 16)$ le plus proche de l'origine. [001828]

Exercice 132

Déterminer les extremums de $f(x,y) = xy(1 - x^2 - y2)$ sur $[0,1]^2$. [001829]

Exercice 133

Soit $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$. Montrer que f admet au plus un extremum. Ecrire $f(x,y) + 9$ comme la somme de deux carrés et en déduire que f admet -9 comme valeur minimale. [001830]

Exercice 134

Déterminer un triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle donné. [001831]

Exercice 135

Soit $f(x,y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.
Montrer que f admet un minimum local en 0 suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ mais n'admet pas de minimum local en $(0,0)$. [001832]

Exercice 136

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xe^y + ye^x$.
Montrer que $(-1,-1)$ est le seul extremum possible. A l'aide d'un développement limité de $\varphi(h) = f(-1 + h, -1 + h)$ et de $\psi(h) = f(-1 + h, -1 - h)$, montrer que f n'a pas d'extremum. [001833]

Exercice 137

Déterminer les extrémums de $f : (x,y,z) \to x^2+y^2+z^2+2xyz$. [001834]

Exercice 138

Déterminer $\max_{|z|\leqslant 1} |\sin z|$. On rappelle que : $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. [001835]

Exercice 139

Si f est concave sur un ouvert convexe $U \subset \mathbb{R}^2$ et si :

$$\exists a \in U, \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = 0,$$

alors f admet un maximum local en a. [001836]

Exercice 140

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, on définit $\int(A)$ comme l'ensemble $\{x \in A | \exists \rho > 0, B(x,\rho) \subset A\}$. On supposera A fermée bornée et $\int(A) \neq \emptyset$. On suppose que f est une fonction C^1 sur A telle que f est constante sur $A \setminus \mathrm{Int}(A)$. Montrer qu'il existe $z \in \mathrm{Int}(A)$ tel que :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(z) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(z) = 0.$$

[001837]

Exercice 141

Chercher les extrémums sur $\mathbb{R}^2$ des applications :

$$(x,y) \to x^4+y^4-4xy;$$

$$(x,y) \to (x-y)e^{xy};$$

$$(x,y) \to xe^y+ye^x;$$

$$(x,y) \to e^{x\sin y};$$

$$(x,y) \to x^3+y^3.$$

[001838]

Exercice 142

Soit f une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.

1. Rappeler une condition nécessaire pour que f présente un extremum local en (x_0,y_0).
   Dans la suite de l'exercice, $\mathbf{a} = (x_0,y_0)$ vérifie cette condition, c'est-à-dire est un *point critique* de f. On pose
   $$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}),$$
   $$Q(x,y) = Ax^2+2Bxy+Cy^2, \quad \Delta = B^2-AC,$$
   $$R(t) = At^2+2Bt+C, \quad S(t) = Ct^2+2Bt+A.$$
2. On suppose $\Delta < 0$ et $A(\text{ou } C) > 0$.
   (a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $R(t) \geqslant \delta$ et $S(t) \geqslant \delta$ pour un certain $\delta > 0$.

(b) On pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$, et on suppose que $\sin\theta.\cos\theta \neq 0$. Montrer successivement :

$$\begin{aligned} Q(x,y) &\geqslant r^2\delta\sin^2\theta, \\ Q(x,y) &\geqslant r^2\delta\cos^2\theta, \\ Q(x,y) &\geqslant \tfrac{r^2}{2}\delta. \end{aligned}$$

En déduire que

$$\forall(x,y) \quad Q(x,y) \geqslant \frac{r^2}{2}\mathrm{Inf}(\delta, 2A, 2C).$$

(c) Montrer que **a** est un point de minimum local strict de f. On écrira pour cela la formule de Taylor-Young pour f en ce point.

3. On suppose $\Delta < 0$ et $A(\text{ou } C) < 0$.
   Montrer que (x_0, y_0) est un point de maximum local strict de f.
4. On suppose maintenant $\Delta > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $S(t_1) > 0$ et $S(t_2) < 0$.
   (b) Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\tan\theta_1 = t_1$ et $\tan\theta_2 = t_2$. En examinant les fonctions

$$g(t) := f(x_0 + t\cos\theta_1, y_0 + t\sin\theta_1), \quad h(t) := f(x_0 + t\cos\theta_2, y_0 + t\sin\theta_2)$$

   pour $t \in \mathbb{R}$ assez petit, montrer que **a** n'est ni un point de maximum local, ni un point de minimum local de f.
5. Dessiner l'allure du graphe de f au voisinage du point $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ dans les trois cas étudiés ci-dessus (questions 1, 3 et 4).
6. Que peut-on dire en général quand $\Delta = 0$? Pour répondre à cette question, on pourra s'appuyer sur l'étude des deux cas suivant au voisinage de $(0,0)$:

$$f_1(x,y) = x^2 + x^4 + y^4 \quad \text{et} \quad f_2(x,y) = x^2 - y^4.$$

[001839]

Exercice 143

Existe-t-il un triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle donné ? Le déterminer par une méthode géométrique. [001840]

Exercice 144

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\lim_{\|x\|\to\infty} |f(x)| = +\infty.$$

Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure. [001841]

Exercice 145

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application $(x,y) \mapsto 6xy + (y-x)^3$. On note $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$.

