

I Préliminaires

A. Eléments de \mathcal{P}

1. (a) La suite $(c_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ étant presque nulle, il existe $R > |\lambda_0|$ t.q.:

$$\frac{1}{T} \int_0^T p(t) e_{-\lambda_0}(t) dt = \sum_{|\lambda| \leq R} \frac{c_\lambda}{T} \int_0^T e_{\lambda - \lambda_0}(t) dt$$

avec: $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_0\}$:

$$\frac{c_\lambda}{T} \int_0^T e_{\lambda - \lambda_0}(t) dt = \frac{1}{\lambda - \lambda_0} (e^{i(\lambda - \lambda_0)T} - 1) \Rightarrow \left| \int_0^T e_{\lambda - \lambda_0}(t) dt \right| \leq \frac{2}{|\lambda - \lambda_0|}$$

On en déduit qu'il existe $M > 0$ t.q.

$$\left| \sum_{\lambda \neq \lambda_0} \frac{c_\lambda}{T} \int_0^T e_{\lambda - \lambda_0}(t) dt \right| \leq \sum_{|\lambda| \leq R} \frac{2}{|\lambda - \lambda_0|} \frac{|c_\lambda|}{T} \leq \frac{M}{T} N(p) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} \frac{c_{\lambda_0}}{T} \int_0^T dt = c_{\lambda_0} &\Rightarrow \left| \frac{1}{T} \int_0^T p(t) e_{-\lambda_0}(t) dt - c_{\lambda_0} \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{\lambda \neq \lambda_0} \frac{c_\lambda}{T} \int_0^T e_{\lambda - \lambda_0}(t) dt \right| \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

i.e.:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T p(t) e_{-\lambda_0}(t) dt = c_{\lambda_0}$$

- (b) Soit $(c_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ une famille presque nulle de \mathbb{C} t.q., avec les notations de (a): $p = 0$. De ce qui précède, on déduit que: $\forall \lambda_0 \in \mathbb{R}$,

$$c_{\lambda_0} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T p(t) e_{-\lambda_0}(t) dt = 0.$$

2. (a) Soit $p = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda e_\lambda \in \mathcal{P}_\Lambda$. Par définition:

$$\operatorname{Re}(p) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in \Lambda} (c_\lambda e_\lambda + \bar{c}_\lambda \bar{e}_\lambda)$$

avec $\bar{e}_\lambda = e_{-\lambda}$, $\forall \lambda \in \Lambda$ et $\lambda \in \Lambda \iff -\lambda \in \Lambda$ par hypothèse, donc

$$\operatorname{Re}(p) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in \Lambda} (c_\lambda e_\lambda + \bar{c}_\lambda e_{-\lambda}) \in \mathcal{P}_\Lambda.$$

De même:

$$\operatorname{Im}(p) = \frac{1}{2i} \sum_{\lambda \in \Lambda} (c_\lambda e_\lambda - \bar{c}_\lambda \bar{e}_\lambda) = \frac{1}{2i} \sum_{\lambda \in \Lambda} (c_\lambda e_\lambda - \bar{c}_\lambda e_{-\lambda}) \in \mathcal{P}_\Lambda.$$

Par définition, $\operatorname{Re}(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$ prennent leurs valeurs dans \mathbb{R} . On a immédiatement:

$$|\operatorname{Re}(p)| \leq \|p\|_\infty < +\infty \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im}(p)| \leq \|p\|_\infty < +\infty$$

donc $\operatorname{Re}(p) \in \mathcal{P}_\Lambda^\mathbb{R}$ et $\operatorname{Im}(p) \in \mathcal{P}_\Lambda^\mathbb{R}$

(b) Soit $p \in \mathcal{P}_\Lambda$. On a:

$$\operatorname{Re}(p) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in \Lambda} (c_\lambda e_\lambda + \bar{c}_\lambda e_{-\lambda}) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda e_\lambda + \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in \Lambda} \bar{c}_\lambda e_{-\lambda}.$$

Par hypothèse sur Λ , l'application $\lambda \mapsto -\lambda$ est une bijection de $\Lambda \rightarrow \Lambda$ donc

$$\operatorname{Re}(p) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda e_\lambda + \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in \Lambda} \bar{c}_{-\lambda} e_\lambda = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in \Lambda} (c_\lambda + \bar{c}_{-\lambda}) e_\lambda.$$

De même:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(p) &= \frac{1}{2i} \sum_{\lambda \in \Lambda} (c_\lambda e_\lambda - \bar{c}_\lambda e_{-\lambda}) = \frac{1}{2i} \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda e_\lambda - \frac{1}{2i} \sum_{\lambda \in \Lambda} \bar{c}_\lambda e_{-\lambda} \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda e_\lambda - \frac{1}{2i} \sum_{\lambda \in \Lambda} \bar{c}_{-\lambda} e_\lambda = \frac{1}{2i} \sum_{\lambda \in \Lambda} (c_\lambda - \bar{c}_{-\lambda}) e_\lambda \end{aligned}$$

On a aussi: $\forall \lambda \in \Lambda$,

$$c_\lambda = \frac{(c_\lambda + \bar{c}_{-\lambda})}{2} + i \frac{(c_\lambda - \bar{c}_{-\lambda})}{2i} \Rightarrow |c_\lambda| \leq \left| \frac{(c_\lambda + \bar{c}_{-\lambda})}{2} \right| + \left| \frac{(c_\lambda - \bar{c}_{-\lambda})}{2i} \right|$$

i.e., après sommation sur $\lambda \in \Lambda$:

$$\begin{aligned} N(p) &\leq N(\operatorname{Re}(p)) + N(\operatorname{Im}(p)) \stackrel{(a)}{\leq} K'(\Lambda) \sup \operatorname{Re}(p) + K'(\Lambda) \sup \operatorname{Im}(p) \leq \\ &\leq K'(\Lambda) \sup |\operatorname{Re}(p)| + K'(\Lambda) \sup |\operatorname{Im}(p)| \leq 2K'(\Lambda) \|p\|_\infty \end{aligned}$$

donc Λ est un ensemble de Sidon.

B. Polynômes de Legendre

1. (a) L'application $F : z \mapsto \frac{U_n(z)}{(z-x)^{n+1}}$ est méromorphe sur \mathbb{C} et admet $z = x$ pour unique pôle. D'après le Théorème des Résidus:

$$\int_\gamma \frac{(z^2 - 1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz = 2i\pi \operatorname{Res} \left(z \mapsto \frac{U_n(z)}{(z-x)^{n+1}} \right) \Big|_{z=x}$$

Le Développement de Taylor du polynôme U_n en $z = x$ donne:
 $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{x\}$,

$$\frac{U_n(z)}{(z-x)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U_n^{(k)}(x)}{k!(z-x)^{n+1-k}} + \frac{U_n^{(n)}(x)}{n!(z-x)} + \sum_{k=n+1}^{2n} (z-x)^{k-n-1} \frac{U_n^{(k)}(x)}{k!}$$

d'où on déduit immédiatement que

$$\operatorname{Res} \left(z \mapsto \frac{U_n(z)}{(z-x)^{n+1}} \right) \Big|_{z=x} = \frac{U_n^{(n)}(x)}{n!} =: \frac{P_n(x)}{n!}.$$

Il en résulte:

$$\int_\gamma \frac{(z^2 - 1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz = \frac{2i\pi}{n!} P_n(x).$$

