Université de Rennes 1 **Année 2022–2023**

Préparation à l'Agrégation : compléments d'Analyse

Exercices

Exercice 1

1. *Soit* $h^1(\mathbb{N}) = \{u \in \ell^2(\mathbb{N}),\ \sum_{n\geq 0} n^2|u_n|^2 < +\infty\}$.

   (a) *Montrer qu'on définit un produit scalaire sur* $h^1(\mathbb{N})$ *en posant :*

$$\forall a, b \in h^1(\mathbb{N}), \quad \langle a, b\rangle = \sum_{n\geq 0}(1+n^2)a_n\bar{b}_n.$$

et que ce produit scalaire fait de $h^1(\mathbb{N})$ *un espace de Hilbert.*

On remarque que : $\forall a, b \in h^1(\mathbb{N})$,

$$|\langle a, b\rangle| \leq \sum_{n\geq 0}|a_n||b_n| + \sum_{n\geq 0} n^2|a_n||b_n| \leq$$

$$\leq \|a\|_2\|b\|_2 + \left(\sum_{n\geq 0} n^2|a_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n\geq 0} n^2|b_n|^2\right)^{1/2} < +\infty$$

On vérifie immédiatement que $(a, b) \mapsto \langle a, b\rangle$ est une forme bilinéaire sur $h^1(\mathbb{N})$. Soit $a \in h^1(\mathbb{N})$ t.q. $\langle a, a\rangle = 0$. Alors : $\forall N > 0$,

$$0 \leq \sum_{n=0}^{N}(1+n^2)|a_n|^2 \leq \sum_{n\geq 0}(1+n^2)|a_n|^2 = 0 \Rightarrow (1+n^2)|a_n|^2 = 0,\ \forall n \in [[0, N]].$$

donc $\forall n \geq 0$, $(1+n^2)|a_n|^2 = 0 \Rightarrow a_n = 0$. Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $h^1(\mathbb{N})$.

Soit $(a^{(n)})_{n\geq 0} \in h^1(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $h^1(\mathbb{N})$. On pose :

$$b_k^{(n)} = \sqrt{1+k^2}\, a_k^{(n)}, \quad \forall n, k \geq 0.$$

La suite $(a^{(n)})_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $h^1(\mathbb{N})$ ssi la suite $(b^{(n)})_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\ell^2(\mathbb{N})$, donc convergente vers une limite $b \in \ell^2(\mathbb{N})$. On pose :

$$a_k = \frac{b_k}{\sqrt{1+k^2}}, \quad \forall k \geq 0.$$

Par construction : $a \in h^1(\mathbb{N})$ et

$$\|a^{(n)} - a\| = \|b^{(n)} - b\|_2 \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$$

i.e. la suite $(a^{(n)})_{n\geq 0}$ converge vers a dans $h^1(\mathbb{N})$. Ceci érant vrai pour toute suite de Cauchy dans $h^1(\mathbb{N})$, il en résulte que $h^1(\mathbb{N})$ est complet.

(b) *Montrer que $h^1(\mathbb{N})$ est dense dans $\ell^2(\mathbb{N})$.*

Soit $c_{00}(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Soit $u \in \ell^2(\mathbb{N})$. Pour tout $N > 0$ on pose

$$u_n^{(N)} = \begin{cases} u_n & \text{si} \quad n \leq N, \\ 0 & \text{si} \quad n > N, \end{cases}$$

Alors $u^{(N)} \in c_{00}(\mathbb{N})$ et

$$\|u^{(N)} - u\|_2^2 = \sum_{n \geq 0} |u_n^{(N)} - u_n|^2 = \sum_{n > N} |u_n|^2.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 > 0$ t.q. $\forall \sum_{n \geq n_0} |u_n|^2 < \varepsilon^2$. On en déduit : $\forall N \geq n_0$, $\|u^{(N)} - u\|_2 \leq \varepsilon$. La construction étant valable pour tout $u \in \ell^2(\mathbb{N})$, on en déduit que $c_{00}(\mathbb{N})$ est dense dans $\ell^2(\mathbb{N})$. Alors :

$c_{00}(\mathbb{N}) \subset h^1(\mathbb{N}) \subset \ell^2(\mathbb{N}) \Rightarrow \overline{c_{00}(\mathbb{N})} \subset \overline{h^1(\mathbb{N})} \subset \ell^2(\mathbb{N}) \Rightarrow \overline{h^1(\mathbb{N})} = \ell^2(\mathbb{N})$.

(c) *Montrer que la boule unité fermée de $h^1(\mathbb{N})$ est compacte dans $\ell^2(\mathbb{N})$.*

Soit $a \in h^1(\mathbb{N})$ t.q. $\|a\|^2 = \sum_{n \geq 0}(1 + n^2)|a_n|^2 \leq 1$. On remarque que

$$\forall n \geq 1, \quad n^2 |a_n|^2 \leq 1 \Rightarrow |a_n| \leq \frac{1}{n},$$

donc $\sum_{n \geq 1} |a_n|^2 \leq \displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Soit $(a^{(n)})_{n \geq 0} \in h^1(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ t.q. $\|a^{(n)}\| \leq 1$, $\forall n \geq 0$. On a

$$|a_1^{(n)}| \leq 1, \quad \forall n \geq 0.$$

Du théorème de Bolzano-Weierstarss, on déduit qu'il existe une suite extraite $(a^{(\varphi_1(n))})_{n \geq 0}$ t.q. $a_1^{(\varphi_1(n))} \to a_1 \in \mathbb{R}$ et $|a_1^{(\varphi_1(n))} - a_1| \leq \frac{1}{2^n}$, $\forall n \geq 0$. De même, on a

$$|a_2^{(\varphi_1(n))}| \leq \frac{1}{2}, \quad \forall n \geq 0.$$

Du théorème de Bolzano-Weierstarss, on déduit qu'il existe une suite $(a^{(\varphi_2(n))})_{n \geq 0}$ extraite de $(a^{(\varphi_1(n))})_{n \geq 0}$ t.q. $a_2^{(\varphi_2(n))} \to a_2 \in \mathbb{R}$ et $|a_2^{(\varphi_2(n))} - a_2| \leq \frac{1}{2^n}$, $\forall n \geq 0$. Par récurrence sur $p \geq 0$, on construit une suite extraite $(a^{(\varphi_p(n))})_{n \geq 0}$ t.q. $a_p^{(\varphi_p(n))} \to a_p \in \mathbb{R}$ et $|a_p^{(\varphi_p(n))} - a_p| \leq \frac{1}{2^n}$, $\forall n \geq 0$. On pose : $b^{(n)} = a^{(\varphi_n(n))}$. Alors : $\forall n \geq 0$,

$$\sum_{k \geq 0} |b_k^{(n)} - a_k|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{2n}} + \sum_{k > n} \frac{1}{k^2} = \frac{(n+1)}{2^{2n}} + \sum_{k > n} \frac{1}{k^2}$$

donc $\lim_{n \to +\infty} \|b^{(n)} - a\|_2 = 0$. Par construction :

$$\forall k \geq 0, \quad |a_k| \leq \frac{1}{k} \Rightarrow a \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

On en déduit que la suite $(b^{(n)})_{n \geq 0}$ extraite de $(a^{(n)})_{n \geq 0}$ est dans $\ell^2(\mathbb{N})$ et que $b^{(n)} \to a$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

Exercice 2

Soit E un espace de Banach. On suppose E uniformément convexe, i.e. t.q.

$$\forall x, y \in B_E(0,1), \quad \left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\| \geq 1 - \delta \Rightarrow \|x - y\| \leq \varepsilon.$$

Soit $C \subset E$ un convexe fermé non vide.

1. *Soit $x \in E$. On pose $\alpha = \inf_{y \in C} \|x - y\|$. Soit $(x_n)_{n \geq 0} \in C^{\mathbb{N}}$ une suite t.q. :*

$$\forall n \geq 0, \quad \|x_n - x\| \leq \alpha + \frac{1}{n+1}.$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans E.

On pose : $\forall \geq 0$, $\alpha_n = \alpha + \frac{1}{n+1}$. Soit $n, p \geq 0$. On a

$$\|x - x_n\| \leq \alpha_n \quad \text{et} \quad \|x - x_{n+p}\| \leq \alpha_{n+p} \leq \alpha_n \Rightarrow \frac{\|x - x_n\|}{\alpha_n} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{\|x - x_{n+p}\|}{\alpha_n} \leq 1.$$

et

$$\frac{1}{2}(x_n + x_{n+p}) \in C \Rightarrow \frac{1}{\alpha_n} \left\| x - \frac{1}{2}(x_n + x_{n+p}) \right\| = \left\| \frac{1}{2\alpha_n}(x - x_n) + \frac{1}{2\alpha_n}(x - x_{n+p}) \right\|$$

$$\geq \frac{\alpha}{\alpha_n} = 1 - \frac{1}{n\alpha + 1}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ associé à ε dans l'uniforme convexité de E. Il existe $n_0 > 0$ t.q. :

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{1}{n\alpha + 1} \leq \delta.$$

On en déduit :

$$\forall n \geq n_0, \quad \left\| \frac{1}{2\alpha_n}(x - x_n) + \frac{1}{2\alpha_n}(x - x_{n+p}) \right\| \geq 1 - \frac{1}{n\alpha + 1} \geq 1 - \delta.$$

L'uniforme convexté de E entraîne :

$$\forall n \geq n_0, \quad \forall p \geq 0, \quad \frac{1}{\alpha_n}\|x_{n+p} - x_n\| = \frac{1}{\alpha_n}\|(x_{n+p} - x) - (x_n - x)\| \leq \varepsilon$$

i.e. :

$$\forall n \geq n_0, \quad \forall p \geq 0, \quad \|(x_{n+p} - x) - (x_n - x)\| \leq \alpha_n \varepsilon \leq \alpha \varepsilon.$$

On en déduit que $(x_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans E.