1. Dessiner Δ. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes sur Δ.
2. Calculer les extrema de f sur le bord de Δ puis dans l'intérieur de Δ.
3. En déduire les bornes de f sur Δ.

[001842]

Exercice 146

$S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Soit f l'application de D dans $\mathbb{R}$ définie par $f(z) = |\sin z|$.

1. Pour quelle raison f est-elle bornée sur D ? On note $M = \sup_{z\in D} f(z)$ et $m = \inf_{z\in D} f(z)$. Est-ce que M et m sont atteints ? Donner la valeur de m.
2. Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}, x,y \in \mathbb{R}$. Montrer que $|\sin z|^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2y - \cos 2x)$. (On rappelle que $\sin z = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i}$ et $\operatorname{ch} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$.)
3. En déduire que M est atteint en un point de S.
4. Montrer que $M = \dfrac{e^2-1}{2e}$.

[001843]

Exercice 147

On pose $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est différentiable sur Ω et calculer sa différentielle.
2. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ et que sa différentielle est nulle.
3. Montrer que f admet en tout point des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et calculer la valeur de ces dérivées en $(0,0)$. Que peut-on en déduire pour la continuité de ces dérivées partielles en $(0,0)$?

[001844]

Exercice 148

Déterminer les extremums (locaux et/ou globaux) de :

1. $f(x,y) = x^2 - y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. $f(x,y) = x^3 - y^3$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
4. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

[006306]

Exercice 149

Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel λ, la nature des extremums de la fonction $f(x,y) = y(x^2+y^2-2\lambda y)$. [006307]

Exercice 150

Soit $f : (t,x,y) \in \mathbb{R}^3 \mapsto f(t,x,y) \in \mathbb{R}$ une application de classe C^2 telle que

— $\frac{\partial^2 f}{\partial (x,y)^2}$ soit une matrice définie positive en tout point et
— $(x,y) \mapsto f(0,x,y)$ atteint son minimum en (x_0,y_0).

Montrer que, si t est voisin de 0, l'application $(x,y) \mapsto f(t,x,y)$ atteint son minimum en $(x(t),y(t))$, où $t \mapsto (x(t),y(t))$ est une application de classe C^1 sur ce voisinage de 0. [006308]

Exercice 151

Soit $g(x,y,z) = xyz - 32$, $\mathscr{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \, g(x,y,z) = 0\}$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application $f(x,y,z) = xy + 2yz + 2xz$. Déterminer $\min\{f(x,y,z) \, ; (x,y,z) \in S\}$. [006309]

Exercice 152

Déterminer le point p du plan $\Sigma = \{(x,y,x+y) \, ; \, x,y \in \mathbb{R}\}$ qui réalise la distance $\operatorname{dist}(\Sigma \, , \, (1,0,0))$. [006310]

Exercice 153

1. Déterminer les extremums de la fonction $f(x,y) = xy$ sur le cercle unité $S = \{(,x,y) \in \mathbb{R}^2\,; x^2+y^2 = 1\}$.
2. Même question pour la fonction $f(x,y) = xy^2$.

[006311]

Exercice 154

Déterminer le minimum et maximum de la fonction $f(x,y,z) = 5x+y-3z$ sur l'intersection du plan $\Sigma = \{x+y+z = 0\}$ avec la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. [006312]

Exercice 155

Déterminer les extremums de la fonction $f(x,y,z) = 2x+3y+2z$ sur l'intersection du plan d'équation $x+z = 1$ avec le cylindre $\mathscr{X} = \{x^2+y^2 = 2\} \subset \mathbb{R}^3$. [006313]

Exercice 156

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un fermé non vide de E et $x \in E$ un point, appartenant ou non à F. Montrer qu'il existe un point $\bar{x} \in F$ tel que
$$\|x-\bar{x}\| = \inf_{z \in F} \|x-z\|.$$
(Question subsidiaire : ce point est-il unique ?)
2. On se place désormais dans l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2 à coefficients réels, muni de la norme
$$\left\| \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$
et on considère l'ensemble $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ des matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de déterminant égal à 1.
   (a) Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ n'est *pas* bornée.
   (c) Soit $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la fonction qui à une matrice M associe $f(M) = \|M\|$. On cherche la ou les matrices M réalisant l'infimum de la fonction f sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, autrement dit la ou les matrices les plus proches de la matrice nulle.
      i. Montrer que $f_{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ est minorée et atteint son infimum.
      ii. Calculer le gradient de f. Est-il toujours défini ?
      iii. Trouver le ou les extrema de $f_{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$. Montrer qu'il s'agit du minimum et en déduire
$$\inf_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} \|M\|.$$