- (b) La formule de (a) est vraie pour tout lacet γ de rayon $r > 0$. En particulier, le choix $r = \sqrt{1-x^2}$ donne

$$\frac{P_n(x)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} ((x + re^{i\theta})^2 - 1)^n e^{-in\theta} d\theta$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{r=\sqrt{1-x^2}}{=} \frac{1}{2\pi(1-x^2)^{n/2}} \int_{-\pi}^{\pi} \left((x + \sqrt{1-x^2}e^{i\theta})^2 - 1 \right)^n e^{-in\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi(1-x^2)^{n/2}} \int_{-\pi}^{\pi} \left((1-x^2)(e^{2i\theta} - 1) + 2x\sqrt{1-x^2}e^{i\theta} \right)^n e^{-in\theta} d\theta \\
&= \frac{(1-x^2)^{n/2}}{2\pi(1-x^2)^{n/2}} e^{in\theta} \int_{-\pi}^{\pi} \left(2i\sqrt{1-x^2} \sin \theta + 2x \right)^n e^{-in\theta} d\theta \\
&= \frac{2^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2} \sin \theta \right)^n d\theta \\
&\Rightarrow L_n(x) = \frac{P_n(x)}{2^n n!} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2} \sin \theta \right)^n d\theta \quad (1)
\end{aligned}$$

Quand $|x| = 1$, soit par exemple $x = 1$, pour γ de rayon $r > 1$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - 1)^{n+1}} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{(z + 1)^n}{(z - 1)} dz = \\
&= \text{Res} \left(z \mapsto \frac{(z + 1)^n}{(z - 1)} \right) \Big|_{z=1} = \lim_{z \rightarrow 1} (z + 1)^n = 2^n \Rightarrow \frac{P_n(1)}{n!} = 2^n
\end{aligned}$$

donc $L_n(1) = 1$.

De même:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{(z^2 - 1)^n}{(z + 1)^{n+1}} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{(z - 1)^n}{(z + 1)} dz = \\
&= \text{Res} \left(z \mapsto \frac{(z - 1)^n}{(z + 1)} \right) \Big|_{z=-1} = \lim_{z \rightarrow -1} (z - 1)^n = (-2)^n \Rightarrow \frac{P_n(-1)}{n!} = (-2)^n
\end{aligned}$$

donc $L_n(-1) = (-1)^n$. Par continuité du membre de droite dans (1), on en déduit que (1) est vrai sur $[-1, 1]$.

2. De 1.(b), on déduit immédiatement que

$$L_n(1) = 1, \quad L_n(-1) = (-1)^n.$$

Soit $x \in [-1, 1]$. De 1.(b), on déduit que

$$|L_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x + i\sqrt{1-x^2} \sin \theta|^n d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + (1-x^2)(\sin \theta)^2)^{n/2} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2)^{n/2} d\theta \leq 1$$

et les égalités: $|L_n(1)| = |L_n(-1)| = 1$ montrent que cette borne est atteinte, i.e.:

$$\sup_{x \in [-1,1]} |L_n(x)| = 1.$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in I_\eta$. D'après les calculs faits à la question 2.,

$$|L_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2)^{n/2} d\theta.$$

On remarque que

$$x \in I_\eta \iff |x| \leq 1 - \eta \iff 0 \leq x^2 \leq (1 - \eta)^2$$

donc

$$\begin{aligned} |L_n(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ((1 - \eta)^2(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2)^{n/2} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + (\eta^2 - 2\eta)(\cos \theta)^2)^{n/2} d\theta \end{aligned}$$

avec $\eta^2 - 2\eta = \eta(\eta - 1) - \eta \leq -\eta \Rightarrow$

$$|L_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \eta(\cos \theta)^2)^{n/2} d\theta$$

(b) On commence par remarquer que $\theta \mapsto 1 - \eta(\cos \theta)^2$ étant paire, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \eta(\cos \theta)^2)^{n/2} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \eta(\cos \theta)^2)^{n/2} d\theta$$

Soit $\delta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On a

$$\begin{aligned} \forall \theta \in [0, \pi], \quad \left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| \geq \delta &\Rightarrow |\cos \theta|^2 \geq \left| \cos \left(\frac{\pi}{2} \pm \delta \right) \right|^2 = |\sin \delta|^2 \\ \Rightarrow \forall \theta \in [0, \pi], \quad \left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| \geq \delta &\Rightarrow 0 < \eta |\sin \delta|^2 \leq \eta(\cos \theta)^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Il en résulte:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} (1 - \eta(\cos \theta)^2)^{n/2} d\theta \leq \frac{\pi}{2} (1 - \eta |\sin \delta|^2)^{n/2}$$

et

$$\int_{\frac{\pi}{2}+\delta}^{\pi} (1 - \eta(\cos \theta)^2)^{n/2} d\theta \leq \frac{\pi}{2} (1 - \eta |\sin \delta|^2)^{n/2}.$$

De plus:

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} (1 - \eta(\cos \theta)^2)^{n/2} d\theta \leq 2\delta.$$

Donc:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \eta(\cos \theta)^2)^{n/2} d\theta \leq \pi \frac{1}{2} (1 - \eta |\sin \delta|^2)^{n/2} + \frac{\delta}{\pi}$$

avec $0 < 1 - \eta |\sin \delta|^2 < 1 \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \eta |\sin \delta|^2)^{n/2} = 0$$

donc

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \eta(\cos \theta)^2)^{n/2} d\theta \leq \frac{\delta}{\pi}, \quad \forall \delta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[.$$

i.e.:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \eta(\cos \theta)^2)^{n/2} d\theta = 0.$$

De (a), on déduit que

$$\sup_{x \in I_\eta} |L_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \eta(\cos \theta)^2)^{n/2} d\theta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I_\eta} |L_n(x)| = 0$$

i.e. que la suite $(L_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers 0 sur I_η .

C. Opérateurs Différentiels

1. (a) On a

$$\begin{aligned} (X^2-1)U'_n &= (X^2-1)((X^2-1)^n)' = (X^2-1)(n(X^2-1)^{n-1}(2X)) = \\ &= 2nX(X^2-1) = 2nXU_n. \end{aligned}$$

(b) De (a), on déduit que

$$\begin{aligned}
& ((X^2 - 1)U'_n)^{(n+1)} = (2nXU_n)^{(n+1)} \iff \\
& \iff \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (X^2 - 1)^{(k)} U_n^{(n+2-k)} = 2n \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k X^{(k)} U_n^{(n+1-k)} \\
& \iff (X^2 - 1)U_n^{(n+2)} + 2(n+1)XU_n^{(n+1)} + n(n+1)U_n^{(n)} = \\
& \quad = 2nXU_n^{(n+1)} + 2n(n+1)U_n^{(n)} \\
& \iff (X^2 - 1)U_n^{(n+2)} + 2XU_n^{(n+1)} - n(n+1)U_n^{(n)} = 0 \\
& \iff (X^2 - 1)P_n'' + 2XP_n' - n(n+1)P_n = 0 \iff D(L_n) = -n(n+1)L_n
\end{aligned}$$

2. Soit $f, g \in V$. On a

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (1-t^2)f''(t)g(t) dt &= - \int_{-1}^1 (1-t^2)f'(t)g'(t) dt + 2 \int_{-1}^1 tf'(t)g(t) dt + (1-t^2)f'(t)g(t) \Big|_{-1}^1 = \\
&= - \int_{-1}^1 (1-t^2)f'(t)g'(t) dt + 2 \int_{-1}^1 tf'(t)g(t) dt
\end{aligned}$$

donc

$$\int_{-1}^1 D(f)(t)g(t) dt = \int_{-1}^1 (1-t^2)f''(t)g(t) dt - 2 \int_{-1}^1 tf'(t)g(t) dt = - \int_{-1}^1 (1-t^2)f'(t)g'(t) dt$$

L'expression du membre de droite étant symétrique en f et g on en déduit que

$$\int_{-1}^1 D(f)(t)g(t) dt = \int_{-1}^1 f(t)D(g)(t) dt$$

3. De 1.(b), on déduit que $\{-n(n+1), n \in \mathbb{N}\} \subset \Sigma$.

Soit $\lambda \in \Sigma$ et soit $f \in V_\lambda \setminus \{0\}$. D'après 2.: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 D(f)(t)L_n(t) dt &\stackrel{2.}{=} \int_{-1}^1 f(t)D(L_n)(t) dt \\
\iff \lambda \int_{-1}^1 f(t)L_n(t) dt &= -n(n+1) \int_{-1}^1 f(t)L_n(t) dt
\end{aligned}$$

$$\iff (\lambda + n(n+1)) \int_{-1}^1 f(t)L_n(t)dt = 0.$$

Soit $u = \operatorname{Re}(f)$, $v = \operatorname{Im}(f)$. Il en résulte que

$$\int_{-1}^1 u(t)L_n(t)dt + i \int_{-1}^1 v(t)L_n(t)dt = 0$$

avec

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u(t)L_n(t)dt \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 v(t)L_n(t)dt \in \mathbb{R} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{-1}^1 u(t)L_n(t)dt = \int_{-1}^1 v(t)L_n(t)dt = 0. & \end{aligned}$$