2. *En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers l'unique solution $p_C(x)$ du problème :*

$$p_C(x) \in C \quad \textit{et} \quad \|x - p_C(x)\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

Comme E est complet, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite $u \in \overline{C} = C$. Par continuité de la norme :

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = \|u - x\| = \inf_{y\in C} \|x - y\|.$$

Soit $u' \in E$ solution de

$$u' \in C \quad \text{et} \quad \|u' - x\| = \inf_{y\in C} \|x - y\|.$$

On a

$$\frac{1}{\alpha}\|u - x\| = \frac{1}{\alpha}\|u' - x\| = 1$$

et par convexité de C :

$$\frac{1}{2}(u + u') \in C \Rightarrow \left\| x - \frac{1}{2\alpha}(u + u') \right\| \geq 1$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par uniforme convexité de E, on en déduit que

$$\frac{1}{\alpha}\|u - u'\| = \frac{1}{\alpha}\|(u - x) - (u' - x)\| \leq \varepsilon$$

i.e. : $\|u - u'\| \leq \alpha\varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, il en résulte que $u' = u$ et que u est l'unique solution, notée $p_C(x)$ du problème :

$$p_C(x) \in C \quad \text{et} \quad \|x - p_C(x)\| = \inf_{y\in C} \|x - y\|.$$

3. *Montrer que*

$$\forall x, x' \in E, \quad \|x - p_C(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\| + \left\| \frac{1}{2}(x + x') - p_C\left(\frac{x + x'}{2}\right) \right\|$$

Soit $x, x' \in E$. On a : $\forall y \in C$,

$$\|x - y\| \leq \left\| x - \frac{x + x'}{2} \right\| + \left\| \frac{x + x'}{2} - y \right\| = \frac{1}{2}\|x - x'\| + \left\| \frac{x + x'}{2} - y \right\|$$

donc : $\forall y \in C$,

$$\|x - p_C(x)\| \leq \|x - y\| \leq \left\| x - \frac{x + x'}{2} \right\| + \left\| \frac{x + x'}{2} - y \right\| = \frac{1}{2}\|x - x'\| + \left\| \frac{x + x'}{2} - y \right\|$$

$$\Rightarrow \|x - p_C(x)\| - \frac{1}{2}\|x - x'\| \leq \left\| \frac{x + x'}{2} - p_C\left(\frac{x + x'}{2}\right) \right\|$$

4. *Soit $x, x' \in E$. On suppose que $\|x' - p_C(x')\| \leq \|x - p_C(x)\| =: \alpha$. Montrer que*
$$\frac{1}{2\alpha}\|x + x' - p_C(x) - p_C(x')\| \geq 1 - \frac{\|x - x'\|}{2\alpha}.$$

   Par convexité de C : $\frac{1}{2}(p_C(x) + p_C(x')) \in C \Rightarrow$
$$\left\|\frac{x+x'}{2} - \frac{1}{2}(p_C(x) + p_C(x'))\right\| \geq \left\|\frac{x+x'}{2} - p_C\left(\frac{x+x'}{2}\right)\right\| \geq \|x - p_C(x)\| - \frac{1}{2}\|x - x'\|$$
$$= \alpha - \frac{1}{2}\|x - x'\|$$

   Il en résulte :
$$\frac{1}{2\alpha}\|x + x' - p_C(x) - p_C(x')\| \geq 1 - \frac{\|x - x'\|}{2\alpha}.$$

5. *Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une constante $\eta > 0$ t.q., avec les notations de 4.,*
$$\|x - x'\| \leq \eta \Rightarrow \|p_C(x) - p_C(x')\| \leq \alpha\varepsilon + \|x - x'\|.$$

   Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ associé à l'uniforme convexité de E.
   Soit $x, x' \in E$ t.q. $\|x - x'\| < 2\alpha\delta$. Alors
$$\frac{1}{2\alpha}\|(x - p_C(x)) + (x' - p_C(x'))\| \geq 1 - \frac{\|x - x'\|}{2\alpha} > 1 - \delta \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\|x - p_C(x) - (x' - p_C(x'))\| \leq \varepsilon.$$

   On en déduit :
$$\|p_C(x) - p_C(x')\| \leq \alpha\varepsilon + \|x - x'\|$$

6. *Montrer que :*
$$\forall x, x' \in E, \quad |\|x - p_C(x)\| - \|x' - p_C(x')\|| \leq \|x - x'\|.$$

   On a : $\forall y \in C$,
$$\|x - p_C(x)\| \leq \|x - y\| \leq \|x - x'\| + \|x' - y\|$$
$$\Rightarrow \|x - p_C(x)\| \leq \|x - x'\| + \|x' - p_C(x')\|$$

   En échangeant les rôles de x et x', on obtient de même :
$$\|x' - p_C(x')\| \leq \|x - x'\| + \|x - p_C(x)\|.$$

   Il en résulte :
$$\|x - p_C(x)\| \leq \|x - y\| \leq \|x - x'\| + \|x' - y\|$$

7. *En déduire que p_C est continue sur E.*
   Soit $x, x' \in E$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ associé à ε dans 5.. On pose $\alpha = \|x - p_C(x)\|$. Soit $r > 0$. De 6. on déduit que
   $$\|x - x'\| < r \Rightarrow \|x' - p_C(x')\| < r + \|x - p_C(x)\| = r + \alpha.$$
   Soit $\eta_0 = \min(\eta, r, \varepsilon)$. Alors :
   $$\|x - x'\| < \eta_0 \Rightarrow \|p_C x) - p_C(x')\| \leq (\alpha + r)\varepsilon + \|x - x'\| < (\alpha + r + 1)\varepsilon.$$
   i.e. p_C est continue en x. Ceci étant vrai $\forall x \in E$, il en résulte que p_C est continue sur E.
8. *En déduire que p_C est uniformément continue sur les bornés de E.*
   Soit B un ensemble borné de E. Soit $x_0 \in B$. Il existe $R > 0$ t.q. $B \subset B(x_0, R)$. On a : $forallx \in B$, $\forall y \in C$,
   $$\|x - p_C(x)\| \leq \|x - y\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0 - y\| \leq R + \|x_0 - y\|.$$
   Il en résulte, par définition de la borne inférieure :
   $$\|x - p_C(x)\| - R \leq \|x_0 - p_C(x_0)\|$$
   i.e.
   $$\sup_{x \in B} \| - p_C(x)\| \leq R + \|x_0 - p_C(x_0)\| < +\infty.$$
   Soit $\varepsilon > 0$. Le même raisonnement que dans 6. avec α remplacé par $\alpha_0 := R + \|x_0 - p_C(x_0)\|$ montre qu'il existe $\eta >$ t.q. :
   $$\forall x, x' \in B, \quad \|x - x'\| < \eta \Rightarrow \|p_C(x) - p_C(x')\| \leq \alpha_0 \varepsilon + \|x - x'\|.$$
   Soit $\eta_0 := \min(\eta, \varepsilon)$. Alors : $\forall x, x' \in B$,
   $$\|x - x'\| < \eta_0 \Rightarrow \|p_C(x) - p_C(x')\| \leq (\alpha_0 + 1)\varepsilon.$$
   Comme $\varepsilon >$ est arbitraire, on en déduit que C est uniformément continue sur B.

Exercice 3

Soit H un espace de Hilbert et soit $(K_n)_{n \geq 0}$ une suite de convexes fermés non vides de H. Soit $f \in H$. On pose $u_n = p_{K_n} f$, $\forall n \geq 0$.

1. *On suppose que la suite $(K_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et que $\cap_{n \geq 0} K_n \neq \emptyset$.*
   (a) *Montrer que la suite de terme général $\|u_n - f\|$ est croissante, majorée par $\|x - f\|$, $\forall x \in \cap_{n \geq 0} K_n$.*
   Soit $x \in \cap_{n \geq 0} K_n$. Alors : $\forall n \geq 0$,
   $$x \in K_n \Rightarrow \|u_n - f\| = \inf_{y \in K_n} \|y - f\| \leq \|x - f\|.$$
   De même :
   $$u_{n+1} \in K_{n+1} \subset K_n \Rightarrow \|u_n - f\| = \inf_{y \in K_n} \|y - f\| \leq \|u_{n+1} - f\|.$$

(b) *Montrer que :*

$$\forall n, p \geq 0, \quad \|u_{n+p} - u_n\|^2 \leq 2\|u_{n+p} - f\|^2 - 2\|u_n - f\|^2.$$

Soit $n, p \geq 0$. On a

$$\|u_{n+p}-f-(u_n-f)\|^2+\|u_{n+p}-f+(u_n-f)\|^2 = 2\|u_{n+p}-f\|^2+2\|u_n-f\|^2$$

$$\iff \|u_{n+p}-u_n\|^2+\|u_{n+p}+u_n-2f\|^2 = 2\|u_{n+p}-f\|^2+2\|u_n-f\|^2$$

avec

$$u_{n+p} \in K_{n+p} \subset K_n$$

et

$$u_n \in K_n$$

$$\frac{1}{2}(u_{n+p}+u_n) \in K_n \Rightarrow \left\|\frac{1}{2}(u_{n+p}+u_n)-f\right\|^2 \geq \|u_n-f\|^2 = \inf_{y \in K_n} \|y-f\|^2$$

$$\frac{1}{2}(u_{n+p}+u_n) \in K_n \Rightarrow \|u_{n+p}+u_n-2f\|^2 = 4\left\|\frac{1}{2}(u_{n+p}+u_n)-f\right\|^2 \geq 4\|u_n-f\|^2$$

donc

$$\begin{aligned}\|u_{n+p}-u_n\|^2 &\leq 2\|u_{n+p}-f\|^2+2\|u_n-f\|^2-4\|u_n-f\|^2 \\ &= 2\|u_{n+p}-f\|^2-2\|u_n-f\|^2.\end{aligned}$$

(c) *En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite de la forme $p_K f$ où K est un convexe fermé à préciser.*
Si $a_n \leq b_n$ avec $b_n \to b$ alors $\limsup_{n\to+\infty} a_n \leq b$.
D'après (a), la suite de terme général $\|u_n - f\|$ converge donc :

$$\lim_{p\to+\infty} 2\|u_p-f\|^2 - \lim_{n\to+\infty} 2\|u_n-f\|^2 = 0$$

et $\|u_p - u_n\|^2 \geq 0$ $\forall n, p \geq 0$. Du Théorème des gendarmes on déduit que

$$\lim_{n,p\to+\infty} \|u_p-u_n\|^2 = 0$$

i.e. que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans H, donc convergente vers une limite $u \in H$. On remarque que : $\forall n, p \geq 0$, $u_{n+p} \in K_{n+p} \subset K_n$ donc $u \in \overline{K}_n = K_n$, i.e. $u \in K := \cap_{n\geq 0} K_n$. De plus, K est un convexe fermé comme intersection de convexes fermés et d'après (a) :

$$u \in K \quad \text{et} \quad \forall x \in K, \quad \|u-f\| = \lim_{n\to+\infty} \|u_n-f\| \leq \|x-f\|$$

i.e. $u = p_K f$.