[006883]

5 374.00 Autre

Exercice 157

Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *harmonique* si $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 0$ pour tout $x \in U$. Une fonction $f(x,y)$ est dite *radiale* si ses valeurs au point (x,y) ne dépendent que de la distance $r = \sqrt{x^2+y^2}$ à l'origine, c'est à dire si $f(x,y) = F(r) = F(\sqrt{x^2+y^2})$, où $F = F(r)$ est une fonction d'une seule variable.

Montrez que les seules fonctions radiales et harmoniques, dans $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine, sont les fonctions $C\ln(r)+D=C\ln(\sqrt{x^2+y^2})+D$, où C et D sont des constantes. [006292]

Exercice 158

Vérifiez que les fonctions suivantes sont harmoniques dans $\mathbb{R}^2$:

1. $e^x\cos y$;
2. x^3-3xy^2 ;
3. pour tout entier $k\geqslant 0$, la fonction $f(x,y)=r^k\cos(k\theta)$, où r et θ sont les coordonnées polaires de (x,y).

[006293]

Exercice 159

Exprimez en coordonnées polaires : $y^2\dfrac{\partial^n f}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^n f}{\partial x\partial y}+x^2\dfrac{\partial^n f}{\partial y^2}-x\dfrac{\partial f}{\partial x}-y\dfrac{\partial f}{\partial x}$. [006294]

Exercice 160

Soit U l'ouvert $\mathbb{R}^3$ privé de l'axe des z.

1. Vérifiez que la fonction $f(x,y,z)$, qui vaut $e^z\cos\frac{\theta}{2}\frac{\sin r}{\sqrt{r}}$ en coordonnées cylindriques, est harmonique sur U.
2. Soit λ une constante réelle. Montrer qu'une fonction du type $f(x,y,z)=e^z\cos(\lambda\theta)u(r)$ est harmonique dans U si et seulement si $u=u(r)$ est solution de l'équation différentielle (dite de *Bessel*) :
$$r^2u''(r)+ru'(r)+[r^2-\lambda^2]u(r)=0. \qquad (E_\lambda)$$
3. Vérifiez, que pour $\lambda=3/2$, la fonction $u(r)=\dfrac{\sin r-r\cos r}{r\sqrt{r}}$ convient.

[006295]

Exercice 161

Dans $\mathbb{R}^3$ privé de l'origine, montrez que les seules fonctions harmoniques et *radiales* (c'est-à -dire ne dépendant que de la distance ρ de (x,y,z) à l'origine) sont les fonctions $f(x,y,z)=\frac{C}{\rho}+D=\frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+D$, où C et D sont des constantes. [006296]

Exercice 162

Soient ρ,θ,φ les coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$. On pose $\sin\varphi=t$. Montrer que, pour qu'une fonction de la forme $f(x,y,z)=\rho^nP(t)$, où n est un entier $\geqslant 0$, soit harmonique, il faut et il suffit que la fonction $t\mapsto P(t)$ soit solution de l'équation différentielle (dite *de Legendre*) :
$$(1-t^2)P''(t)-2tP'(t)+n(n+1)P(t)=0. \qquad (D_n)$$
Pour $n=0,1,2,3,4,5$, vérifiez, en le calculant par la méthode des coefficients indéterminés, qu'il y a un polynôme $P_n(t)$, et un seul, de degré n, solution de (D_n), et tel que $P_n(1)=1$. [Remarque : ce fait vaut pour tout n; les polynômes P_n s'appellent polynômes de Legendre]. [006297]

Exercice 163

Dans $\mathbb{R}^n$, on pose $\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n^2}$, et $\rho=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$. Soit une fonction *radiale* $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=F(\rho)$. Montrer que $\Delta f=F''(\rho)+(n-1)F'(\rho)$. Si $n\geqslant 3$, en déduire que les seules fonctions radiales et harmoniques dans $\mathbb{R}^n$ privé de l'origine sont les $f(x,y,z)=\frac{C}{\rho^{n-2}}+D$, où C et D sont des constantes. [006298]

Exercice 164

$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + \langle \nabla f \mid \nabla g \rangle$. [006299]

Exercice 165

Une fonction f de classe C^4 (par exemple à 2 variables) est dite *biharmonique* si

$$\Delta(\Delta f) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \equiv 0.$$

Ces fonctions interviennent en théorie de l'Elasticité. Bien entendu toute fonction harmonique est biharmonique. Montrez que, si f et g sont deux fonctions harmoniques, alors la fonction $xf + (x^2 + y^2)g$ est biharmonique. [006300]