Université de Rennes 1–Année 2023/2024

PrépaAgreg—CCAN-Compacité-Connexité

Feuille de TD 1

Exercice 1

(Théorème du point fixe avec paramètre). Soit (X,d) un espace métrique complet, Λ un espace topologique et $f : X\times\Lambda \to X$ une application continue ; on suppose que f est uniformément contractante sur X c-à-d

$$(\exists k\in[0,1[)(\forall (x_1,x_2)\in X\times X)(\forall\lambda\in\Lambda):\ d(f(x_1,\lambda),f(x_2,\lambda))\leqslant kd(x_1,x_2).$$

Montrer que, pour tout $\lambda\in\Lambda$, il existe un unique point $x:=\varphi(\lambda)\in X$ tel que $f(x,\lambda)=x$ et que l'application ainsi définie $\varphi:\Lambda\to X$ est continue.

Exercice 2

(Théorème de Darboux). Soit $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle et $f : I\to\mathbb{R}$ dérivable et $a,b\in I$ avec $a<b$

1. On suppose que $f'(a)f'(b)<0$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.
2. Montrer que f' a la propriété des valeurs intermédiares : si $f'a)=u$ et $f'(b)=v$ et si $w\in]u,w[$ (ou $w\in]w,u[$), alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=w$. *(Indication : considérer la fonction $F(t)=f(t)-tw$).*

Exercice 3

(Matrices semblables à une matrice unitaire). On munit $M_d(\mathbb{C})$ de la norme associée à la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^d$. Soit $M\in M_d(\mathbb{C})$.

1. Soit λ une valeur propre de M. Montrer que $|\lambda|\leqslant\|M^n\|^{1/n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
2. On suppose que M est semblable à une matrice unitaire $U\in U(d,\mathbb{C})$. Montrer que $|\det M|=1$ et que la suite $(\|M^n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
3. On suppose que $|\det M|=1$ et que la suite $(\|M^n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que M est semblable à une matrice unitaire. *(Indication : Montrer qu'abord que $|\lambda|=1$ pour toute valeur propre λ de M; si $M=D+U$ est la décomposition de Dunford, montrer que la suite $(I_d+D^{-1}U)^n$ est bornée.)*
4. On suppose que $|\det M|=1$ et que la suite $(\|M^n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que I_d est une valeur d'adhérence de la suite $(\|M^n\|)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 4

(Applications expansives). Soit (X,d) un espace métrique compact et $f : X\to X$ expansive, c-à-d

$$\forall (x_1,x_2)\in X\times X, d(f(x_1),f(x_2)\geqslant d(x_1,x_2).$$

Soit $(x_1,x_2)\in X\times X$.

1. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(n_k)_k$ d'entiers tels que $(f^{n_k}(x_1))_k$ et $(f^{n_k}(x_2))_k$ soient des suites de Cauchy.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon>0$ il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $d(x_1,f^p(x_1))<\varepsilon$ et $d(x_2,f^p(x_2))<\varepsilon$
3. Montrer que f est isométrique.
4. Montrer que f est surjective

Exercice 5

(Parties compactes de ℓ^p). Pour $p\in[1,+\infty[$, soit ℓ^p l'espace de Banach des fonctions $f=\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$ telles que $\|f\|_p:=(\sum_{n=1}^{+\infty}|f(n)|^p)^{1/p}$ soit fini. Une partie K de ℓ^p est dite équi-intégrable si

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N}^*)(\forall f\in K):\sum_{n=N+1}^{+\infty}|f(n)|^p<\varepsilon^p$$

1. Soit K une partie compacte de ℓ^p. Montrer que K est fermée, bornée et équi-intégrable.
2. Soit Soit K une partie fermée, bornée et équi-intégrable de ℓ^p. Montrer que K est compacte *(Indication : Montrer que K est précompacte.)*

Exercice 6

(Lemme de Lebesgue). Soit (X,d) un espace métrique compact et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Montrer qu'il existe un nombre réel $r>0$ tel que

$$(\forall a\in X)(\exists i\in I) : B(a,r)\subset U_i,$$

où $B(a,r)=\{x\in X|d(x,a)<r\}$.

Exercice 7

(Un espace connexe et non connexe par arcs). Soit $E=\{(x,\sin(1/x))|0<x\leqslant 1\}$ et X l'adhérence de E dans $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que X est connexe et que $X=E\cup\{(0,t)|-1\leqslant t\leqslant 1\}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de chemin continu $\gamma\colon[0,1]\to X$ tel que $\gamma(0)=(0,1)$ et $\gamma(1)\in E$. *(Indication : Considérer la fonction $\varphi=\operatorname{Re}\gamma$ et les composantes connexes de l'ensemble $\{\varphi\neq 0\}$.)* En déduire que X n'est pas connexe par arcs

Exercice 8

("Théorème de la grenouille"). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels dans $[0,1]$ telle que $d(x_{n+1},x_n)\to_{n\to\infty} 0$. Soit A l'ensemble des points d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que A est un intervalle.
2. Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ continue et $x_0\in[0,1]$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1}=f(x_n)$. On suppose que $d(x_{n+1},x_n)\to_{n\to\infty} 0$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f et que ce point fixe est unique.

Exercice 9

(Connexité d'espaces).

1. Pour $n\geqslant 2$, montrer que $\mathbb{R}^n\setminus F$ est connexe par arcs pour toute partie finie $F\subset\mathbb{R}^n$.
2. Pour $n\geqslant 1$, montrer que la sphère unité S^n dans $\mathbb{R}^{n+1}$ est connexe par arcs.

Exercice 10

(Composantes connexes de l''espace des projecteurs). Soit $\mathscr{P}\subset M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des projecteurs (c-à-d des $P\in M_n(\mathbb{R})$ telles que $P^2=P$) muni de la topologie induite de $M_n(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^{n^2}$.

1. Montrer que l'application $\mathscr{P}\to\mathbb{Z}, P\mapsto \operatorname{rang}(P)$ est continue.
2. Pour $k\leqslant n$, on pose
$$\mathscr{P}_k=\{P\in\mathscr{P}|\operatorname{rang}(P)=k\}.$$
Montrer que chaque composante connexe de $\mathscr{P}$ est contenue dans un des ensembles $\mathscr{P}_k$.
3. Montrer que les composantes connexes de $\mathscr{P}$ sont $\mathscr{P}_0,\mathscr{P}_1,\dots,\mathscr{P}_n$.