Si $\lambda \notin \{-n(n+1), n \in \mathbb{N}\}$, alors:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-1}^1 u(t)L_n(t)dt = \int_{-1}^1 v(t)L_n(t)dt = 0.$$

On remarque que: L_n est un polynôme de degré n , $\forall n \in \mathbb{N}$, ce qui fait de $(L_n)_{n \geq 0}$ une base de $\mathbb{R}[X]$. Comme l'ensemble des fonctions polynômes est dense dans $\mathcal{C}^0([-1, 1])$ d'après le Théorème de Stone-Weierstrass, il en résulte que $u = v = 0$, i.e. $f = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $f \in V_\lambda \setminus \{0\}$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\lambda = -n(n+1)$.

4. De 2., on déduit que $\mathbb{C} L_n \subset V_{-n(n+1)}$. Soit y une solution de (E) et soit W le Wronskien de la paire (L_n, y) de solutions de (E). Par définition:

$$W = \begin{vmatrix} y & L_n \\ y' & L_n' \end{vmatrix}.$$

On a: $\forall x \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} (1-x^2)W'(x) &= y(x)L_n''(x) - y''(x)L_n(x) = 2x(y(x)L_n'(x) - y'(x)L_n(x)) \\ &= 2xW(x) \Rightarrow W'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)}W(x), \quad \forall x \in]-1, 1[. \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad W(x) = \frac{C}{(1-x^2)}.$$

Par définition de V , $W \in \mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{C}) \subset \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{C})$. Ceci est possible ssi $C = 0$, i.e. ssi $y \in \mathbb{C}L_n$.

5. On cherche si \mathcal{E} admet des solutions de la forme: $u(t, x) = a(t)b(x)$ avec $a, b \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times [-1, 1], \mathbb{C})$. Le calcul donne:

$$a''b = ((1 - x^2)b'' - 2xb')a.$$

Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times [-1, 1]$ t.q. $u(t_0, x_0) \neq 0$ et soit $Q =]t_1, t_2[\times]x_1, x_2[\subset \mathbb{R} \times [-1, 1]$ t.q. $(t_0, x_0) \in Q$ et

$$\forall (t, x) \in Q, \quad u(t, x) \neq 0.$$

Un tel pavé Q existe par continuité de u . Alors;

$$\forall (t, x) \in Q, \quad \frac{a''(t)}{a(t)} = (1 - x^2) \frac{b''(x)}{b(x)} - 2x \frac{b'(x)}{b(x)}.$$

Dans Q la fonction $t \mapsto \frac{a''(t)}{a(t)}$ est une fonction continue à la fois de la variable t et de la variable indépendante x , donc constante: il existe une constante $\sigma \in \mathbb{C}$ t.q.

$$\forall (t, x) \in Q, \quad \frac{a''(t)}{a(t)} = (1 - x^2) \frac{b''(x)}{b(x)} - 2x \frac{b'(x)}{b(x)} = \sigma.$$

On en déduit en particulier:

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times [-1, 1], \quad (1 - x^2)b''(x) - 2xb'(x) = \sigma b(x) \underset{3}{\Rightarrow} \sigma \in \Sigma.$$

Si $\sigma = 0$, alors $a'' = 0 \Rightarrow a(t) = \lambda t + \mu$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $b \in \mathbb{C}L_0$, i.e. b est constante, donc, u est de la forme: $u(t, x) = \lambda t + \mu$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times [-1, 1]$. Si $K \neq 0$, soit $\sigma = -n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors $b \in \mathbb{C}L_n$ et $a''(t) = -n(n+1)a \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ t.q.

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times [-1, 1], \quad a(t) = \left(\alpha e^{i\sqrt{n(n+1)}t} + \beta e^{-i\sqrt{n(n+1)}t} \right),$$

donc u est de la forme

$$(t, x) \mapsto L_n(x) \left(\alpha e^{i\sqrt{n(n+1)}t} + \beta e^{-i\sqrt{n(n+1)}t} \right), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2,$$

II. Construction d'ensembles de Sidon

A. Théorème d'approximation de Kronecker et application

1. (a) Par hypothèse, il existe une famille $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{Q}^n$ t.q. $\sum_{j=1}^n \lambda_j \omega_j = 0$. En multipliant les deux membres de l'égalité par le dénominateur commun des λ_j , on se ramène au cas où $\lambda_j \in \mathbb{Z}, \forall j \in [[1, n]]$. On pose $\tilde{\ell}(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, \forall x = (x_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n$. Par construction, $\tilde{\ell}(\omega) = 0$. On en déduit:

$$\tilde{\ell}(G_\omega) = \underbrace{\mathbb{R}\tilde{\ell}(\omega)}_{=0} + 2\pi\tilde{\ell}(\mathbb{Z}^n) = 2\pi\tilde{\ell}(\mathbb{Z}^n) \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\tilde{\ell}(G_\omega) = \tilde{\ell}(\mathbb{Z}^n)$$

avec $\lambda_j \in \mathbb{Z}, \forall j \in [[1, n]] \Rightarrow \tilde{\ell}(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}$. On pose $\ell = \frac{1}{2\pi}\tilde{\ell}$ et alors:

$$\ell(G_\omega) = \tilde{\ell}(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}.$$

- (b) Par continuité de ℓ :

$$\ell(\overline{G_\omega}) \subset \overline{\ell(G_\omega)} = \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$$

car \mathbb{Z} est fermé dans \mathbb{R} . De plus: $\ell \neq 0 \Rightarrow \ell(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, donc $\overline{G_\omega} \neq \mathbb{R}^n$.

2. (a) Pour tout $T > 0$, J_T est multilinéaire, donc il suffit de raisonner sur la base $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$. Soit $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$. On a

$$J_T(e_{k_1}, \dots, e_{k_n}) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega \cdot kt} dt$$

avec $\omega \cdot k \neq 0$ si $k \neq 0$ car ω est \mathbb{Q} -libre. Le calcul direct donne:
 $\forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$,

$$J_T(e_{k_1}, \dots, e_{k_n}) = \frac{1}{T} \frac{e^{i\omega \cdot kT} - 1}{i\omega \cdot k}$$

donc

$$|J_T(e_{k_1}, \dots, e_{k_n})| \leq \frac{1}{T} \frac{2}{|\omega \cdot k|} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0.$$

De plus: $\forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}, \exists j_0 \in [[1, n]]$ t.q. $k_{j_0} \neq 0$ et alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e_{k_{j_0}}(t) dt = 0 \Rightarrow \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e_{k_j}(t) dt \right) = 0.$$

Si $k = 0$, alors $J_T(e_{k_1}, \dots, e_{k_n}) = 1, \forall T > 0$, et

$$\forall j \in [[1, n]], \quad k_j = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e_{k_j}(t) dt = 1.$$

Finalement dans tous les cas:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} J_T(e_{k_1}, \dots, e_{k_n}) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e_{k_j}(t) dt \right) =: J_\infty(e_{k_1}, \dots, e_{k_n}).$$

