UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Préparation à l'agrégation externe

Feuille d'exercices de géométrie

Isométries

Exercice 1

Dans un plan affine euclidien, quels sont les déplacements involutifs.

Exercice 2

Montrer qu'une isométrie plane à point fixe qui n'est pas un déplacement est une réflexion. (On pourra par exemple considérer l'écriture à l'aide de nombres complexes d'une telle isométrie.)

Exercice 3

Étant données trois droites concourantes, existe-il un triangle dont ce sont les médiatrices ?

Exercice 4 : Problème de Fagnano

Soit ABC un triangle sans angle obtus. Déterminer et expliquer comment construire le triangle de périmètre minimal inscrit dans ABC (avec un sommet sur chaque côté).

Exercice 5

Montrer que tout sous-groupe fini du groupes des isométries planes a un point fixe. Montrer que tout sous-groupe fini du groupe des déplacements plans est commutatif.

Exercice 6

Si Φ et Ψ sont deux déplacements du plan, que peut-on dire de $\Phi \circ \Psi \circ \Phi^{-1} \circ \Psi^{-1}$?

Montrer que le groupe des déplacements du plan qui préservent une figure bornée est commutatif.

Exercice 7

Existe-t-il une figure plane dont le groupe des déplacements (respectivement, isométries) soit isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_4$?

Exercice 8

Quelles sont les transformations affines qui préservent un cercle fixé ?

Exercice 9

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, et soit $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application qui préserve les distances. Montrer que f est une application affine. (On pourra par exemple montrer que f préserve les barycentres.)

Exercice 10

Rappeler et démontrer les cas d'isométrie des triangles.

Exercice 11

Montrer que le groupe des isométries d'un tétraèdre régulier est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 12

Déterminer le centre du groupes des isométries affines d'un espace affine euclidien.

Exercice 13

Montrer que tout sous-groupe fini du groupe affine d'un espace affine réel de dimension finie n est isomorphe à un sous-groupe du groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 14

Montrer que les sous-groupes finis du groupe affine d'un plan affine réel sont cycliques ou diédraux.

Coniques

Exercice 15

Soit ABC un triangle (non plat), et soient I, J, K les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Montrer qu'il existe une unique ellipse passant par I, J, K et tangente aux côtés en ces points.

Exercice 16

Soit ABC un triangle (non plat). Montrer qu'il existe une unique ellipse passant par A, B, C et d'aire minimale, et calculer son aire en fonction de l'aire du triangle.

Exercice 17

Soit $\mathcal{C}$ une ellipse de centre O. Soient M et M' deux points distincts de $\mathcal{C}$. Soit I le milieu de $[MM']$. On suppose $I \neq O$. Soient Δ et Δ' les tangentes à $\mathcal{C}$ en M et M' respectivement. Montrer que les droites Δ, Δ' et (OI) sont concourantes.

(Source : Audin, *Géométrie*, exercice VI.19)

Exercice 18

Soient deux coniques propres $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ dans le plan euclidien. À quelle condition sont-elles semblables ? (On pourra commencer par le cas des paraboles.)

(Source : Audin, *Géométrie*, exercice VI.23)

Exercice 19

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre F, et soit F' un point du plan. Quel est le lieu des centres des cercles passant par F' et tangents à $\mathcal{C}$?

(Source : Audin, *Géométrie*, exercice VI.31)

Exercice 20

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux coniques. On considère le *faisceau* $\mathcal{F}$ de coniques qu'elles engendrent, c'est-à-dire l'ensemble des courbes d'équation une combinaison linéaire non nulle des équations de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Montrer $\mathcal{F}$ contient au moins une conique dégénérée. (On pourra montrer que les coniques dégénérées correspondent à des solutions d'une équation de degré 3.)

Que donne cette propriéte dans le cas de deux cercles ?

Exercice 21

On considère une polynôme $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ de degré 4. On veut montrer que ses racines peuvent s'obtenir par résolution d'une équation de degré 3 et d'équations de degré 2.

En posant $Y = X^2$, montrer que chercher les racines de P revient à chercher les points d'intersection de deux coniques dans le plan affine $\mathbb{C}^2$.

En considérant le faisceau engendré par ces deux coniques, et par résolution d'une équation de degré 3, montrer qu'on peut remplacer une de ces coniques par une paire de droites.