2. *On suppose que la suite $(K_n)_{n\geq 0}$ est croissante.*

(a) *Montrer que $K = \overline{\cup_{n\geq 0} K_n}$ est un convexe fermé.*

Soit $x, y \in \cup_{n\geq 0} K_n$ et soit $t \in [0,1]$. Par définition de $\cup_{n\geq 0} K_n$, il existe $n_x, n_y \geq 0$ t.q. $x \in K_{n_x}$ et $y \in K_{n_y}$. Soit $n_0 = \max(n_x, n_y)$. Alors $x \in K_{n_0}$ et $y \in K_{n_0}$ avec K_{n_0} convexe donc $tx + (1-t)y \in K_{n_0} \subset \cup_{n\geq 0} K_n$. Donc $\cup_{n\geq 0} K_n$ est convexe. Soit alors $x, y \in \overline{\cup_{n\geq 0} K_n}$ et soit $t \in [0,1]$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de l'adhérence, il existe $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in \cup_{n\geq 0} K_n$ t.q. $\|x_\varepsilon - x\| < \varepsilon$ et $\|y_\varepsilon - y\| < \varepsilon$.
Alors $tx_\varepsilon + (1-t)y_\varepsilon \in \cup_{n\geq 0} K_n$ par convexité de $\cup_{n\geq 0} K_n$. De plus

$$\begin{aligned}\|tx + (1-t)y - (tx_\varepsilon + (1-t)y_\varepsilon)\| &\leq t\|x_\varepsilon - x\| + (1-t)\|y_\varepsilon - y\| \\ &< t\varepsilon + (1-t)\varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$

i.e. $tx_\varepsilon + (1-t)y_\varepsilon \in B(tx + (1-t)y, \varepsilon)$. Donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(tx + (1-t)y, \varepsilon) \cap (\cup_{n\geq 0} K_n) \neq \emptyset$$

i.e. $tx + (1-t)y \in \overline{\cup_{n\geq 0} K_n}$. Finalement, $\overline{\cup_{n\geq 0} K_n}$ est convexe. Il est fermé par définition de l'adhérence.

(b) *Montrer que la suite de terme général $\|u_n - f\|$ converge.*

Soit $n \geq 0$. Par hypothèse, $K_n \subset K_{n+1}$. On en déduit :

$$u_n \in K_n \subset K_{n+1} \Rightarrow \|u_{n+1} - f\| = \inf_{y \in K_{n+1}} \|y - f\| \leq \|u_n - f\|.$$

On en déduit que la suite de terme général $\|u_n - f\|$ est décroissante, minorée par 0, donc convergente.

(c) *Montrer que :*

$$\forall n, p \geq 0, \quad \|u_{n+p} - u_n\|^2 \leq 2\|u_n - f\|^2 - 2\|u_{n+p} - f\|^2.$$

Soit $n, p \geq 0$. On a

$$\|u_{n+p} - u_n\|^2 = 2\|u_n - f\|^2 + 2\|u_{n+p} - f\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(u_n + u_{n+p}) - f\right\|^2$$

avec $u_n \in K_n \subset K_{n+p}$, donc, par convexité de K_{n+p} :

$$\frac{1}{2}(u_n + u_{n+p}) \in K_{n+p} \Rightarrow \left\|\frac{1}{2}(u_n + u_{n+p}) - f\right\| \geq \|u_{n+p} - f\|$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned}\|u_{n+p} - u_n\|^2 &\leq 2\|u_n - f\|^2 + 2\|u_{n+p} - f\|^2 - 4\|u_{n+p} - f\|^2 \\ &= 2\|u_n - f\|^2 - 2\|u_{n+p} - f\|^2\end{aligned}$$

(d) *En déduire que la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *converge vers* $p_K f$.

De (b), on déduit que

$$2\lim_{n\to+\infty}\|u_n - f\|^2 - 2\lim_{p\to+\infty}\|u_p - f\|^2 = 0.$$

Comme de plus $\|u_p - u_n\| \geq 0$, $\forall n, p \geq 0$, on déduit du Théorème des gendarmes que

$$\lim_{n,p\to+\infty}\|u_p - u_n\| = 0,$$

i.e. que la suite $(u_n)_{n\geq})$ et de Cauchy dans H complet donc convergente vers une limite $u \in H$ et $u_n \in K$, $\forall n \geq 0$, donc $u \in \overline{K} = K$ comme limite d'une suite d'éléments de K. De (b), on déduit aussi que :

$$\forall n, p \geq 0, \quad \|u_{n+p} - f\| \leq \|u_n - f\|.$$

Donc, quand $p \to +\infty$:

$$\forall n \geq 0, \quad \|u - f\| \leq \|u_n - f\|$$

Soit $x \in \cup_{n\geq 0} K_n$. Il existe $n_0 \geq 0$ t.q. $x \in K_{n_0}$. Alors :

$$\forall n \geq n_0, \quad x \in K_n \Rightarrow \|u - f\| \leq \|u_n - f\| \leq \|x - f\|.$$

Si $x \in K$, il existe une suite $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ t.q. $x_\varepsilon \in \cup_{n\geq 0} K_n$ et

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \|x_\varepsilon - x\| < \varepsilon.$$

Alors : $\forall \varepsilon > 0$, $\|u - f\| \leq \|x_\varepsilon - f\|$. Quand $\varepsilon \to 0$: $x_\varepsilon \to x$ donc $\|u - f\| \leq \|x - f\|$. Finalement :

$$u \in K \quad \text{et} \quad \forall x \in K, \quad \|u - f\| \leq \|x - f\| \Rightarrow u = p_K f.$$

(e) *Soit* $\varphi : H \to \mathbb{R}$ *une application continue et bornée inférieurement. On pose :* $\forall n \geq 0$, $c_n = \inf_{K_n} \varphi$. *Montrer que la suite* $(c_n)_{n\geq 0}$ *converge. Identifier sa limite.*

On a : $\forall n \geq 0$, $K_n \subset K_{n+1} \subset K \Rightarrow c_n \geq c_{n+1} \geq \inf_K \varphi$. La suite $(c_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée donc convergente vers une limite $c \geq \inf_K \varphi$.

Soit $f \in H$. On a : $\forall n \geq 0$, $u_n = p_{K_n} f \in K_n \Rightarrow \varphi(u_n) \geq c_n$. De (d), on déduit que

$$\varphi(p_K f) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(u_n) \geq c.$$

En particulier : $\forall f \in K$, $\varphi(f) = \varphi(p_K f) \geq c$. Donc $c \leq \inf_K \varphi$. Finalement : $c = \inf_K \varphi$.

Exercice 4

Soit E un espace de Hilbert et soit $T \in E'$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \|x\|^2 - T(x).$$

1. *Montrer que f est bornée inférieurement sur E et que cette borne est atteinte sur E.*

   On remarque que $T \in E' \Rightarrow |T(x)| \leq \|T\|\|x\|$, $\forall x \in E$ donc

   $$\forall x \in E, \quad f(x) \geq \|x\|^2 - \|T\|\|x\| = \left(\|x\| - \frac{\|T\|}{2}\right)^2 - \frac{\|T\|^2}{4} \geq -\frac{\|T\|^2}{4}$$

   Soit $u \in H$ t.q. $T(x) = \langle x, u\rangle$, $\forall x \in H$. On a

   $$f(x) = \|x\|^2 - \langle x, u\rangle = \left\|x - \frac{u}{2}\right\|^2 - \frac{\|u\|^2}{4} \geq -\frac{\|u\|^2}{4} = f\left(\frac{u}{2}\right).$$

2. *Soit $a \in E$ t.q. $f(a) = \inf_E f$. Soit C un convexe fermé. Montrer que*

   $$\inf_C f = f(p_C(a)).$$

   .

   On a :

   $$\inf_C f(x) = \inf_{x\in C} \left\|x - \frac{u}{2}\right\|^2 - \frac{\|u\|^2}{4} = \left\|p_C\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{u}{2}\right\|^2 - \frac{\|u\|^2}{4} = f\left(p_C\left(\frac{u}{2}\right)\right).$$

Exercice 5

Soit $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soit $p \in]1, +\infty[$. On suppose que :

$$\forall x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^p, \quad \sum_{n\geq 0} |a_n||x_n| < +\infty.$$

Montrer que $a \in \ell^{p'}$.