(b) Soit $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{C}^n$. Par densité des polynômes trigonométriques dans \mathcal{C} , il existe une suite $(f_k)_{k \geq 0} \in (\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}^n)^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} \|f(t) - f_k(t)\|_n = 0$$

où $\|\cdot\|_n$ est la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n . Pour tout $T > 0$, J_T est multilinéaire donc continue sur \mathcal{C}^n . On en déduit: $\forall k \geq 0$,

$$|J_T(f) - J_\infty(f)| \leq |J_T(f) - J_T(f_k)| + |J_T(f_k) - J_\infty(f_k)| + |J_\infty(f_k) - J_\infty(f)|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit k_0 t.q. $\sup_{0 \leq t \leq 2\pi} \|f(t) - f_k(t)\|_n < \varepsilon, \forall k \geq k_0$.
On fixe $k \geq k_0$. Alors: $\forall T > 0$,

$$|J_T(f) - J_T(f_k)| \leq C \sup_{t \in [0, 2\pi]} \|f(t) - f_k(t)\|_n \leq C\varepsilon,$$

et

$$|J_\infty(f) - J_\infty(f_k)| \leq C \sup_{t \in [0, 2\pi]} \|f(t) - f_k(t)\|_n \leq C\varepsilon,$$

On en déduit:

$$\limsup_{T \rightarrow +\infty} |J_T(f) - J_\infty(f)| \leq 2\varepsilon + \lim_{T \rightarrow +\infty} |J_T(f_k) - J_\infty(f_k)| \leq 2\varepsilon..$$

Ceci étant vrai $\forall \varepsilon > 0$, on en déduit que

$$\limsup_{T \rightarrow +\infty} |J_T(f) - J_\infty(f)| = 0.$$

3. Les g_j étant continues sur le compact $[0, 2\pi]$, elles sont uniformément continues, ainsi que les applications $t \mapsto g_j(\omega_j t)$, $j \in [[1, n]]$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $j \in [[1, n]]$, il existe $\eta_j > 0$ t.q.: $\forall t, t' \in [0, 2\pi]$,

$$|t - t'| < \eta_j \Rightarrow |g_j(\omega_j t) - g_j(\omega_j t')| \leq \varepsilon.$$

Soit $\eta = \min_{1 \leq j \leq n} \eta_j$. Alors: $\forall t, t' \in [0, 2\pi]$,

$$|t - t'| < \eta \Rightarrow |g_j(\omega_j t) - g_j(\omega_j t')| \leq \varepsilon, \quad \forall j \in [[1, n]].$$

Du Théorème de Heine, on déduit également que pour tout $j \in [[1, n]]$, il existe $t_j \in [0, 1\pi]$ t.q. $g_j(\omega_j t_j) = \sup g_j$. Soit $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. De 1.(b), on déduit qu'il existe $s\omega + 2\pi v \in G_\omega$ t.q. $\|t - s\omega - 2\pi v\| < \eta$, et alors, par périodicité: $\forall j \in [[1, n]]$,

$$|t_j - s\omega_j - 2\pi v_j| \leq \|t - s\omega - 2\pi v\| < \eta \Rightarrow$$

$$|g_j(\omega_j t) - g_j(\omega_j s)| = |g_j(\omega_j t) - g_j(\omega_j s + 2\pi v_j)| < \varepsilon.$$

On en déduit:

$$|g(s) - \sum_{j=1}^n g_j(\omega_j t_j)| \leq \sum_{j=1}^n |g_j(\omega_j s) - g_j(\omega_j t_j)| \leq n\varepsilon,$$

i.e., par le choix des t_j , $j \in [[1, n]]$,

$$|g(s) - \sum_{j=1}^n \sup g_j| \leq n\varepsilon.$$

Il en résulte:

$$\sup g \geq g(s) \geq \sum_{j=1}^n \sup g_j - n\varepsilon.$$

Ceci étant vrai $\forall \varepsilon > 0$, on en déduit que $\sup g \geq \sum_{j=1}^n \sup g_j$.

On a aussi immédiatement: $\sup g \leq \sum_{j=1}^n \sup g_j$ donc $\sup g = \sum_{j=1}^n \sup g_j$.

4. Soit $\lambda \in \Lambda$ et soit $\gamma \in \Gamma$ t.q. $\lambda \in \gamma\Lambda_\gamma$. Comme Λ_γ est symétrique par hypothèse, $-\lambda \in \gamma\Lambda_\gamma \subset \Lambda$, ie. Λ est symétrique.

Soit $p \in \mathcal{P}_\Lambda^{\mathbb{R}}$, $p = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda e_\lambda$. On remarque que $\gamma_1\Lambda_{\gamma_1} \cap \gamma_2\Lambda_{\gamma_2} = \emptyset$, $\forall \gamma_1 \neq \gamma_2$. Sinon: soit $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ t.q. $\gamma_1\Lambda_{\gamma_1} \cap \gamma_2\Lambda_{\gamma_2} \neq \emptyset$ et soit

$\lambda \in \gamma_1 \Lambda_{\gamma_1} \cap \gamma_2 \Lambda_{\gamma_2}$. Il existe $\lambda_1 \in \Lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_2$ t.q. $\lambda = \gamma_1 \lambda_1 = \gamma_2 \lambda_2$ avec $\lambda_1 \in \mathbb{Z}^*$ et $\lambda_2 \in \mathbb{Z}^*$ par hypothèse. On en déduit: $0 =: \lambda_1 \gamma_1 - \lambda_2 \gamma_2$ avec $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, en contradiction avec Γ \mathbb{Q} -libre. On en déduit que la réunion $\Lambda = \cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \Lambda_\gamma$ est disjointe et que p se décompose sous la forme:

$$p = \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\lambda \in \gamma \Lambda_\gamma} c_\lambda e_\lambda =: \sum_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma$$

avec:

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad p_\gamma \in \mathcal{P}_{\gamma \Lambda_\gamma}$$

De plus:

$$p \in \mathcal{P}_\Lambda^{\mathbb{R}} \Rightarrow p = \operatorname{Re}(p) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{Re}(p_\gamma)$$

avec:

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad p_\gamma \in \mathcal{P}_{\gamma \Lambda_\gamma} \xrightarrow{I.A.2(a)} \operatorname{Re}(p_\gamma) \in \mathcal{P}_{\gamma \Lambda_\gamma}^{\mathbb{R}}.$$

et

$$\operatorname{Re}(p_\gamma) = \sum_{\lambda \in \gamma \Lambda_\gamma} \frac{1}{2}(c_\lambda + \bar{c}_{-\lambda})e_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda_\gamma} \frac{1}{2}(c_{\gamma\lambda} + \bar{c}_{-\gamma\lambda})e_{\gamma\lambda}$$

donc:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re}(p_\gamma)(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda_\gamma} \frac{1}{2}(c_{\gamma\lambda} + \bar{c}_{-\gamma\lambda})e_\lambda(\gamma t) =: g_\gamma(\gamma t), \quad g_\gamma \in \mathcal{P}_{\Lambda_\gamma}^{\mathbb{R}}$$

On en déduit, compte tenu de 3.:

$$g_\gamma \in \mathcal{P}_{\Gamma_\gamma}^{\mathbb{R}} \Rightarrow \sup p = \sum_{\gamma \in \Gamma} \sup g_\gamma$$

On a

$$\begin{aligned} N(p) &\leq \sum_{\gamma \in \Gamma} N(\operatorname{Re}(p_\gamma)) = \sum_{\gamma \in \Gamma} N(g_\gamma) \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} K'(\Lambda_\gamma) \sup g_\gamma \leq \\ &\leq c \sum_{\gamma \in \Gamma} \sup g_\gamma = c \sup p. \end{aligned}$$

Finalement, Λ est un ensemble de Sidon réel de constante $K'(\Lambda) \leq c$.

B.

1. (a) Par définition:

$$\hat{R}_k^\varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R_k^\varphi(t) dt.$$

Dans le développement de $R_k^\varphi(t)$ suivant la famille $e^{\pm(i\lambda_j t \pm \varphi_j)}$, $j \in [[1, k]]$, l'unique terme de contribution non nulle est 1, donc $\hat{R}_k^\varphi(0) = 1$.

