

Exercice 1

(Théorème du point fixe avec paramètre). Soit (X, d) un espace métrique complet, Λ un espace topologique et $f : X \times \Lambda \rightarrow X$ une application continue ; on suppose que f est uniformément contractante sur X c-à-d

$$(\exists k \in [0, 1])(\forall (x_1, x_2) \in X \times X)(\forall \lambda \in \Lambda) : d(f(x_1, \lambda), f(x_2, \lambda)) \leq kd(x_1, x_2).$$

Montrer que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe un unique point $x := \varphi(\lambda) \in X$ tel que $f(x, \lambda) = x$ et que l'application ainsi définie $\varphi : \Lambda \rightarrow X$ est continue.

Exercice 2

(Théorème de Darboux). Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $a, b \in I$ avec $a < b$

1. On suppose que $f'(a)f'(b) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Montrer que f' a la propriété des valeurs intermédiaires : si $f'(a) = u$ et $f'(b) = v$ et si $w \in]u, v[$ (ou $w \in]v, u[$), alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = w$. (*Indication : considérer la fonction $F(t) = f(t) - tw$* .)

Exercice 3

(Matrices semblables à une matrice unitaire). On munit $M_d(\mathbb{C})$ de la norme associée à la norme euclidienne sur \mathbb{C}^d . Soit $M \in M_d(\mathbb{C})$.

1. Soit λ une valeur propre de M . Montrer que $|\lambda| \leq \|M^n\|^{1/n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On suppose que M est semblable à une matrice unitaire $U \in U(d, \mathbb{C})$. Montrer que $|\det M| = 1$ et que la suite $(\|M^n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
3. On suppose que $|\det M| = 1$ et que la suite $(\|M^n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que M est semblable à une matrice unitaire. (*Indication : Montrer qu'abord que $|\lambda| = 1$ pour toute valeur propre λ de M ; si $M = D + U$ est la décomposition de Dunford, montrer que la suite $(I_d + D^{-1}U)^n$ est bornée.*)
4. On suppose que $|\det M| = 1$ et que la suite $(\|M^n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que I_d est une valeur d'adhérence de la suite $(\|M^n\|)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 4

(Applications expansives). Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \rightarrow X$ expansive, c-à-d

$$\forall (x_1, x_2) \in X \times X, d(f(x_1), f(x_2)) \geq d(x_1, x_2).$$

Soit $(x_1, x_2) \in X \times X$.

1. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(n_k)_k$ d'entiers tels que $(f^{n_k}(x_1))_k$ et $(f^{n_k}(x_2))_k$ soient des suites de Cauchy.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $d(x_1, f^p(x_1)) < \varepsilon$ et $d(x_2, f^p(x_2)) < \varepsilon$
3. Montrer que f est isométrique.
4. Montrer que f est surjective

Exercice 5

(Parties compactes de ℓ^p). Pour $p \in [1, +\infty[$, soit ℓ^p l'espace de Banach des fonctions $f = \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\|f\|_p := (\sum_{n=1}^{+\infty} |f(n)|^p)^{1/p}$ soit fini. Une partie K de ℓ^p est dite équi-intégrable si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}^*)(\forall f \in K) : \sum_{n=N+1}^{+\infty} |f(n)|^p < \varepsilon^p$$

1. Soit K une partie compacte de ℓ^p . Montrer que K est fermée, bornée et équi-intégrable.
2. Soit K une partie fermée, bornée et équi-intégrable de ℓ^p . Montrer que K est compacte (*Indication : Montrer que K est précompacte.*)

Exercice 6

(Lemme de Lebesgue). Soit (X, d) un espace métrique compact et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . Montrer qu'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que

$$(\forall a \in X)(\exists i \in I) : B(a, r) \subset U_i,$$

où $B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$.

Exercice 7

(Un espace connexe et non connexe par arcs). Soit $E = \{(x, \sin(1/x)) \mid 0 < x \leq 1\}$ et X l'adhérence de E dans \mathbb{R}^2 .

1. Montrer que X est connexe et que $X = E \cup \{(0, t) \mid -1 \leq t \leq 1\}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tel que $\gamma(0) = (0, 1)$ et $\gamma(1) \in E$. (*Indication : Considérer la fonction $\varphi = \operatorname{Re} \gamma$ et les composantes connexes de l'ensemble $\{\varphi \neq 0\}$.*) En déduire que X n'est pas connexe par arcs

Exercice 8

(“Théorème de la grenouille”). Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels dans $[0, 1]$ telle que $d(x_{n+1}, x_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. Soit A l'ensemble des points d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{R} .

1. Montrer que A est un intervalle.
2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue et $x_0 \in [0, 1]$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$. On suppose que $d(x_{n+1}, x_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f et que ce point fixe est unique.

Exercice 9

(Connexité d'espaces).

1. Pour $n \geq 2$, montrer que $\mathbb{R}^n \setminus F$ est connexe par arcs pour toute partie finie $F \subset \mathbb{R}^n$.
2. Pour $n \geq 1$, montrer que la sphère unité S^n dans \mathbb{R}^{n+1} est connexe par arcs.

Exercice 10

(Composantes connexes de l'espace des projecteurs). Soit $\mathcal{P} \subset M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des projecteurs (c-à-d des $P \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $P^2 = P$) muni de la topologie induite de $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$.

1. Montrer que l'application $\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}, P \mapsto \operatorname{rang}(P)$ est continue.
2. Pour $k \leq n$, on pose

$$\mathcal{P}_k = \{P \in \mathcal{P} \mid \operatorname{rang}(P) = k\}.$$

Montrer que chaque composante connexe de \mathcal{P} est contenue dans un des ensembles \mathcal{P}_k .

3. Montrer que les composantes connexes de \mathcal{P} sont $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$.