Conclure.

(Source : Audin, *Géométrie*, exercice VI.44)

Autres exercices de géométrie

Exercice 22 : Trigonométrie du triangle

On considère un triangle ABC, et l'on note :

- α, β, γ les angles en A, B, C respectivement ;
- a, b, c les longueurs des côtés opposés à A, B, C respectivement ;
- p le demi-périmètre ;
- R le rayon du cercle circonscrit, r le rayon du cercle inscrit ;
- $\mathcal{A}$ l'aire du triangle.

Retrouver les formules bien connues suivantes.

1. $\alpha + \beta + \gamma = \pi$
2. $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (loi du cosinus)
3. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

4. $\mathcal{A} = \frac{bc}{2} \sin \alpha = pr$
5. $\sin \alpha = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
6. $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (formule de Héron)
7. $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$.

Quel est le rayon du cercle exinscrit en A, en fonction de a, b et c ?

Quelle est la distance de A au milieu de BC ?

Exercice 23

Soient A, B, C trois points d'un plan euclidien $\mathcal{E}$. On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Soit I l'image de A par projection orthogonale sur la droite (BC). La droite (AI) est appelée la hauteur du triangle ABC issue de A. On suppose que le triangle ABC n'est pas rectangle, i.e. qu'il n'y a pas deux droites orthogonales parmis (AB), (BC) et (CA).

1. Montrer que $(\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{BI})$ et $(\overrightarrow{CB} \mid \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CB} \mid \overrightarrow{CI})$.
2. Montrer que I est le barycentre de $(B, (\overrightarrow{CB} \mid \overrightarrow{CA}))$ et $(C, (\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{BA}))$.
3. Montrer que $(\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 - b^2\right)$.
4. Montrer que I est le barycentre de $(B, a^2 + b^2 - c^2)$ et $(C, c^2 + a^2 - b^2)$.
5. Montrer que I est le barycentre de $(B, (c^2 + a^2 - b^2)^{-1})$ et $(C, (a^2 + b^2 - c^2)^{-1})$.
6. Montrer que les trois hauteurs du triangle ABC ont un point commun, qui est barycentre de $(A, (b^2 + c^2 - a^2)^{-1})$, $(B, (c^2 + a^2 - b^2)^{-1})$ et $(C, (a^2 + b^2 - c^2)^{-1})$. (Ce point est appelé l'orthocentre du triangle).

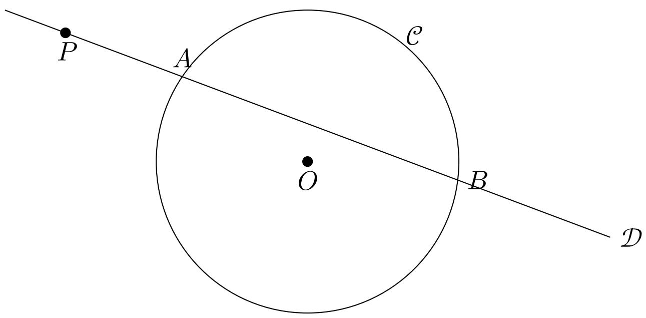
Exercice 24

Montrer que l'aire d'un quadrilatère non croisé, inscrit dans un cercle, de côtés a, b, c, d, et de demi-périmètre $s = \frac{a+b+c+d}{2}$, est égale à $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ (formule de Brahmagupta).

Exercice 25

On se place dans le plan euclidien. Soit $\mathcal{C}$ un cercle, de centre O et de rayon r, et soit P un point.

On considère une droite $\mathcal{D}$ passant par P et coupant $\mathcal{C}$ en deux points A et B. On appelle puissance de P par rapport à $\mathcal{C}$ le produit $\overline{PA}\,\overline{PB}$ (en tenant compte des orientations). Montrer que ce produit ne dépend pas du choix de $\mathcal{D}$. Discuter le cas où $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}$.