On pose :

$$\forall x \in \ell^p, \quad \forall n \geq 0, \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_k.$$

Soit $n \geq 0$. On note $a^{(n)} \in \ell^{p'}$ la suite définie par

$$a_k^{(n)} = \begin{cases} a_k & \text{si} \quad k \leq n, \\ 0 & \text{si} \quad k > n. \end{cases}$$

Par hypothèse :

$$\forall x \in \ell^p, \quad |T_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k||x_k| \leq \|a^{(n)}\|_{p'} \|x\|_p$$

donc $T_n \in (\ell^p)'$ et $\|T_n\| \leq \|a^{(n)}\|_{p'}$. Le choix

$$x_k = \begin{cases} |a_k|^{p'}/a_k & \text{si} \quad a_k \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad a_k = 0, \end{cases}$$

conduit à

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x_k a_k = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^{p'} = \|a^{(n)}\|_{p'}^{p'}.$$

De plus :

$$\forall k \geq 0, \quad |x_k|^p = |a_k|^{(p'-1)p} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \iff p' = p(p'-1)$$

$$\Rightarrow |x_k|^p = |a_k|^{(p'-1)p} = |a_k|^{p'}$$

On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^{p'} \iff \|x\|_p^p = \|a^{(n)}\|_{p'}^{p'}$$

On reporte :

$$\frac{T_n(x)}{\|x\|_p} = \frac{\|a^{(n)}\|_{p'}^{p'}}{\|a^{(n)}\|_{p'}^{p'/p}} = \|a^{(n)}\|_{p'}^{p'(1-1/p)} = \|a^{(n)}\|_{p'}.$$

donc $\|T_n\| = \|a^{(n)}\|_{p'}$. Par hypothèse :

$$\forall x \in \ell^p, \quad \sup_{n \geq 0} |T_n(x)| \leq \sum_{k \geq 0} |a_k||x_k| < +\infty.$$

Du Théorème de Banach-Steinhaus, on déduit que

$$\sup_{n \geq 0} \|T_n\| < +\infty$$

avec

$$\sup_{n \geq 0} \|T_n\| = \sup_{n \geq 0} \|a^{(n)}\|_{p'} = \|a\|_{p'}$$

donc $a \in \ell^{p'}$.

Exercice 6

Soit à résoudre : trouver $u : [0,T] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto u(t,x)$, *solution de*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(t,0) = u(t,1) = 0, \tag{1}$$

1. *Montrer que u se prolonge sur $[0,T]\times[-1,1]$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ impaire en $x\in[-1,1]$.*

   On pose :

$$\forall (t,x)\in[0,T]\times[-1,1],\quad \tilde{u}(t,x)=\left\{\begin{array}{ll} u(t,x) & \text{si} x\in[0,1],\\ -u(t,-x) & \text{si} x\in[-1,0],\end{array}\right.$$

   Par construction ,

$$\forall t\in[0,T],\quad \lim_{x=0^-}\tilde{u}(t,x)=-\lim_{x=0^+}u(t,-x)=0=\tilde{u}(t,0).$$

   donc $\tilde{u}\in\mathcal{C}([0,T]\times[0,1])$. De plus :

$$\forall (t,x)\in[0,T]\times[-1,0],\quad \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}(t,x)=\frac{\partial u}{\partial x}(t,-x)$$

   donc

$$\forall t\in[0,T],\quad \lim_{x=0^-}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}(t,x)=\lim_{x=0^+}\frac{\partial u}{\partial x}(t,-x)=\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=\lim_{x=0^+}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}(t,x)$$

   i.e. $\tilde{u}(t,\cdot)\in\mathcal{C}^1([-1,1])$.

2. *Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de solutions de (1) de la forme $u_n(t,x)=\phi_n(t)v_n(x)$ où v_n peut être explicité dans la restriction à $[0,1]$ d'une base hilbertienne de $L^2([-1,1],\mathbb{C})$, $\forall n\geq 1$.*

   On cherche des solutions u sous la forme $u(t,x)=\phi(t)v(x)$. Alors, si $u(t,x)\neq 0$:

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)}=\frac{v''(x)}{v(x)}=cste=\lambda\in\mathbb{R}.$$

   Rappel :

$$y''(x)+ay'(x)+by(x)=0$$

   Equation caractéristique : $r^2+ar+b=0$. Si r_1 et r_2 sont les racines alors

$$y=\alpha e^{r_1x}+\beta e^{r_2x},\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

   On en déduit que v est solution de

$$v''-\lambda v=0,\quad v(0)=v(1)=0$$

   d'équation caractéristique $r^2-\lambda=0$. Si $\lambda=\omega^2\geq 0$ avec $\omega\geq 0$, alors $v(x)=\alpha e^{\omega x}+\beta e^{-\omega x}$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ solution du système linéaire :

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 1\\ e^{\omega} & e^{-\omega}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\alpha\\ \beta\end{array}\right)=0$$

   de déterminant $e^{-\omega}-e^{\omega}=-2\sinh\omega$. Si $\omega>0$, alors $\alpha=\beta=0$ est l'unique solution. Sinon, $\omega=0\Rightarrow v=cste=0$. Donc u est solution non nulle ssi $\lambda=-\omega^2$ avec $\omega>0$. Alors

$$v(x)=\alpha e^{i\omega x}+\beta e^{-i\omega x},\quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}.$$

avec

$$v(0) = v(1) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha + \beta & = & 0, \\ \alpha e^{i\omega} + \beta e^{-i\omega} & = & 0. \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\omega} & e^{-i\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0.$$

On obtient un système linéaire de déterminant $D = 2i \sin \omega$. Alors

$$(\alpha, \beta) \neq (0,0) \iff \sin \omega = 0 \iff \omega \in \pi \mathbb{N}^*.$$

On pose

$$\omega_n = n\pi, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

Soit $n \geq 1$. On a :

$$\forall x \in [0,1], \quad v_n(x) = \alpha_n e^{in\pi x} + \beta_n e^{-in\pi x},$$

avec :

$$v_n(0) = \alpha_n + \beta_n, \quad v_n(1) = (-1)^n(\alpha_n + \beta_n)$$

donc $v_n 0) = v_n(1) = 0 \iff \alpha_n + \beta_n = 0$. On en déduit :

$$v_n(x) = a_n(e^{in\pi x} - e^{-in\pi x}) = 2i\alpha_n \sin(n\pi x),$$

où $\alpha_n \in \mathbb{C}$ est arbitraire. Soit $\lambda_n = -\omega_n^2 = -n^2\pi^2$, $\forall n \geq 1$. On a

$$\phi' = -n^2\pi^2\phi_n \iff \phi_n(t) = c_n e^{-n^2\pi^2 t}, \quad \forall t \in [0,1].$$

Alors

$$u_n(t,x) = \phi_n(t) v_n(x) = C_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

avec $C_n \in \mathbb{R}$ arbitraire. On pose $C_n = 1$. Dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^2([-1,1], \mathbb{C})$ définie par

$$e_n(x) = e^{in\pi x}, \quad \forall x \in [0,1], \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

$(v_n)_{n\geq 1}$ se décompose sous la forme :

$$v_n = \frac{1}{2i}(e_n - e_{-n}), \quad \forall n \geq 1.$$

3. *Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une base hilbertienne de $L^2([-1,1], \mathbb{C})$. On pose :*

$$\forall n \geq 0, \quad f_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n + e_{-n}), \quad f_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n - e_{-n}).$$

Montrer que la famille $(f_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2([-1,1], \mathbb{C})$.

Soit $n, k \geq 0$, $n \neq k$. On a

$$\langle e_n + e_{-n}, e_k \pm e_{-k} \rangle = \langle e_n, e_k \rangle \pm \langle e_n, e_{-k} \rangle + \langle e_{-n}, e_k \rangle \pm \langle e_{-n}, e_{-k} \rangle = 0$$

donc $(v_n)_{n\geq 0}$ est orthogonale. Par construction $\|e_n\|_2 = 1$, $\forall n \geq 0$.
De plus :

$$\mathrm{Vect}\{v_n,\ n \geq 0\} = \mathrm{Vect}\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$$
$$\Rightarrow \overline{\mathrm{Vect}\{v_n,\ n \geq 0\}} = \overline{\mathrm{Vect}\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}} = L^2([0,1],\mathbb{C}).$$

Donc $(f_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2([-1,1],\mathbb{C})$.

4. *En déduire que la solution générale de (1) s'écrit :*

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin(\pi n x), \quad \textit{p.p. dans } [0,T]\times[0,1].$$

où $(\alpha_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
On remarque que $\forall t \in [0,T]$, $u(t,\cdot) \in \mathcal{C}^1([0,1]) \subset L^2([0,1])$. Par définition des bases hilbertiennes :

$$\tilde{u} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \tilde{u}(t,\cdot), e_n\rangle e_n.$$

avec $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle \tilde{u}(t,\cdot), e_n\rangle|^2 = \|\tilde{u}(t,\cdot)\|^2 < +\infty$, $\forall t \in [0,T]$. De plus, le calcul direct donne :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \langle \tilde{u}(t,\cdot), e_n\rangle = -\langle \tilde{u}(t,\cdot), e_{-n}\rangle \Rightarrow \langle \tilde{u}(t,\cdot), e_n + e_{-n}\rangle = 0$$

i.e. $\langle \tilde{u}(t,\cdot), f_{2n}\rangle = 0$, $\forall n \geq 0$. Il en résulte :

$$\tilde{u} = \sum_{n\geq 1} \langle \tilde{u}(t,\cdot), f_{2n+1}\rangle f_{2n+1}.$$

avec

$$\langle \tilde{u}(t,\cdot), f_{2n+1}\rangle = 2\int_0^1 u(t,\cdot) f_{2n+1}(x)dx.$$

Soit $n \geq 0$. On a $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R})$ et

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) f_{2n+1}((x)\right| \leq \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|_\infty |f_{2n+1}(x)|$$

car $\frac{\partial u}{\partial t}$ est continue donc uniformément bornée sur le compact $[0,T]\times[0,1]$. Comme $f_{2n+1}|_{[0,1]} \in L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$, on déduit du Théorème de convergence dominée que

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} f_{2n+1} dx = \frac{d}{dt}\int_0^1 u f_{2n+1} dx.$$

De plus, en intégrant par parties :

$$\langle \frac{\partial u}{\partial t}, f_{2n+1}\rangle = \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, f_{2n+1}\rangle \underset{v_{2n+1}(0)=f_{2n+1}(1)=0}{=} -\langle \frac{\partial u}{\partial x}, f'_{2n+1}\rangle$$

$$\underset{u(t,0)=u(t,1)=0}{=} \langle u, f''_{2n+1}\rangle = -(n\pi)^2\langle u, f_{2n+1}\rangle$$

i.e.