Soit $m \in [[1, k]]$. Par définition:

$$\hat{R}_k^\varphi(\lambda_m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_k^\varphi(t) e^{-i\lambda_m t} dt.$$

On remarque que la famille Λ étant dissociée, $\lambda_m = \sum_{j \geq 1} \varepsilon_j \lambda_j$ avec $\varepsilon_j = \delta_{j,m}$ est l'unique décomposition admissible de λ_m . Dans le développement de $R_k^\varphi(t)$, l'unique terme de contribution non nulle est donc $\frac{1}{2} e^{i(\lambda_m t + \varphi_m)}$. On en déduit que

$$\hat{R}_k^\varphi(\lambda_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} e^{i(\lambda_m t + \varphi_m)} e^{-i\lambda_m t} dt = \frac{1}{2} e^{i\varphi_m}.$$

Le même raisonnement pour $-\lambda_m$ donne:

$$\hat{R}_k^\varphi(-\lambda_m) = \frac{1}{2} e^{-i\varphi_m}.$$

- (b) Soit $p \in \mathcal{P}_\Lambda^{\mathbb{R}}$. On a:

$$p = \sum_{m=1}^n (c_{\lambda_m} e_{\lambda_m} + c_{-\lambda_m} e_{-\lambda_m})$$

avec $\overline{c_{\lambda_m} e_{\lambda_m}} = \bar{c}_{\lambda_m} e_{-\lambda_m} \Rightarrow \bar{c}_{\lambda_m} = c_{-\lambda_m}$ par unicité de la décomposition de p dans la base $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Par définition: $\forall m \geq 1$,

$$\begin{aligned} \hat{p}(\lambda_m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) e_{-\lambda_m}(t) dt = \sum_{j=1}^n c_{\lambda_j} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_{\lambda_j - \lambda_m}(t) dt + \\ &+ \sum_{j=1}^n c_{-\lambda_j} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_{-\lambda_j - \lambda_m}(t) dt = c_{\lambda_m} \end{aligned}$$

donc

$$p = \sum_{m \geq 1} (\hat{p}(\lambda_m) e_{\lambda_m} + \hat{p}(-\lambda_m) e_{-\lambda_m})$$

avec: $\forall m \geq 1, \hat{p}(-\lambda_m) = \overline{\hat{p}(\lambda_m)}$. On en déduit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) R_k^\varphi(t) dt &= \sum_{m \geq 1} (\hat{p}(\lambda_m) \hat{R}_k^\varphi(-\lambda_m) + \hat{p}(-\lambda_m) \hat{R}_k^\varphi(\lambda_m)) \\ &\stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2} \sum_{m \geq 1} (\hat{p}(\lambda_m) e^{-i\varphi_m} + \hat{p}(-\lambda_m) e^{i\varphi_m}) \end{aligned}$$

Pour tout $m \geq 1$, on pose: $\hat{p}(\lambda_m) = |\hat{p}(\lambda_m)| e^{i\theta_m}$ et alors

$$\hat{p}(-\lambda_m) = \overline{\hat{p}(\lambda_m)} = |\hat{p}(\lambda_m)| e^{-i\theta_m}.$$

On choisit: $\varphi_m = \theta_m, \forall m \geq 1$, et alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) R_k^\varphi(t) dt = \sum_{m \geq 1} |\hat{p}(\lambda_m)|.$$

(c) Soit $p \in \mathcal{P}_\Lambda^{\mathbb{R}}$. De (b), on déduit que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) R_k^\varphi(t) dt = \sum_{m \geq 1} |\hat{p}(\lambda_m)|$$

avec

$$p \in \mathcal{P}_\Lambda^{\mathbb{R}} \Rightarrow \hat{p}(-\lambda_m) = \overline{\hat{p}(\lambda_m)}, \quad \forall m \geq 1$$

donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) R_k^\varphi(t) dt = \frac{1}{2} N(p) \leq \sup p \hat{R}_k^\varphi(0)$$

car $R_k^\varphi \geq 0$, i.e., compte tenu de (a):

$$\frac{1}{2} N(p) \leq \sup p.$$

Comme de plus Λ est symétrique, on en déduit que Λ est un ensemble de Sidon réel de constante $K'(\Lambda) \leq 2$.

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On suppose que n se décompose sous la forme d'une somme presque nulle $n = \sum_{j \geq 1} \varepsilon_j \lambda_j$ avec $\varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$, $\forall j \geq 1$. Si n admet deux telles décompositions, soit:

$$n = \sum_{j \geq 1} \varepsilon_j \lambda_j = \sum_{j \geq 1} \varepsilon'_j \lambda_j$$

alors

$$0 = \sum_{j \geq 1} (\varepsilon_j - \varepsilon'_j) \lambda_j.$$

Donc, la somme étant presque nulle, il existe $N > 0$ t.q. $\sum_{j=1}^N (\varepsilon_j - \varepsilon'_j) \lambda_j = 0$. Alors

$$\begin{aligned} \varepsilon_N - \varepsilon'_N &= - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\lambda_j}{\lambda_N} (\varepsilon_j - \varepsilon'_j) \\ \Rightarrow |\varepsilon_N - \varepsilon'_N| &\leq 2 \sum_{j=1}^{N-1} 3^{j-N} = \frac{2}{3^{N-1}} \frac{3^{N-1} - 1}{2} < 1 \end{aligned}$$

donc $|\varepsilon_N - \varepsilon'_N| < 1 \Rightarrow \varepsilon_N = \varepsilon'_N$. Par récurrence descendante sur N , on en déduit que $\varepsilon_j = \varepsilon'_j$, $\forall j \geq 1$, i.e. que la famille Λ est dissociée.

III. Un ensemble de Sidon d'irrationnels quadratiques

A.

1. (a) On suppose que 0 est isolé dans $G \cap \mathbb{R}^+$. Donc il existe $r > 0$ t.q. $G \cap [0, r[= \{0\}$. Soit $c = \inf(G \cap [0, +\infty[)$. Si $c \notin G$, alors il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0} \in G^{\mathbb{N}}$ t.q. $x_n \rightarrow c$. Soit $\varepsilon \in]0, c[$. Il existe $n_0 > 0$ t.q. $x_n \in]c, c + \varepsilon[$, $\forall n \geq n_0$. Alors, $\forall n \geq n_0$, $x_n - c \in]0, \varepsilon[\cap G \subset]0, c[\cap G$, ce qui contredit le choix de c . Donc $c \in G$ et $c = \min(G \cap]0, +\infty[)$. En particulier: $c\mathbb{Z} \subset G$. On suppose que $c\mathbb{Z} \neq G$. Soit alors $x \in G \setminus c\mathbb{Z}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ t.q. $kc < x < (k+1)c$. On en déduit: $x - kc \in G \cap]0, c[$, ce qui contredit la définition de c . Donc $G = c\mathbb{Z}$.

(b) Soit H un sous-groupe de (\mathbb{R}_*^+, \times) t.q. 1 soit un point isolé de H et soit $\ln : H \rightarrow \mathbb{R}$, $g \mapsto \ln(g)$. L'application \ln est un isomorphisme de groupes de (H, \times) dans $(\mathbb{R}, +)$ d'inverse $g \mapsto e^g$, et $\ln(H)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Par hypothèse, 1 est isolé dans H . Soit $H \cap [1, r[= \{1\}$ pour un certain $r > 0$. Alors $\ln(H \cap [1, r[) = \ln(H) \cap [0, \ln(r)[= \{0\}$ par croissance de \ln , i.e. 0 est isolé dans $\ln(H)$. De (a), on déduit qu'il existe $c \in \mathbb{Z}$ t.q. $\ln(H) = c\mathbb{Z}$, i.e. $H = e^{c\mathbb{Z}} = (e^c)^{\mathbb{Z}}$.