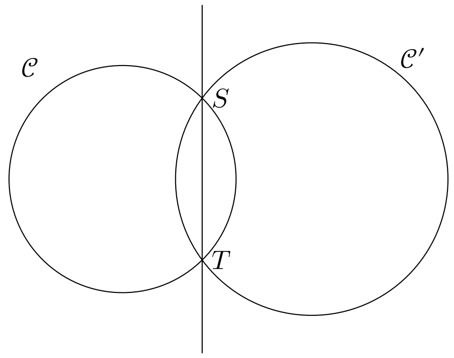


Montrer que :

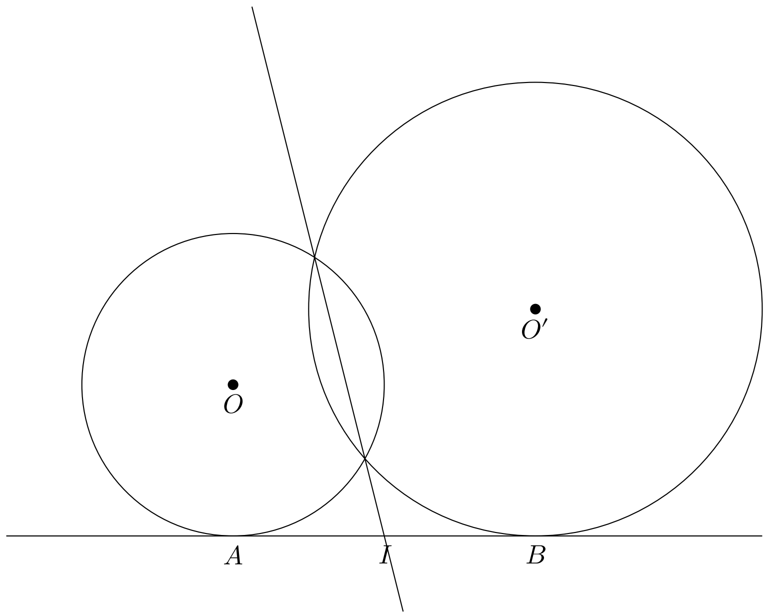
1. P est à l'intérieur du disque de bord $\mathcal{C}$ si et seulement si sa puissance est strictement négative ;
2. P est sur $\mathcal{C}$ si et seulement si sa puissance est nulle ;

3. P est à l'extérieur du disque de bord $\mathcal{C}$ si et seulement si sa puissance est strictement positive.

On considère deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ non concentriques. Montrer que l'ensemble des points ayant la même puissance par rapport à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}'$ est une droite, orthogonale à la droite passant par les centres de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en deux points S et T, montrer que c'est la droite (ST).

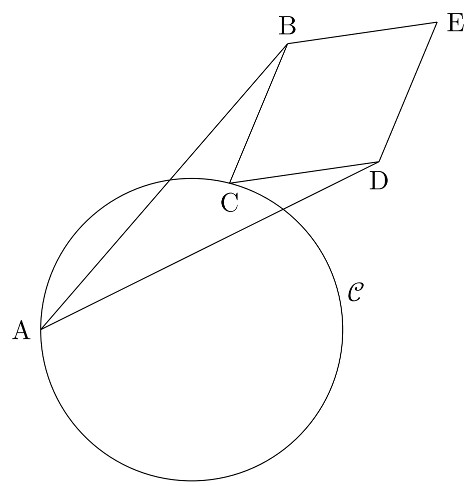


Dans la figure suivante, qu'est le point I ?



Exercice 26 : Inverseur

On considère la figure suivante, avec $AB = AD$ et $BC = CD = DE = EB$ des longueurs fixées.



Montrer que, lorsque le point C parcourt le cercle $\mathcal{C}$ (le point A est fixé, et les points B, C, D, E bougent en conséquence), le point E reste sur une même droite.

Exercice 27 : Famille obtusangle

Soit E un espace vectoriel euclidien, de dimension n. Notons $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire. Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ une famille d'éléments de E, telle que

$$(e_i \mid e_j) < 0 \qquad (\forall i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j).$$

Montrer que $m \leqslant n + 1$.

Exercice 28

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles, qui se coupent en deux points distincts P et Q. Soient Δ et Δ' les deux droites qui sont tangentes à ces deux cercles. Notons A et B les points de contact de Δ avec $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ respectivement. Soit I le point d'intersection de Δ et (PQ). Montrer que I est le milieu de $[AB]$.

Exercice 29

Montrer qu'un triangle dont les côtés sont de longueur rationnelle et dont les angles sont de mesure en degrés rationnelle, est forcément équilatéral.

(Source : Conway, *The Book of Numbers*)