$$\langle u, f_{2n+1}\rangle' = -(n\pi)^2\langle u, f_{2n+1}\rangle \Rightarrow \langle u, f_{2n+1}\rangle = C_n e^{-n^2\pi^2 t}, \quad C_n \in \mathbb{C}$$

$$f_{2n+1} = i\sqrt{2}v_{2n+1} \Rightarrow u = \sum_{n\geq 1} C_n e^{-n^2\pi^2 t} f_{2n+1} = \sum_{n\geq 1} \alpha_n e^{-n^2\pi^2 t} v_{2n+1}, \quad \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

5. *Résoudre (1) lorsque u vérifie en outre la condition initiale :* $u(0,x) = x^2$ *sur* $[0,1]$.
   On a : $\forall t \in [0,T]$, $\forall n \geq 0$,
   $$0 < e^{-n^2\pi^2 T} \leq e^{-n^2\pi^2 t} \leq 1 \Rightarrow 0 < \alpha_n^2 e^{-2n^2\pi^2 T} \leq \alpha_n^2 e^{-2n^2\pi^2 t} \leq \alpha_n^2$$
   et $\sum_{n\geq 0} \alpha_n^2 < +\infty$. On en déduit que la série de fonctions $t \mapsto \alpha_n^2 e^{-2n^2\pi^2 t} v_{2n+1}$ converge uniformément sur $[0,T]$ dans $L^2([0,1])$ donc est continue sur $[0,T]$ pour la norme de $L^2([0,1])$. On en déduit que
   $$u(t,\cdot) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n e^{-n^2\pi^2 t} v_{2n+1} \underset{t\to 0}{\to} \sum_{n\geq 0} \alpha_n v_{2n+1}$$
   i.e. $\forall x \in [0,1]$,
   $$u(0,x) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n v_{2n+1}(x) = x^2.$$
   On en déduit que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ coïncide avec la suite des coefficients de Fourier de $\phi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ prolongement impair à $[-1,1]$ de $x \mapsto x^2$, i.e. :
   $$\alpha_n = \sqrt{2}\int_0^1 x^2 \sin(n\pi x)dx = \sqrt{2}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + 2\frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^3}((-1)^n - 1)\right).$$

6. *Résoudre (1) dans le cas d'une condition initiale* $u(0,x) = f(x)$ *sur* $[0,1]$ *avec* $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$.
   On commence par remarquer que f dit vérifier la relation de compatibilité : $f(0) = u(0,0) = 0$. Le même raisonnement montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ coïncide avec la suite des coefficients de Fourier de $\phi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ prolongement impair à $[-1,1]$ de f.

Exercice 7

1. *Soit* $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-|x|}$. *Montrer que* K *admet une transformée de Fourier. Calculer* $\hat{K}$.
   Dans la suite on considère le problème : $y'' - y = f$ *dans* $\mathbb{R}$.
   On a
   $$\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 2 < +\infty$$

donc $K \in L^1(\mathbb{R})$. On en déduit que $\hat{K}$ est bien définie. On a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{K}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} e^{-|x|} dx$$

$$= \frac{1}{1+2i\pi\xi} + \frac{1}{1-2i\pi\xi} = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$$

2. *On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ t.q. : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $p_{\alpha,\beta}(g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha g^{(\beta)}(x)| < +\infty$. On suppose que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

   (a) *On suppose que $y \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que*

   $$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{y}(\xi) = -\frac{\hat{f}(\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}.$$

   $y \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}$ est bien défini. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} x^2|f(x)| < +\infty$ donc $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $y'' = y + f \in L^1(\mathbb{R})$. On en déduit :

   $$\widehat{y''} - \hat{y} = \hat{f}$$

   avec

   $$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{y''}(\xi) = (2i\pi\xi)^2 \hat{f}(\xi) = -4\pi^2\xi^2\hat{y}(\xi),$$

   donc

   $$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad -(1+4\pi^2\xi^2)\hat{y}(\xi) = \hat{f}(\xi) \iff \hat{y}(\xi) = -\frac{\hat{f}(\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}.$$

   (b) *En déduire qu'il existe une unique solution $y \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*
   On remarque que $f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. On en déduit que

   $$\lim_{|\xi|\to+\infty} \frac{\hat{f}(\xi)}{1+4\pi^2\xi^2} = 0$$

   De plus $\xi \mapsto \frac{\hat{f}(\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}$ est continue comme produit et composée d'applications continues donc $\xi \mapsto \frac{\hat{f}(\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}$ est dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. On en déduit qu'il existe un unique $y \in L^1(\mathbb{R})$ solution de

   $$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{y}(\xi) = -\frac{\hat{f}(\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}.$$

   D'après 1.,

   $$\hat{y} = -\frac{1}{2}\hat{K}\hat{f} = -\frac{1}{2}\widehat{K \star f}$$

   avec

   $$\int_{\mathbb{R}} |K\star f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} K(x-t)f(t)dt \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |K(x-t)||f(t)| dt dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |K(x-t)||f(t)|dxdt = \|K\|_1 \|f\|_1 < +\infty$$

donc $K \star f \in L^(\mathbb{R})$. Comme $L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, $g \mapsto \hat{g}$ est injective, on en déduit que $y = -\frac{1}{2} K \star f$. De plus : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\forall k, m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow (x^k f)^{(m)} \in L^1(\mathbb{R})$. D'après le Théorème de convergence dominée :

$$\xi^m \hat{f}^{(k)}(\xi) = (-1)^k (2i\pi)^{k-m} \widehat{(x^k f)^{(m)}}(\xi)$$

donc $\widehat{(x^k f)^{(m)}}(\xi) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On en déduit que $\hat{y} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Le même raisonnement montre que $\hat{y} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{\hat{y}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, i.e. $x \mapsto y(-x)$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On en déduit que $y \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

3. *On suppose que $f \in L^2(\mathbb{R})$.*

   (a) *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\xi \mapsto -\frac{\hat{f}(\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}$. Montrer que l'équation $\hat{y} = g$ admet une unique solution y dans $L^2(\mathbb{R})$.*

   On a $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $|g(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi)|$ et $f \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ donc $g \in L^2(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est une bijection, on en déduit qu'il existe $y \in L^2(\mathbb{R})$ unque t.q. $\hat{y} = g$.

   (b) *Montrer que : $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, $\quad \int_{\mathbb{R}} y(x)(\varphi''(x) - \varphi(x))dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$.*

   Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. On intègre deux fois par parties :

$$\int_{\mathbb{R}} y(x)(\varphi''(x) - \varphi(x))dx \underset{\varphi'(0)=\varphi'(1)=0}{=} -\int_{\mathbb{R}} y'\varphi' dx - \int_{\mathbb{R}} y\varphi dx$$

$$\underset{\varphi(0)=\varphi(1)=0}{=} \int_{\mathbb{R}} y''\varphi dx - \int_{\mathbb{R}} y\varphi dx = \int_{\mathbb{R}} (y'' - y)\varphi dx = \int_{\mathbb{R}} f\varphi dx$$

   (c) *En déduire qu'il existe $y'' \in L^2(\mathbb{R})$ t.q. $y'' - y = f$.*

   Par densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, on déduit que $y'' - y \in L^2(\mathbb{R})$ et que $y'' - y = f$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Alors $y \in L^2(\mathbb{R})$ et $f \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow y'' = y + f \in L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 8

Soit H un espace de Hilbert. Soit $S \in \mathcal{L}(H)$ t.q. $S^* = S$ et $\langle Su, u \rangle \in \mathbb{R}^+$, $\forall u \in H$.

1. *Montrer que* $\mathrm{Ker}(S) = \mathrm{Im}(S)^\perp$.

   Soit $u \in \mathrm{Ker}(S)$ et soit $v \in H$. On a :

$$0 \leq \langle S(u+v), u+v \rangle = \langle S(v), u+v \rangle = \langle S(v), u \rangle + \langle S(v), v \rangle.$$

   On en déduit, en remplaçant $v \in H$ par $tv \in H$ avec $t > 0$:

$$0 \leq t\langle S(v), u \rangle + t^2 \langle S(v), v \rangle \underset{t>0}{\iff} 0 \leq \langle S(v), u \rangle + t\langle S(v), v \rangle.$$

Quand $t \to 0^+$, on obtient : $\langle S(v), u\rangle \geq 0$. Ceci est vrai quand $v \in H$ est remplacé par $-v \in H$. Il en résulte : $\langle S(v), u\rangle = 0$, $\forall v \in H$, i.e $u \in \mathrm{Im}(S)^\perp$.
Inversement soit $u \in \mathrm{Im}(S)^\perp$ et soit $v \in H$. On a

$$0 \leq \langle S(u+v), u+v\rangle = \langle S(u+v), v\rangle = \langle S(u), v\rangle + \langle S(v), v\rangle$$

On en déduit, en remplaçant $v \in H$ par $tv \in H$ avec $t > 0$:

$$0 \leq t\langle S(u), v\rangle + t^2\langle S(v), v\rangle \underset{t>0}{\iff} 0 \leq \langle S(u), v\rangle + t\langle S(v), v\rangle.$$

Quand $t \to 0^+$, on obtient : $\langle S(u), v\rangle \geq 0$. Ceci est vrai quand $v \in H$ est remplacé par $-v \in H$. Il en résulte : $\langle S(u), v\rangle = 0$, $\forall v \in H$, i.e $u \in \mathrm{Ker}(S)$.