2. (a) Par hypothèse: $x + y\sqrt{m} > 1 \Rightarrow x - y\sqrt{m} = \frac{1}{x+y\sqrt{m}} \in]0, 1[$. De plus $-x + y\sqrt{m} = -(x - y\sqrt{m}) < 0$. Finalement:

$$-x + y\sqrt{m} < 0 < x - y\sqrt{m} < 1 < x + y\sqrt{m}.$$

On en déduit:

$$x = \frac{1}{2}(x - y\sqrt{m}) + \frac{1}{2}(x + y\sqrt{m}) > 0$$

$$y = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{m}) - \frac{1}{2}(x - y\sqrt{m}) > 0.$$

Finalement: $x > 0$ et $y > 0$ avec $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \Rightarrow x \geq 1$ et $y \geq 1$.

On en déduit:

$$x + y\sqrt{m} \geq 1 + \sqrt{m}.$$

(b) Soit $(x + y\sqrt{m}, x' + y'\sqrt{m}) \in G_m^2$. On a:

$$(x + y\sqrt{m})(x' + y'\sqrt{m}) = xx' + yy'm + (yx' + y'x)\sqrt{m}$$

avec

$$\begin{aligned} & (xx' + yy'm)^2 - (yx' + y'x)^2 m = \\ &= (xx' + yy'm + (yx' + y'x)\sqrt{m})(xx' + yy'm - (yx' + y'x)\sqrt{m}) = \\ &= (x + y\sqrt{m})(x' + y'\sqrt{m})(x - y\sqrt{m})(x' - y'\sqrt{m}) = \\ &= (x^2 - y^2 m)(x'^2 - y'^2 m) = 1. \end{aligned}$$

De plus: $\forall (x + y\sqrt{m}) \in G_m$,

$$\frac{1}{x + y\sqrt{m}} = x - y\sqrt{m} \in G_m$$

donc G_m est un sous-groupe de (\mathbb{R}_*^+, \times) . Si $x + y\sqrt{m} < 1$, alors $(x + y\sqrt{m})^{-1} = x - y\sqrt{m} > 1$, donc quitte à échanger y et $-y$ on peut supposer que $x + y\sqrt{m} > 1$. De (a), on déduit que $x + y\sqrt{m} \geq 1 + \sqrt{m}$, i.e. $G_m \cap [1, 1 + \sqrt{m}[= \{1\}$ et 1 est isolé dans $G \cap [1, +\infty[$. De 1.(b), on déduit qu'il existe $\gamma_m \in G$ t.q. $G = \gamma_m^{\mathbb{Z}}$ et alors $\gamma_m \geq 1 + \sqrt{m}$.

3. Soit $q \in Q$. On a: $\forall \lambda \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \lambda \in A_q &\iff \exists n \in \mathbb{N}^* \quad \text{t.q.} \quad (2n + 1)^2 - 4q\lambda^2 = 1 \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N}^* \quad \text{t.q.} \quad (2n + 1) \pm 2\lambda\sqrt{q} \in G_{4q} \end{aligned}$$

Si $G_{4q} = \{1\}$, alors: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$2n + 1 \pm 2\lambda\sqrt{q} = 1 \iff n = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = 0.$$

Contradiction. Donc $A_{4q} = \emptyset$.

Sinon, d'après 2.(b), il existe $\gamma_{4q} \in G_{4q}$ t.q. $\gamma_{4q} \geq 1 + 2\sqrt{q}$ et $G_{4q} = \gamma_{4q}^{\mathbb{Z}}$. Soit $\lambda_{j,q} \in \mathbb{N}^*$ associé à γ_{4q}^j avec $j \geq 1$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$ t.q.:

$$2n + 1 \pm 2\lambda_{j,q}\sqrt{q} = \gamma_{4q}^{\pm j}$$

Alors:

$$\lambda_{j,q} = \frac{\gamma_{4q}^j - \gamma_{4q}^{-j}}{4\sqrt{q}}.$$

On en déduit: $\forall j \geq 1$,

$$\frac{\lambda_{j+1,q}}{\lambda_{j,q}} - \gamma_{4q} = \frac{\gamma_{4q}^{1-j} - \gamma_{4q}^{-1-j}}{\gamma_{4q}^j - \gamma_{4q}^{-j}} = \gamma_{4q}^{-j} \frac{\gamma_{4q} - \gamma_{4q}^{-1}}{\gamma_{4q}^j - \gamma_{4q}^{-j}} = \frac{\gamma_{4q} - \gamma_{4q}^{-1}}{\gamma_{4q}^{2j} - 1} > 0$$

car $\gamma_{4q} > 1$, d'où on déduit:

$$\frac{\lambda_{j+1,q}}{\lambda_{j,q}} \geq \gamma_{4q} \underset{2.(a)}{\geq} 1 + 2\sqrt{q}$$

i.e. $\lambda_{j+1,q} \geq (1 + 2\sqrt{q})\lambda_{j,q}$.

B.

1. Soit $\sqrt{b} = c\sqrt{a} + d \in \mathbb{K}(\sqrt{a})$ avec $c, d \in \mathbb{K}$. On a $b = (c\sqrt{a} + d)^2 = c^2a + 2cd\sqrt{a} + d^2$ et $\sqrt{b} \notin \mathbb{K} \Rightarrow d = 0$ et $c \neq 0$, i.e. $\sqrt{b} = c\sqrt{a}$ et $\sqrt{ab} = ca \in \mathbb{K}$.

Inversement si $\sqrt{ab} \in \mathbb{K}$, alors $\exists c \in \mathbb{K}$ t.q.:

$$\sqrt{b} = \frac{c}{\sqrt{a}} = c \frac{\sqrt{a}}{a} \in \mathbb{K}(\sqrt{a}).$$

2. (a) On note $\mathcal{P}(m)$ la propriété: si $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_m$ sont $n + m$ nombres premiers distincts, $n \geq 1$, alors $\sqrt{q_1 \cdots q_n} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_m})$. Soient $p_1, q_1, \dots, q_n, n+1$ nombres premiers distincts. On suppose que $\sqrt{q_1 \cdots q_n} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p_1})$, alors

$$\sqrt{q_1 \cdots q_n} \notin \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \sqrt{p_1} \notin \mathbb{Q} \xrightarrow{1.} \sqrt{p_1 q_1 \cdots q_n} \in \mathbb{Q}$$

en contradiction avec $p_1 q_1 \cdots q_n$ nombres premiers distincts. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(m)$ vraie. Soient $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, n + m + 1$ nombres premiers distincts. On suppose que $\sqrt{q_1 \cdots q_n} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_m}, \sqrt{p_{m+1}}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_m})(\sqrt{p_{m+1}})$. Par hypothèse de récurrence:

$$\begin{aligned} \sqrt{q_1 \cdots q_n} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_m}) \quad \text{et} \quad \sqrt{p_{m+1}} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_m}) \\ \xrightarrow{1.} \sqrt{q_1 \cdots q_n p_{m+1}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_m}) \end{aligned}$$

ce qui contredit à nouveau l'hypothèse de récurrence. Donc $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.

Par récurrence sur $m \geq 1$; $\mathcal{P}(m)$ est vraie $\forall m \geq 1$. en contradiction avec p_1, q_1, \dots, q_n nombres premiers distincts. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- (b) On suppose qu'il existe $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$ t.q. $\sum_{i=1}^n \lambda_i \sqrt{q_i} = 0$. Quitte à diviser q_1, \dots, q_n par leur plus grand commun diviseur, on peut supposer que q_1, \dots, q_n sont premiers entre eux. On suppose que $\lambda_{i_0} \neq 0$ pour un indice $i_0 \in [[1, n]]$. Alors

$$\sqrt{q_{i_0}} = - \sum_{i \neq i_0} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} \sqrt{q_i} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_m})$$

où $\{p_1, \dots, p_m\}$ désigne l'ensemble des facteurs premiers de la famille $\{q_i, i \neq i_0\}$. De (a), on déduit que q_{i_0} est divisible par l'un au moins des $p_i, i \in [[1, m]]$, ce qui contredit q_1, \dots, q_n premiers entre eux. Donc la famille $(\sqrt{q})_{q \in Q}$ est \mathbb{Q} -libre.

3. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la décomposition en facteurs premiers de $n(n+1)$ est de la forme $n(n+1) = q\lambda^2$ avec $\lambda \in \mathbb{N}^*$, où q , resp. λ^2 , est le produit des facteurs d'exposants impairs, resp. pairs. Nécessairement $q \in Q$ et de A.3., on déduit que λ est lié à $q \in Q$ par la condition $\lambda \in A_q$. On en déduit que $\Lambda \cap \mathbb{R}_*^+ = \cup_{q \in Q} A_q$. D'après A.3, $A_q \neq \emptyset$ est de la forme: $A_q = \{\lambda_{j,q}, j \geq 1\} \subset \mathbb{N}^*$ avec $\lambda_{j+1,q} \geq (1 + 2\sqrt{q})\lambda_{j,q} \geq 3\lambda_{j,q}, \forall j \geq 1$. De II.B.2., on déduit que Λ est dissociée. De II.B.2.(c), on déduit que Λ est un ensemble de Sidon réel et que $K'(\Lambda) \leq 2$.

IV. Polynômes trigonométriques aléatoires

A. Inégalité de Bernstein faible

1. On a: $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$p'(t) = \sum_{k=1}^n ika_k e^{ikt} \Rightarrow |p'(t)| \leq \sum_{k=1}^n k|a_k| \leq \sum_{k=1}^n k\|p\|_\infty = \frac{n(n+1)}{2}\|p\|_\infty.$$

2. Soit $t_0 \in [0, 2\pi]$ t.q. $p(t_0) = \|p\|_\infty$, qui existe car p est continue sur le compact $[0, 2\pi]$. On a: $\forall t \in S := [t_0 - \frac{1}{2\alpha_n}, t_0 + \frac{1}{2\alpha_n}]$, en appliquant la formule des AF:

$$|p(t) - p(t_0)| \leq |t - t_0|\|p'\|_\infty \leq \alpha_n|t - t_0|\|p\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|p\|_\infty$$

$$\Rightarrow |p(t_0)| = \|p\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|p\|_\infty + |p(t)|$$

donc

$$|p(t)| \geq \frac{1}{2}\|p\|_\infty.$$

B.

1. On a: $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad e^{x^2/2} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

avec: $\forall n \geq 1$,

$$\frac{2^n n!}{(2n)!} = \frac{2^n}{\prod_{k=1}^n (n+k)} \leq \frac{2^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{2}{n+1}\right)^n < 1$$

donc $\frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{x^{2n}}{2^n n!}$, $\forall n \geq 1 \Rightarrow \cosh x \leq e^{x^2/2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

2. Les X_k étant indépendantes, on a:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\operatorname{Re}(Z)}) &= \mathbb{E}(e^{\sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(a_k X_k)}) = \mathbb{E}(\prod_{k=1}^n e^{\operatorname{Re}(a_k X_k)}) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{\operatorname{Re}(a_k X_k)}) \\ &= \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} e^{\operatorname{Re}(a_k)} + \frac{1}{2} e^{-\operatorname{Re}(a_k)} \right) = \prod_{k=1}^n \cosh(\operatorname{Re}(a_k)) \end{aligned}$$

3. (a) Soit $\lambda > 0$. On a

$$\mathbb{E}_{\lambda \in \mathbb{R}}(e^{\lambda \operatorname{Re}(Z)}) = \mathbb{E}(e^{\operatorname{Re}(\lambda Z)}) = \prod_{k=1}^n \cosh(\operatorname{Re}(\lambda a_k)).$$

De même:

$$\mathbb{E}_{\lambda \in \mathbb{R}}(e^{-\lambda \operatorname{Re}(Z)}) = \mathbb{E}(e^{\operatorname{Re}(-\lambda Z)}) = \prod_{k=1}^n \cosh(\operatorname{Re}(-\lambda a_k))$$

donc, en remarquant que $e^{\pm \lambda \operatorname{Re} Z} > 0$:

$$\mathbb{E}(e^{\lambda |\operatorname{Re}(Z)|}) \leq \mathbb{E}(e^{\lambda \operatorname{Re}(Z)}) + \mathbb{E}(e^{-\lambda \operatorname{Re}(Z)}) = 2 \prod_{k=1}^n \cosh(\operatorname{Re}(\lambda a_k))$$

car $x \mapsto \cosh x$ est paire, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\lambda |\operatorname{Re}(Z)|}) &\leq \frac{2 \prod_{k=1}^n e^{\frac{1}{2} |\operatorname{Re}(\lambda a_k)|^2}}{1} = 2 \prod_{k=1}^n e^{\frac{\lambda^2}{2} |\operatorname{Re}(a_k)|^2} = \\ &= 2 e^{\sum_{k=1}^n \frac{\lambda^2}{2} |\operatorname{Re}(a_k)|^2} \end{aligned}$$

(b) On a, la fonction exponentielle étant croissante sur \mathbb{R} :

$$\mathbb{E}(e^{\lambda|Z|}) \leq \mathbb{E}(e^{\lambda|\operatorname{Re}Z| + \lambda|\operatorname{Im}Z|}) = \mathbb{E}(e^{\lambda|\operatorname{Re}Z|} e^{\lambda|\operatorname{Im}Z|})$$

et le même raisonnement que pour 2.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\operatorname{Im}Z}) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} e^{\operatorname{Im}(a_k)} + \frac{1}{2} e^{-\operatorname{Im}(a_k)} \right) = \sum_{k=1}^n \cosh(\operatorname{Im}(a_k)) \\ \Rightarrow \mathbb{E}(e^{\lambda \operatorname{Im}(Z)}) &= \mathbb{E}(e^{\operatorname{Im}(\lambda Z)}) = \prod_{k=1}^n \cosh(\operatorname{Im}(\lambda a_k)). \end{aligned}$$

On en déduit, comme pour (a):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\lambda|\operatorname{Im}(Z)|}) &\leq \frac{2 \prod_{k=1}^n e^{|\operatorname{Im}(\lambda a_k)|^2/2}}{1} = 2 \prod_{k=1}^n e^{\lambda^2 |\operatorname{Im}(a_k)|^2/2} = \\ &= 2 e^{\sum_{k=1}^n \frac{\lambda^2}{2} |\operatorname{Im}(a_k)|^2}. \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\lambda|Z|}) &\leq \sqrt{\mathbb{E}(e^{2\lambda|\operatorname{Re}Z|})} \sqrt{\mathbb{E}(e^{2\lambda|\operatorname{Im}Z|})} \leq \\ &\leq 2 e^{\sum_{k=1}^n \frac{\lambda^2}{2} |\operatorname{Re}(a_k)|^2} e^{\sum_{k=1}^n \frac{\lambda^2}{2} |\operatorname{Im}(a_k)|^2} = 2 e^{\lambda^2 \sum_{k=1}^n |a_k|^2} \end{aligned}$$

C.

1. (a) Soit $\lambda > 0$. On a

$$\int_0^{2\pi} e^{\lambda|Z_t(\omega)|} dt = \int_0^{2\pi} e^{\lambda|p_\omega(t)|} dt \stackrel{A.2}{\geq} \int_S e^{\frac{\lambda}{2} \|p_\omega\|_\infty} dt = \frac{1}{\alpha_n} e^{\frac{\lambda}{2} M(\omega)}.$$

(b) On a, par le Théorème de Fubini:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\frac{\lambda}{2} M}) &\leq \alpha_n \mathbb{E} \left(\int_0^{2\pi} e^{\lambda|Z_t(\omega)|} dt \right) = \alpha_n \int_0^{2\pi} \mathbb{E} (e^{\lambda|Z_t(\omega)|}) dt \\ &\stackrel{B.3.(b)}{\leq} 2\alpha_n \int_0^{2\pi} e^{\lambda^2 \sum_{k=1}^n |a_k|^2} dt = 4\pi \alpha_n e^{\lambda^2 \sum_{k=1}^n |a_k|^2}. \end{aligned}$$

2. (a) On suppose que: $\forall \omega \in \Omega$,

$$M(\omega) > 2 \left(\frac{1}{\lambda} \ln(4\pi\alpha_n) + \lambda \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right).$$

Comme $x \mapsto e^x$ est continue et > 0 , on en déduit:

$$\mathbb{E}(e^{\lambda M/2}) > e^{\ln(4\pi\alpha_n) + \lambda^2 \sum_{k=1}^n |a_k|^2} = 4\pi\alpha_n e^{\lambda^2 \sum_{k=1}^n |a_k|^2}$$

en contradiction avec 1.(b).

