

Université de Rennes 1

Année 2023/2024

Agrégation–Préparation à l’écrit-TD1

Dans toute la suite, \mathbf{F}_q dénote le corps fini à q éléments.

1 - Soit $n \in \mathbf{N}$ et E un espace vectoriel sur \mathbf{F}_q de dimension n . Pour un entier m avec $0 \leq m \leq n$, on note X_m l’ensemble des m -tuplets $(x_1, \dots, x_m) \in E^m$ formés de m vecteurs linéairement indépendants.

(i) Calculer $\text{Card}(X_m)$. En déduire $\text{Card}(GL_n(\mathbf{F}_q))$.

(ii) Quel est le cardinal de l’espace projectif $\mathbf{P}(E)$, c-à-d combien y-a-t-il de droites vectorielles dans E ?

2 - Soit $n \geq 2$ un entier. Soit $\mu_n(\mathbf{F}_q)$ le groupe des racines n -ièmes de l’unité dans \mathbf{F}_q . Montrer que $\text{Card}(\mu_n(\mathbf{F}_q)) = \text{pgcd}(n, q - 1)$. En déduire le cardinal de $PSL_n(\mathbf{F}_q)$.

Indication: Soit $d = \text{pgcd}(n, q - 1)$. Pour $x \in \mathbf{F}_q^*$, montrer que $x^d = 1$ si et seulement si $x \in \mu_n(\mathbf{F}_q)$. Combien de racines possède le polynôme $X^d - 1$ dans \mathbf{F}_q^* ?

3 - Montrer que $GL_2(\mathbf{F}_2)$ est isomorphe au groupe symétrique \mathfrak{S}_3 .

Indication: Faire opérer $GL_2(\mathbf{F}_2)$ sur \mathbf{F}_2^2 .

4 - Soit $E = \mathbf{F}_3^2$.

(i) Construire, au moyen des 4 droites vectorielles D_1, D_2, D_3, D_4 de E un homomorphisme surjectif $\epsilon : GL_2(\mathbf{F}_3) \rightarrow \mathfrak{S}_4$.

(ii) Montrer que ϵ induit un isomorphisme entre $PSL_2(\mathbf{F}_3)$ et le groupe alterné \mathfrak{A}_4 .

(iii) En déduire que $SL_2(\mathbf{F}_3)$ n’est pas parfait (Un groupe G est parfait s’il coïncide avec le sous-groupe $[G, G]$ engendré par les commutateurs.)

5 - Montrer que $PSL_2(\mathbf{F}_4)$ est isomorphe à \mathfrak{A}_5 .

Indication: $PSL_2(\mathbf{F}_4)$ opère sur l’ensemble X des droites vectorielles de \mathbf{F}_4^2 . Quel est le cardinal de $PSL_2(\mathbf{F}_4)$?

6 - Montrer que $PGL_2(\mathbf{F}_5)$ est isomorphe à \mathfrak{S}_5 et que $PSL_2(\mathbf{F}_5)$ est isomorphe à \mathfrak{A}_5 .

7 - Soit $n \in \mathbf{N}$ et E un espace vectoriel sur \mathbf{F}_q de dimension n .

Pour un entier m avec $0 \leq m \leq n$, soit $G_{n,m}$ l’ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension m . Trouver une formule pour $\text{Card}(G_{n,m})$. (*Indication:* $GL_n(\mathbf{F}_q)$ opère transitivement sur $G_{n,m}$.)

8 - Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , on munit $M_n(\mathbf{K}) \cong \mathbf{K}^{n^2}$ de la topologie standard.
 (i) Montrer que $GL_n(\mathbf{Q})$ est dense $GL_n(\mathbf{R})$ et que $SL_n(\mathbf{Q})$ est dense $SL_n(\mathbf{R})$.
 (ii) Montrer que $GL_n(\mathbf{C}), SL_n(\mathbf{C})$ et $SL_n(\mathbf{R})$ sont connexes par arcs et que $GL_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe.

9 - Soit $n \geq 1$ un entier et $\Gamma = SL_n(\mathbf{Z})$. Pour un nombre premier p , on considère l'homomorphisme $\varphi_p : \Gamma \rightarrow SL_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ induit par la réduction modulo p , i.e. $\varphi_p((a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}) = (\bar{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, où \bar{a} désigne la classe de $a \in \mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

- (i) Montrer que φ_p est surjectif.
- (ii) On note Γ_p le noyau de φ_p . Quel est l'indice de Γ_p dans Γ ?
- (iii) On suppose que $p \geq 3$. Montrer que Γ_p ne possède pas d'élément d'ordre fini distinct de l'identité.
- (iv) En déduire que Γ ne possède, à isomorphisme près, qu'un nombre fini de sous-groupes finis.

10 - Soit $n \geq 2$, et soit $a = (a_1, \dots, a_n)^t \in \mathbf{Z}^n$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) il existe une matrice $A \in SL_n(\mathbf{Z})$ dont la première colonne est a .
- (ii) $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n) = 1$.