2. *Déduire du Théorème de Lax-Milgram que $I + tS$ est bijectif, $\forall t > 0$.*
Soit $t > 0$. On pose : $\forall u, v \in H$, $f_t(u, v) = \langle u + tS(u), v\rangle$. On remarque que f_t est linéaire à gauche par linéarité de S. On a

$$\forall u, v \in H, \quad f_t(u, v) = \langle u, v\rangle + t\langle S(u), v\rangle$$

avec,

$$\langle S(u), v\rangle \underset{S=S^*}{=} \langle u, S(v)\rangle = \overline{\langle S(v), u\rangle}$$

$$\Rightarrow f_t(u, v) = \overline{\langle v, u\rangle} + t\overline{\langle S(v), u\rangle} \underset{t\in\mathbb{R}}{=} \overline{f_t(v, u)}.$$

$$f_t(u, \lambda v) = \overline{f_t(\lambda v, u)} = \overline{\lambda f_t(v, u)} = \overline{\lambda} f_t(u, v) =$$

Donc f_t est hermitienne.
On a aussi, par hypothèse sur S :

$$f_t(u, u) = \|u\|^2 + t\langle S(u), u\rangle \underset{t>0}{\geq} \|u\|^2$$

donc f_t est coercive.
De l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on déduit que :

$$\forall u, v \in H, \quad |f_t(u, v)| \leq \|u\|\|v\| + \|S\|\|u\|\|v\| = (1 + \|S\|)\|u\|\|v\|.$$

Donc f_t est continue.
Soit $f \in H$. L'application $v \mapsto \langle v, f\rangle$ est dans H'. D'après le Théorème de Lax-Milgram, il existe $u \in H$ unique solution de

$$\forall v \in H, \quad f_t(u, v) = \overline{\langle v, f\rangle} = \langle f, v\rangle$$

$$\iff \forall v \in H, \quad \langle u, v\rangle + t\langle S(u), v\rangle = \langle f, v\rangle$$

$$\iff \forall v \in H, \quad \langle u + tS(u), v\rangle = \langle f, v\rangle \iff u + tS(u) = f,$$

avec $u + tS(u) = (I + tS)(u)$. i.e. $I + tS$ est bijectif.

3. *Soit $t>0$ et soit $f \in H$, On pose $u_t = (I+tS)^{-1}f$.*

(a) *Montrer que si $f \in \mathrm{Ker}(S)$, alors $u_t = f$.*

On a $f = u_t + tSu_t$ et, par continuité de S :

$$f \in \mathrm{Ker}(S) = \overline{\mathrm{Ker}(S)} = \mathrm{Ker}(S)^{\perp\perp} = (\mathrm{Im}(S))^{\perp} \Rightarrow$$

$$0 = \langle f, Su_t\rangle = \underbrace{\langle u_t, Su_t\rangle}_{\geq 0} + \underbrace{t\|Su_t\|^2}_{\geq 0} \Rightarrow \langle u_t, Su_t\rangle = \|Su_t\| = 0.$$

En particulier : $Su_t = 0$, donc $f = u_t$.

(b) *Montrer que si $f \in \mathrm{Im}S$, alors il existe $v \in H$ t.q. : $t\|u_t\| \leq \|v\|$.*

On suppose que $f \in \mathrm{Im}(S)$. Soit $v \in H$ t.q. $f = Sv$. Alors :

$$u_t + tSu_t = Sv \Rightarrow \langle u_t, v - tu_t\rangle = \langle S(v-tu_t), v - tu_t\rangle \geq 0$$

donc

$$t\|u_t\|^2 \leq \langle u_t, v\rangle \leq \|u_t\|\|v\| \Rightarrow t\|u_t\| \leq \|v\|.$$

(c) *En déduire que : $\forall f \in \mathrm{Im}S$, $\lim_{t\to\infty}(I+tS)^{-1}f = 0$.*

Soit $f \in \mathrm{Im}S$ et soit $v \in H$ t.q. $f = Sv$. D'après (b) : $\|u_t\| \leq \|v\|/t$. Comme v ne dépend pas de $t>0$, on en déduit que $\lim_{t\to+\infty}\|u_t\| = 0$, i.e. $\lim_{t\to+\infty}\|(I+tS)^{-1}f\| = 0$

(d) *Montrer que $\forall f \in H$, $\lim_{t\to\infty}(I+tS)^{-1}f = p_{\mathrm{Ker}S}f$.*

Soit $f \in H$ et soit $f = p_{\mathrm{Ker}S}f + (f - p_{\mathrm{Ker}S}f)$ la décomposition de f dans la somme directe $H = \mathrm{Ker}S \oplus \mathrm{Ker}S^{\perp}$. On a

$$f - p_{\mathrm{Ker}S}f \in \mathrm{Ker}S^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}S}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $f_\varepsilon \in \mathrm{Im}S$ t.q. $\|f - p_{\mathrm{Ker}S}f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$. Alors

$$\|(I+tS)^{-1}f - p_{\mathrm{Ker}S}f\| \underset{(a)}{=} \|(I+tS)^{-1}(f - p_{\mathrm{Ker}S}f)\|$$

$$\leq \|(I+tS)^{-1}(f - p_{\mathrm{Ker}S}f - f_\varepsilon)\| + \|(I+tS)^{-1}f_\varepsilon\|$$
$$\leq \varepsilon\|(I+tS)^{-1}\| + \|(I+tS)^{-1}f_\varepsilon\|$$

On a :

$$\forall u \in H, \quad \langle u + tSu, u\rangle = \|u\|^2 + t\langle Su, u\rangle \geq \|u\|^2 \Rightarrow \|u\|^2$$
$$\leq \langle u + tSu, u\rangle \leq \|u + tSu\|\|u\|$$
$$\Rightarrow \|u\| \leq \|u + tSu\| = \|(I+tS)u\| \iff \|(I+tS)^{-1}u\| \leq \|u\|.$$

On en déduit que $\|(I+tS)^{-1}\| \leq 1$. Il en résute :

$$\|(I+tS)^{-1}f - p_{\mathrm{Ker}S}f\| \leq \varepsilon\|(I+tS)^{-1}\| + \|(I+tS)^{-1}f_\varepsilon\| \leq \varepsilon + \|(I+tS)^{-1}f_\varepsilon\|$$

Donc

$$0 \leq \limsup_{t\to+\infty}\|(I+tS)^{-1}f - p_{\mathrm{Ker}S}f\| \leq \varepsilon + \lim_{t\to+\infty}\|(I+tS)^{-1}f_\varepsilon\| \underset{(c)}{=} \varepsilon$$

Ceci étant vrai $\forall \varepsilon > 0$, on en déduit :

$$\lim_{t\to+\infty}\|(I+tS)^{-1}f - p_{\mathrm{Ker}S}f\| = 0.$$

Exercice 9

1. *Montrer que l'application $(u,v) \mapsto \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$ est un produit scalaire sur $E = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ u(0) = u(1) = 0\}$.*

   On pose :
$$\forall u, v \in E, \quad f(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx.$$
   La bilinéarité de f est immédiate et $f(u,u) \geq 0$, $\forall u \in E$.

   Soit $u \in E$ t.q. $f(u,u) = 0$. Alors $f(u,u)$ est l'intégrale d'une fonction positive continue donc $u' = 0$ sur $[0,1]$. Comme de plus u est continue et que $[0,1]$ est connexe, on en déduit que $u = u(0) = u(1) = 0$. Donc f est un produit scalaire sur E.

2. *Montrer que l'application $(u,v) \mapsto \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 x^2 u(x)v(x)dx$ est une forme bilinéaire symétrique et coercive sur E.*

   On pose :
$$\forall u, v \in E, \quad g(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 x^2 u(x)v(x)dx.$$
   La bilinéarité et la symétrie de g sont immédiates. On a
$$\forall u \in E, \quad g(u,u) = f(u,u) + \int_0^1 x^2 |u(x)|^2 dx \geq f(u,u)$$
   donc g est coercive.

3. *Déduire du Théorème de Lax-Milgram l'existence d'une solution du problème avec conditions initiales :*
   $-u'' + x^2 u = x^3, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$

   On pose : $\forall u \in E, \quad \varphi(u) = \int_0^1 x^3 u(x)dx$. On a :
$$\forall u \in E, \quad |\varphi(u)| \leq \int_0^1 x^3 |u(x)| dx$$
   avec $u(0) = 0 \Rightarrow$
$$\forall x \in [0,1], \quad |u(x)| = \left| \int_0^x u'(y)dy \right| \leq \sqrt{x} \sqrt{\int_0^x |u'(y)|^2 dy} \leq \|u'\|_2$$
   donc
$$\int_0^1 |u(x)|^2 dx \leq \|u'\|_2^2.$$
   Il en résulte :
$$\forall u \in E, \quad |\varphi(u)| \leq \frac{1}{\sqrt{7}} \|u'\|_2 = \frac{1}{\sqrt{7}} \sqrt{f(u,u)},$$

i.e. φ est continue. Du Théorème de Lax-Milgram, on déduit qu'il existe $u \in \overline{E}$ unique t.q.

$$\forall v \in \overline{E}, \quad f(u,v) = \overline{\varphi}(v) = \varphi(v).$$

Soit $v \in E \cap \mathcal{C}^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$. Alors, en supposant u suffisamment régulière, on obtient par intégration par parties :

$$\int_0^1 (-u''(x) + x^2 u(x))v(x)dx = \int_0^1 x^3 v(x)dx.$$

Ceci étant vrai $\forall v \in E \cap \mathcal{C}^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$, on en déduit que

$$-u'' + x^2 u = x^3 \quad \text{dans} \quad]0,1[$$

dès que $u \in \mathcal{C}^2(]0,1[,\mathbb{R})$. D'après la théorie des edos, cette équation admet une solution unique u t.q. $u(0) = u(1) = 0$ dans $\mathcal{C}^2(]0,1[,\mathbb{R})$. Par unicité, cette solution coïncide avec celle du Théorème de Lax-Milgram.

Exercice 10

Dans l'espace de Hilbert $H = L^2([0,1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, on considère le sev $E = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ u(0) = u(1) = 0\}$.

1. *Montrer que*

$$(u,v) \mapsto \langle u,v\rangle = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$$

est un produit scalaire sur E.

Voir Exercice 3.

