Préparation Agrégation de Mathématiques
Année 2020–2021

Leçon 205

Exercice 1

Soit $E = c_{00}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang muni de la norme:

$$\forall x, y \in E, \quad d(x,y) = \max_{n\geq 0} |x_n - y_n|.$$

Soit $u^{(n)} \in E$ définie par

$$u_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & si \quad k \in [[0,n]], \\ 0 & si \quad k > n. \end{cases}$$

Montrer que $(u^{(n)})_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy non convergente de (E,d).

$$\forall n, p \geq 0, \quad d(u^{(n+p)}, u^{(n)}) = \frac{1}{n+1}$$

On relarque que d est une dstace dans ℓ^∞ et que $u^{(n)} \to u$ dans ℓ^infty où $u_k = \frac{1}{k+1}$, $\forall k \geq 0$, et $u \notin E$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue t.q.: $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\lim_{n\to+\infty} f(nx) = 0$.
Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$F_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^+, \sup_{k\geq n} |f(kx)| \leq \varepsilon \right\} = \cap_{k\geq n} \frac{1}{k} |f|^{-1} \left([0,\varepsilon]\right).$$

Comme f est continue, $|f|^{-1}\left([0,\varepsilon]\right)$. est fermé comme image réciproque du fermé $[0,\varepsilon]$ par une application continue. Comme $x \mapsto \dfrac{x}{k}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, il transforme le fermé $[0,\varepsilon]$ en un fermé de $\mathbb{R}^+$. Donc F_n est un fermé de $\mathbb{R}^+$ comme intersection dénombrable de fermés. Soit $x > 0$. Par hypothèse sur f, il existe $n_0 > 0$ t.q. $|f(nx)| \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0$, donc $x \in F_{n_0}$. On en déduit que $\mathbb{R}^+ = \cup_{n\geq 1} F_n$. Comme $\mathbb{R}^+$ est fermé dans $\mathbb{R}$ complet, $\mathbb{R}+$ est complet donc de Baire. Du théorème de Baire, on déduit qu'il existe $n_0 \geq 0$ t.q; $\overset{\circ}{F}_{n_0} \neq \emptyset$. Donc il existe $a < b$ t.q. $]a, b[\subset F_{n_0}$. Quitte à remplacer a par $b/2$, on peut supposer $a > 0$. Soit $x > 0$ et soit $n \geq 1$. On a

$$a < \frac{x}{n} < b \iff \frac{x}{b} < n < \frac{x}{a}.$$

Cette condition est réalisée dès que $\dfrac{x}{b} - \dfrac{x}{a} > 1$, i.e. $x > \dfrac{ab}{b-a}$.

Soit $x \geq \max\left(n_0 a, \dfrac{ab}{b-a}\right)$. Alors il existe $n \geq 1$ t.q. $a < \dfrac{x}{n} < b$. Compte tenu de la majoration $n < \dfrac{x}{a}$, on peut choisir n le plus grand possible et alors $n \geq n_0$. Comme $]a, b[\subset F_{n_0}$, on a

$$|f(x)| = \left|f\left(n\frac{x}{n}\right)\right| \leq \varepsilon.$$

Exercice 3

1. *Soit $(O_n)_{n\geq 0}$ une suite d'ouverts. On suppose qu'il existe une suite de distances $(d_n)_{n\geq 0}$ t.q. (O_n, d_n) soit un espace complet, $\forall n \geq 0$. Montrer que l'espace produit $\Pi_{n\geq 0} O_n$ est complet pour la distance:*

$$(x, y) \in \Pi_{n\geq 0} O_n \mapsto \delta(x, y) = \sup_{n\geq 0} \min\left(d_n(x_n, y_n), \frac{1}{n+1}\right)$$

où d_n est la distance associée à O_n.

Soit $(x^{(k)})_{k\geq 0}$ une suite de Cauchy de $(\Pi_{n\geq 0} O_n, \delta)$. Soit $n \geq 0$ et soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{n+1}[$. Soit $k_0 >$ t.q.:

$$\forall k \geq k_0, \quad \forall p \geq 0, \quad \delta(x^{(k+p)}, x^{(k)}) < \varepsilon.$$

Alors $\frac{1}{n+1} > \varepsilon \Rightarrow$

$$\forall k \geq k_0, \quad \forall p \geq 0, \quad d_n(x_n^{(k+p)}, x_n^{(k)}) < \varepsilon$$

i.e. la suite $(x_n^{(k)})_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $(O_n d_n)$, donc convergente vers $x_n \in O_n$. Soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \Pi_{n\geq 0} O_n$. On en déduit alors que $\lim_{k\to+\infty} \delta(x, x^{(k)}) = 0$, i.e; que $x^{(k)} \xrightarrow{\delta} x$.

2. *Soit* (X, d) *un espace métrique complet. En déduire que tout* $\mathcal{G}_\delta$ *de* X *est homéomorphe à un espace métrique complet. Indication: Montrer que l'application* $\delta' : X \to X^{\mathbb{N}}$, $x \mapsto (x_n)_{n\geq 0}$ *t.q.* $x_n = x$, $\forall n \geq 0$, *induit un homéomorphisme de* X *sur* $\delta'(X)$.

   Soit p_n la projection canonique: $X^{\mathbb{N}} \to X$, $x \mapsto x_n$. On a: $\forall n \geq 0$, $p_n \circ \delta' = id_X \in \mathcal{C}(X, X)$, donc δ' est continue et inversile d'inverse continue $p_n|_{\delta'(X)}$, $\forall n \geq 0$, i.e. δ' induit un homéomorphisme de X sur $\delta'(X)$.

   Soit $B = \cap_{n\geq 0} O_n$ un $\mathcal{G}_\delta$ de X. On remarque que $\delta'(X)$ est fermé dans $X^{\mathbb{N}}$. Par définition: $\delta'(B) = \Pi_{n\geq 0} O_n \cap \delta'(X)$ est fermé comme intersection de deux fermés, donc complet puisqu fermé dans l'espace métrique complet $\Pi_{n\geq 0} O_n$.