Université de Rennes 1–Année 2023/2024

PrépaAgreg—CCAN-Compacité-Connexité

Feuille de TD 2

Exercice 1

(Théorème de Tychonov quantitatif) Soit $(X_n, d_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'espaces métriques. Sans perte de généralité, on peut supposer que $d_n \leqslant 1$ pour tout n. Soit $X = \prod_{n\geqslant 1} X_n$ muni de la distance d donnée par $d((x_n)_n, (y_n)_n) = \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n} d_n(x_n, y_n)$. Supposons que chaque X_n est précompact.

Soit $\varepsilon > 0$. On rappelle que $N(X, \varepsilon) \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ est le nombre minimal de boules dans X de rayon ε formant un recouvrement de X. Montrer que

$$N(X,\varepsilon) \leqslant \prod_{n=1}^{n_0} N(X_n, \varepsilon/2),$$

pour

$$n_0 = \left[\frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln 2}\right] + 1.$$

En particulier, X est précompact.

Exercice 2

(Topologie dans $M_n(\mathbf{K})$)

Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on munit l'algèbre $M_n(\mathbf{K})$ des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ (qui est isomorphe à $\mathbf{K}^{n^2}$ comme espace vectoriel) de la topologie standard de $\mathbf{K}^{n^2}$.

1. Montrer que $GL_n(\mathbf{R})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbf{R})$.
2. Montrer que $M_n(\mathbf{R}) \setminus GL_n(\mathbf{R})$ est fermé mais non compact (pour $n \geqslant 2$).
3. Montrer que $O(n, \mathbf{R})$ est compact et n'est pas connexe.

Exercice 3

(Topologie dans $M_n(\mathbf{K})$-suite)

1. Montrer que le sous-espace $S_n(\mathbf{R})$ des matrices symétriques est fermé dans $M_n(\mathbf{R})$.
2. Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $M_n(\mathbf{R})$.
3. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbf{C})$ est dense dans $M_n(\mathbf{C})$. Peut-on remplacer $M_n(\mathbf{C})$ par $M_n(\mathbf{R})$?
4. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques (c-à-d les matrices $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbf{R})$ telles que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$) est un compact convexe de $M_n(\mathbf{R})$.
5. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs. Indication : si A est digonalsiable alors tA l'est aussi pour $t \in \mathbf{R}$.

Exercice 4

(Densité de $GL_n(\mathbf{Q})$ et $SL_n(\mathbf{Q})$)

1. Montrer que $GL_n(\mathbf{Q})$ est dense dans $GL_n(\mathbf{R})$.
2. Montrer que $SL_n(\mathbf{Q})$ est dense dans $SL_n(\mathbf{R})$.

Exercice 5

(Connexité de $GL_n(\mathbf{C})$

1. Soient $A, B \in GL_n(\mathbf{C})$ et soit P le polynôme défini par

   $$\forall z \in \mathbf{C} : P(z) = \det(zA + (1-z)B).$$

   Montrer que le complémentaire de $\{z \in \mathbf{C} : P(z) = 0\}$ dans $\mathbf{C}$ est connexe par arcs.
2. Montrer que $GL_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs.
3. Montrer que $GL_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe.

Exercice 6

(Connexité de $SL_n(\mathbf{K})$ et $SO(n, \mathbf{R})$)

1. Montrer que $SL_n(\mathbf{C})$ et $SL_n(\mathbf{R})$ sont connexes par arcs.
2. Montrer que $SO(n, \mathbf{R})$ est connexe par arcs.