2. *On note $|\cdot|$ la norme associée et $V = \overline{E}^{|\cdot|}$ le complété de E pour la norme $|\cdot|$. Montrer que : $V \subset H$ et que l'injection est continue. Dans la suite, on admet que E est dense dans H pour la norme $\|\cdot\|_2$ de H*

On commence par remarquer que l'injection $E \subset H$ est continue. En effet, soit $u \in E$. On a :

$$\forall x \in [0,1], \quad u(0) = 0 \Rightarrow |u(x)| = \left|\int_0^x u'(t)dt\right| \leq \sqrt{\left|\int_0^1 dt\right|}\sqrt{\left|\int_0^1 |u'(t)|^2 dt\right|}$$
$$= \|u'\|_2$$

donc $\|u\|_H = \|u\|_2 \leq \|u'\|_2 = |u|$. L'injection $E \subset H$ étant linéaire, on en déduit qu'elle est continue de norme ≤ 1.

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans V donc dans H et donc converge dans H vers une limite $u \in H$. Par définition de V, la suite $(u_n')_{n\geq 0}$ est aussi de Cauchy dans H, donc convergente dans H vers $w \in H$ t.q. :

$$\int_0^1 u_n'\varphi dx = -\int_0^1 u_n \varphi' dx, \quad \forall \varphi \in V.$$

i.e., quand $n \to +\infty$:

$$\int_0^1 w\varphi dx = -\int_0^1 u\varphi' dx, \quad \forall \varphi \in V.$$

Finalement, tout $u \in V$ est un élément u de H auquel on associe $w \in H$ t.q. :

$$\int_0^1 w\varphi dx = -\int_0^1 u\varphi' dx, \quad \forall \varphi \in V.$$

On a :

$$\|w\| = \lim_{n\to+\infty} \|u_n'\| = \lim_{n\to+\infty} |u_n| =: |u|$$

Soit $\phi \in \mathcal{C}^0(0,1)$. On pose $\varphi(t) = \int_0^t \phi(s)ds$, $\forall t \in [0,1]$. Alors $\varphi \in \mathcal{C}^1(0,1)$ et $\varphi' = \phi$. On a :

$$\int_0^1 u_n'\varphi dx = -\int_0^1 u_n\phi dx, \quad \forall n \geq 0.$$

Donc :

$$\int_0^1 w\varphi dx = -\int_0^1 u\phi dx \Rightarrow \left|\int_0^1 u\phi dx\right| = \left|\int_0^1 w\varphi dx\right| \leq \|w\|\|\varphi\| \leq C\|w\|\|\phi\|$$

On en déduit :

$$\sup_{\phi\in\mathcal{C}^0(0,1)} \frac{\left|\int_0^1 u\phi dx\right|}{\|\phi\|} \leq C\|w\|,$$

i.e., par densité de $\mathcal{C}^0(0,1)$ dans H :

$$\|u\| \leq C\|w\| = C|u|.$$

3. *Pour tout $u \in V$ on note ϕ_u' l'application $V \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\forall \varphi \in V, \quad \phi_u'(\varphi) = \int_0^1 u(x)\varphi'(x)dx$$

Montrer que $\phi_u' \in V'$ et que $\|\phi_u'\|_{V'} \leq \|u\|_2$.
Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$, $(\varphi_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$ des suites de Cauchy, soit $u_n \to u \in H$, $u_n' \to u' \in H$, $\varphi_n \to \varphi \in H$, soit $\varphi_n' \to \varphi' \in H$.
La linéarité de ϕ_u' est immédiate.
On a : $\forall n \geq 0$,

$$|\phi_{u_n}'(\varphi_n)| = \left|\int_0^1 u_n(x)\varphi_n'(x)dx\right| \leq \|u_n\|_2\|\varphi_n'\|_2 = \|u_n\|_2\|\varphi_n\|_V$$

donc, quand $n \to +\infty$:

$$|\phi_u'(\varphi)| = \left|\int_0^1 u(x)\varphi'(x)dx\right| \leq \|u\|_2\|\varphi'\|_2 = \|u\|_2\|\varphi\|_V.$$

donc $\phi_u' \in V'$ et $\|\phi_u'\|_{V'} \leq \|u\|_2$.

4. *Soit $u \in V$. Montrer que ϕ'_u se prolonge en un élément de H' de norme $\|\phi'_u\|_{H'} = \|u'\|_2$.*
   Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$, $(\varphi_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$ des suites de Cauchy, soit $u_n \to u \in H$, $u'_n \to u' \in H$, $\varphi_n \to \varphi \in H$, soit $\varphi'_n \to \varphi' \in H$. Par régularité de $u_n \in E$, $n \geq 0$, on a : $\forall n \geq 0$,
   $$\phi'_{u_n}(\varphi_n) = -\int_0^1 u'_n(x)\varphi_n(x)dx =: -\phi_{u'_n}(\varphi_n)$$
   où $\phi_{u'_n} \in H'$ et $\|\phi_{u'_n}\|_{H'} = \|u'_n\|_2 < +\infty$. On en déduit :
   $$\forall n \geq 0, \quad \phi'_u(\varphi) = \lim_{n\to+\infty} \phi'_{u_n}(\varphi_n) = -\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 u'_n(x)\varphi_n(x)dx$$
   $$= -\int_0^1 u'(x)\varphi(x)dx =: -\phi_{u'}(\varphi)$$
   où $\phi_{u'} \in H'$ et $\|\phi_{u'}\|_{H'} = \|u'\|_2 < +\infty$.
5. *On considère l'application $\Phi' : H \to V'$, $u \mapsto \phi'_u$. Montrer que :*
   $$\forall u \in H, \quad \|\phi'_u\|_{V'} \leq \|u\|_2.$$
   Le raisonnement de 3. s'applique.
6. *Déduire de l'Exercice 1 que pour tout $u \in V$, il existe $u' \in H$ t.q. $\phi'_u = \phi_{-u'}$. Indication : on admet que V est dense dans H.*
   Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$, $(\varphi_n)_{n\geq w0} \in E^{\mathbb{N}}$ des suites de Cauchy, soit $u_n \to u \in H$, $u'_n \to u' \in H$, $\varphi_n \to \varphi \in H$, soit $\varphi'_n \to \varphi' \in H$. Alors
   $$(u,\varphi) \mapsto \int_0^1 u'(x)\varphi'(x)dx$$
   est bilinéaire, semi-définie positive. On suppose que $\int_0^1 |u'(x)|^2 dx = 0$. Alors $u' = 0$ dans H. De 2., on déduit que $\|u\|_2 \leq \|u'\|_2 = 0$ donc $u = 0$. Finalement $(u,\varphi) \mapsto \int_0^1 u'(x)\varphi'(x)dx$ est un produit scalaire sur V qui en fait un espace de Hilbert, donc réflexif. O en déduit qu'il existe $v \in H$. t.q. t.q. $\phi'_u = \phi_v$. De 4. on déduit que $\phi'_u = \phi_{-u'}$. Il en résulte que $v = -u'$.

Exercice 11

Soit H un espace de Hilbert et soit $V \subset H$ un sev dense dans H. On suppose que V est muni d'une norme $\|\cdot\|_V$ qui en fait un espace réflexif et qui rend continue l'injection canonique $V \subset H$, i.e. qu'il existe une constante $C > 0$ t.q.

$$\forall v \in V, \quad \|v\|_H \leq C\|v\|_V.$$

1. *On considère l'opérateur antilinéaire $T : H \to V'$, $f \mapsto Tf$ t.q.*

$$\forall v \in V, \quad Tf(v) = \langle v, f \rangle.$$

Montrer que : $\forall f \in H$, $\|Tf\|_{V'} \leq C\|f\|_H$.

$$\|Tf\|_{V'} = \sup_{v \in V} \frac{|Tf(v)|}{\|v\|_V}.$$

Soit $f \in H$ et soit $v \in V$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|Tf(v)| = |\langle v, f \rangle| \leq \|f\|_H \|v\|_H.$$

On en déduit, par hypothèse sur V :

$$|Tf(v)| \leq C\|f\|_H \|v\|_V.$$

Ceci est vrai $\forall v \in V$, donc $\|Tf\|_{V'} \leq C\|f\|_H$.

2. *Montrer que T est injective.*
$\overline{T}$ éant linéaire il suffit de vérifier que $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$. Soit $f \in H$ t.q. $Tf(v) = 0$, $\forall v \in V$. On en déduit :

$$\forall v \in V, \quad \langle v, f \rangle = 0.$$

Donc $f \in V^\perp$. Soit $v \in H$. Comme V est dense dans H par hypothèse, il existe une suite $(v_n) \in V^{\mathbb{N}}$ t.q

$$\lim_{n \to +\infty} \|v_n - v\|_H = 0.$$

On a :

$$\forall n \geq 0, \quad |\langle v_n, f \rangle - \langle v, f \rangle| \leq \|v_n - v\|_H \|f\|_H|$$

donc

$$\langle v, f \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle v_n, f \rangle = 0$$

i.e. $f \in H^\perp = \{0\}$. $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, i.e. T est injective.

3. *Soit $v \in V$ t.q. $Tf(v) = 0$, $\forall f \in H$. Que peut-on dire de v ?*
On a $v \in H^\perp = \{0\}$, i.e. $v = 0$.

4. *En déduire que $T(H)$ est dense dans V'.*
Soit $L \in V''$ t.q. $L|_{T(H)} = 0$. Comme V est réflexif par hypothèse, il existe $v \in V$ t.q. $L = \phi_v : \varphi \in V' \mapsto \varphi(v)$. On en déduit :

$$\forall f \in H, \quad L(Tf) = 0 = \phi_v(Tf) = Tf(v)$$

i.e. $Tf(v) = 0$, $\forall f \in H$. De 3., on déduit que $v = 0$, i.e. $L = 0$. Donc $\overline{T(H)} = V'$ d'après une conséquence du Théorème de Hahn-Banach.

5. *Soit $\varphi \in V'$. Montrer que $\varphi \in T(H)$ ssi il existe une constante $a > 0$ t.q. $\forall v \in V$, $|\varphi(v)| \leq a\|v\|_H$.*
   Soit $\varphi \in T(H) \subset V'$ et soit $f \in H$ t.q. $\varphi = Tf$. Alors :
   $$\forall v \in V, \quad |\varphi(v)| = |\langle v, f\rangle| \leq \|v\|_H \|f\|_H =: a\|v\|_H.$$
   avec $a = \|f\|_H$.
   Inversement, soit $\varphi \in V'$. On suppose qu'il existe $a > 0$ t.q. $\forall v \in V$, $|\varphi(v)| \leq a\|v\|_H$. D'après le Théorème de Hahn-Banach analytique, il existe une application linéaire $\tilde{\varphi} : H \to \mathbb{R}$ t.q. $\tilde{\varphi}|_V = \varphi$ et $\forall v \in H$, $\tilde{\varphi}(v) \leq a\|v\|_H$. Par linéarité de $\tilde{\varphi}$: $-\tilde{\varphi}(v) = \tilde{\varphi}(-v) \leq a\|v\|_H$. On déduit que $\forall v \in H$,
   $$-a\|v\|_H \leq \tilde{\varphi}(v) \leq a\|v\|_H$$
   i .e.
   $$|\tilde{\varphi}(v)| \leq a\|v\|_H$$
   i.e. que $\tilde{\varphi} \in H'$ et $\|\tilde{\varphi}\|_{H'} \leq a$. Comme H est un espace de hilbert par hypothèse, il existe $f \in H$ t.q. $\forall v \in H$, $\tilde{\varphi}(v) = \langle v, f\rangle$. Il en résulte : $\varphi = \tilde{\varphi}|_V = Tf \in T(H)$.

Exercice 12

Soit E un evn et soit $F \subset E$, $F \neq E$, un sev fermé de E. Soit $x_0 \in E \setminus F$. Alors $\exists f \in E'$ t.q. $f(x_0) = d(x_0, F) > 0$ et $f|_F = 0$.

Soit ϕ définie sur $\mathbb{R}x_0$ par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi(tx_0) = td(x_0, F)$. Comme F est fermé, $x_0 \notin F \Rightarrow d(x_0 F) > 0$ et $\phi \neq 0$. Alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi(tx_0) \leq |t|d(x_0, F) = d(tx_0, F)$. On vérifie immédiatement que $p : x \mapsto d(x, F)$ est une semi-norme sur E. Du théorème de Hahn-Banach on déduit que ϕ se prolonge à E en une forme linéaire encore notée ϕ t.q. $\phi(x) \leq d(x, F)$, $\forall x \in E$. On a alors : $\forall x \in E$,

$$\phi(x) \leq d(x, F) \text{ et } \phi(-x) = -\phi(x) \leq d(-x, F) = d(x, F) \Rightarrow |\phi(x)| \leq d(x, F).$$

En particulier : $\forall x \in E$, $|\phi(x)| \leq d(x, F) \leq \|x\|$, donc $\phi \in E'$ et $\|\phi\| \leq 1$. De plus :

$$\phi\left(\frac{\|x_0\|}{d(x_0, F)} x_0\right) = \|x_0\| \Rightarrow \|\phi\| = 1$$

Par construction, $\phi(x_0) = d(x_0, F)$.

Exercice 13

Soit E un evn de dimension finie. Soit $C \subset E$ un convexe non vide t.q. $0 \notin C$.

1. *Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in C^{\mathbb{N}}$ et soit $D = \{x_n, \quad n \geq 0\}$. On suppose que D est dense dans C. On pose :*
   $$\forall n \geq 0, \quad C_n = \mathrm{Conv}\{x_0, \cdots, x_n\}.$$

Montrer que C_n est compact et que $\cup_{n\geq 0} C_n$ est dense dans C.

On remarque que $\{x_0, \cdots x_n\}$ est fermé comme réunion finie des singletons $\{x_i\}$, $i \in [[0,n]]$, qui sont fermés dans E séparé. De plus $\{x_0, \cdots x_n\}$ est borné, donc compact. Du Théorème de Carathéodory, on déduit que C_n est compact.

On a aussi : $D \subset \cup_{n\geq 0} C_n \subset C$ avec C convexe et $\overline{D} = C$ par hypothèse, donc $\cup_{n\geq 0} C_n$ est dense dans C.

2. *Montrer qu'il existe $(f_n)_{n\geq 0} \in (E')^{\mathbb{N}}$ t.q.*

$$\forall n \geq 0, \quad \|f_n\| = 1 \quad \textit{et} \quad f_n(x) \geq 0, \quad \forall x \in C_n.$$

Soit $n \geq 0$. $C_n \subset C$ et $0 \notin C \Rightarrow 0 \notin C_n$. D'après le Théorème de Hahn-Banach géométrique il existe un hyperplan fermé H d'équation $g_n(x) = \alpha_n$ avec $g_n \in E'$ et $\alpha_n \in \mathbb{R}$ qui sépare strictement le convexe compact C_n et le convexe fermé $\{0\}$, i.e. t.q. :

$$g_n(0) = 0 < \alpha_n < g_n(x), \quad \forall x \in C_n.$$

Alors $\alpha_n > 0 \Rightarrow g_n(x) \geq 0$, $\forall x \in C_n$. En particulier $g_n \neq 0$, donc on conclut en posant $f_n = \dfrac{g_n}{\|g_n\|}$.

3. *Montrer qu'il existe $f \in E'$ t.q.*

$$\|f\| = 1 \quad \textit{et} \quad f(x) \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

On pose :

$$\forall n \geq 0, \quad E_n = \text{Vect}\{x_0, \cdots, x_n\}.$$

Alors E_n est un ev de dimension finie $\leq n+1$ et $C_n \subset E_n \subset E_{n+1}$, $\forall n \geq 0$.

On définit f par récurrence sur $n \geq 0$ en posant : $f|_{E_0} = f_0$ et f est l'unique forme linéaire sur E, continue car E est de dimenson finie, définie comme suit.

$$f|_{E_{n+1}} = f|_{E_n} \quad \text{si} \quad x_{n+1} \in E_n.$$

Si $x_{n+1} \notin E_n$, alors $E_{n+1} = E_n \oplus \mathbb{R}x_{n+1}$. On pose

$$\forall x \in E_n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(x + \lambda x_{n+1}) = f(x) + \lambda f_{n+1}(x_{n+1}).$$

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $f|_{C_n} \geq 0$. Par construction : $f|_{C_0} = f_0|_{C_0} \geq 0$.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit $x \in C_{n+1}$. Il existe $\lambda_0, \cdots, \lambda_{n+1} \in [0,1]$ t.q. $\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i = 1$ et $x = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i x_i$. On pose $\lambda = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 - \lambda_{n+1}$. Si $\lambda = 0$, alors $\lambda_i \geq 0$, $\forall i \in [[0,n]] \Rightarrow \lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$ et $\lambda_{n+1} = 1$, donc $x = x_{n+1}$ et $f(x) = f_{n+1}(x_{n+1}) \geq 0$ par construction.

Si $\lambda \neq 0$, on pose

$$x' = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$$

et alors $x = \lambda x' + (1-\lambda)x_{n+1}$ avec $x' \in C_n \Rightarrow f(x) = \lambda f(x') + (1-\lambda)f_{n+1}(x_{n+1})$ avec $x' \in C_n \Rightarrow f(x') \geq 0$ par hypothèse de récurrence et $f_{n+1}(x_{n+1}) \geq 0$ par construction de f_{n+1}. De plus $\lambda \in [0,1]$ par construction $\Rightarrow f(x) \geq 0$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence sur $n \geq 0$, on en déduit que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \cup_{n\geq 0} C_n$.
Soit $x \in C$. Comme $\cup_{n\geq 0} C_n$ est dense dans C, il existe $(y_k) \in (\cup_{n\geq 0} C_n)^{\mathbb{N}}$ t.q. $x = \lim_{k\to+\infty} y_k$
Par continuité de $f \in E'$:

$$f(x) = \lim_{k\to+\infty} f(y_k) \quad \text{avec} \quad f(y_k) \geq 0, \quad \forall k \geq 0.$$

Donc $f(x) \geq 0$ d'après les propiétés des limites de suites réelles.
Par construction : $\forall n \geq 0$,

$$f_n(x) \geq \alpha > f_n(0) = 0, \quad \forall x \in C_n$$

et

$$C_0 = \{x_0\} \Rightarrow f_0(x_0) > 0$$

Donc $f(x_0) = f_0(x_0) > 0 \Rightarrow f \neq 0$. Quitte à remplacer f par $\dfrac{f}{\|f\|}$, on a $\|f\| = 1$.

4. *En déduire qu'il existe un hyperplan qui sépare C et $\{0\}$ au sens large.*
   De la propriété : $\forall x \in C$, $f(x) \geq 0$, on déduit que $\alpha = \inf_C f > -\infty$ et que l'hyperplan d'équtation $f(x) = \alpha$ sépare C et $\{0\}$ au sens large :

$$C \subset \{x \in E, \quad f(x) \geq \alpha\} \quad \text{et} \quad 0 \in \{x \in E, \quad f(x) \leq \alpha\}$$

   De plus, H est fermé car toute forme linéaire en dimension finie est continue.
5. *Soit $A \subset E$ et soit $B \subset E$ deux ensembles convexes non vides disjoints de E. Montrer qu'il existe un hyperplan qui sépare A et B au sens large.*
   On pose $C = A - B$. Alors C est convexe et $0 \notin C$ car $A \cap B = \emptyset$. De 4., on déduit que qu'il existe une forme linéaire $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. :

$$\forall x \in C, \quad f(x) \geq \alpha \geq f(0) = 0, \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in C$$

$$\forall (a,b) \in A \times B, \quad f(a-b) \geq f(0) = 0$$

   i.e., par linéarité de f :

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad f(a) \geq f(b).$$

   On pose $\alpha = \inf_{a\in A} f(a)$. Alors $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad f(a) \geq \alpha \geq f(b).$$

   d'où on déduit que l'hyperplan fermé $f = \alpha$ sépare A et B.