(b) En posant:

$$a = \ln(4\pi\alpha_n), \quad b = \sum_{k=1}^n |a_k|^2,$$

on est ramené à chercher $\lambda > 0$ t.q.:

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{a}{\lambda} + \lambda b \right) = 4\sqrt{ab} &\iff \lambda^2 b - 2\lambda\sqrt{ab} + a = 0 \\ \iff (\lambda\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 = 0 &\iff \lambda = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\ln(4\pi\alpha_n)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k|^2}}. \end{aligned}$$

Pour ce choix de λ :

$$M(\omega) \leq 2 \left(\frac{a}{\lambda} + \lambda b \right) = 4\sqrt{ab} = 4\sqrt{\ln(4\pi\alpha_n) \sum_{k=1}^n |a_k|^2}.$$

3. On pose: $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in \Lambda, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors

$$M(\omega) \stackrel{2.(b)}{\leq} 4\sqrt{\ln(4\pi\alpha_n) \sum_{k=1}^n |a_k|^2} = 4\sqrt{\ln(4\pi\alpha_n) |\Lambda \cap \{1, \dots, n\}|}$$

et

$$\begin{aligned} M(\omega) = \|p_\omega\|_\infty &\geq \frac{N(p_\omega)}{K(\Lambda)} = \frac{\sum_{k=1}^n |a_k|}{K(\Lambda)} = \frac{|\Lambda \cap \{1, \dots, n\}|}{K(\Lambda)} \\ &\Rightarrow \sqrt{|\Lambda \cap \{1, \dots, n\}|} \leq 4K(\Lambda)\sqrt{\ln(4\pi\alpha_n)} \end{aligned}$$

i.e.

$$|\Lambda \cap \{1, \dots, n\}| \leq 16K(\Lambda)^2 \ln(4\pi\alpha_n).$$

V. Vibrations des sphères

1. Soit $\varepsilon > 0$. D'après I.B.3(b), il existe $n_0 > 0$ t.q.

$$\forall n \geq n_0, \quad \forall x \in I_\eta, \quad |L_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Soit $n > n_0$. D'après I.B.2.: $\forall(t, x) \in \mathbb{R} \times I_\eta$,

$$|u_n(t, x)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |L_k(x)| \leq \frac{1}{n}(n_0 + \varepsilon(n - n_0)) = \frac{n_0}{n}(1 - \varepsilon) + \varepsilon$$

Soit $n_1 > n_0$ t.q. $\frac{n_0}{n} < \varepsilon$, $\forall n \geq n_1$. On a alors:

$$\forall n \geq n_1, \quad \forall(t, x) \in \mathbb{R} \times I_\eta, \quad |u_n(t, x)| \leq \varepsilon(2 - \varepsilon) < 2\varepsilon.$$

2. On a: $\forall n \geq 1, \forall t \in \mathbb{R}$

$$u_n(t, \pm 1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{k,n} (-1)^k e^{i\sqrt{k(k+1)}t}$$

avec

$$|u_n(t, \pm 1)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 = 1 \Rightarrow \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_n(t, \pm 1)| \geq 1.$$

D'après III.B.3. et I.A.2.(b): la famille $\Lambda = \{\pm\sqrt{n(n+1)}, n \in \mathbb{N}^*\}$ est un ensemble de Sidon réel de constante $K'(\Lambda) = 2$ et

$$p(u_n(t, \pm 1)) = 1 \leq 2K'(\Lambda) \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_n(t, \pm 1)| \Rightarrow \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_n(t, \pm 1)| \geq \frac{1}{4}.$$

3. (a) On remarque que:

$$\forall n \geq 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad v_n(t, x) = \frac{e^{it/2}}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{k,n} e^{ikt} L_k(x).$$

Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit $n \geq 1$. L'application $x \mapsto v_n(t, x)$ est continue sur le compact $[-1, 1]$, donc elle y atteint son maximum.

Si ce maximum est atteint en $x_0 \in]-1, 1[$, alors $\frac{\partial v_n}{\partial x}(t, x_0) = \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}(t, x_0) = 0$ et on en déduit:

$$D(v_n)(t, x_0) = -\frac{e^{it/2}}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{k,n} k(k+1) e^{ikt} L_k(x_0) = 0.$$

avec $\forall k \in [[1, n]]$, $\delta_{k,n} k(k+1) \neq 0 \stackrel{I.A.1.(b)}{\Rightarrow} L_k(x_0) = 0, \forall k \in [[1, n]]$. On en déduit que $v_n(t, x_0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$, ce qui contredit $|v_n(t, x_0)| = \sup_{x \in [-1, 1]} |v_n(t, x)|$. Donc

$$\max_{x \in [-1, 1]} |v_n(t, x)| = \max_{x \in \{-1, 1\}} |v_n(t, x)|$$

avec

$$v_n(t, \pm 1) = \frac{e^{it/2}}{n} R_n(\pm e^{it})$$

et $R_n(-e^{it}) = R_n(e^{i(t+\pi)}) \Rightarrow$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sup_{x \in [-1, 1]} |v_n(t, x)| \leq \frac{1}{n} \sup_{u \in \mathbb{R}} |R_n(e^{iu})|$$

(b) On a: $\forall n \geq 1$,

$$\frac{4}{n} \sqrt{n \ln(4\pi\alpha_n)} = \frac{4}{n} \sqrt{n \ln(2\pi n(n+1))} = 4 \sqrt{\frac{1}{n} \ln(2\pi n(n+1))}$$

avec

$$\frac{1}{n} \ln(2\pi n(n+1)) = \frac{\ln(2\pi)}{n} + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n+1)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} \sqrt{n \ln(4\pi\alpha_n)} = 0$. On déduit de (a) que $(v_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R} \times [-1, 1]$.

De plus, de I.B.2., on déduit que : $\forall n \geq 1, \forall (t, x) \in [-T, T] \times [-1, 1]$,

$$|u_n(t, x) - v_n(t, x)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |e^{i(2k+1)t/2} - e^{i\sqrt{k(k+1)}t}|$$

avec: $\forall k \in [1, n]$,

$$\begin{aligned}
|e^{i(2k+1)t/2} - e^{i\sqrt{k(k+1)}t}| &= \left| \int_{\sqrt{k(k+1)}t}^{(2k+1)t/2} e^{iu} du \right| \leq \\
&\leq \left| \frac{(2k+1)t}{2} - \sqrt{k(k+1)}t \right| \leq \left| \frac{(2k+1)}{2} - \sqrt{k(k+1)} \right| T = \\
&= \left| k + \frac{1}{2} - \sqrt{k(k+1)} \right| T = \left| O\left(\frac{1}{k}\right) \right| T \leq C \frac{T}{k}
\end{aligned}$$

donc

$$|u_n(t, x) - v_n(t, x)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n C \frac{T}{k}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n_0 > 0$ t.q. $\frac{1}{n} \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0$. Soit $n > n_0$. Alors: $\forall (t, x) \in [-T, T] \times [-1, 1]$,

$$|u_n(t, x) - v_n(t, x)| \leq \frac{CT}{n} (n_0 + \varepsilon(n - n_0)) \leq CT \left(\frac{n_0}{n} + \varepsilon \right).$$

On fixe $n_1 > n_0$ t.q. $\frac{n_0}{n} \leq \varepsilon$. Alors: $\forall n \geq n_1, \forall (t, x) \in [-T, T] \times [-1, 1]$,

$$|u_n(t, x) - v_n(t, x)| \leq 2CT\varepsilon.$$

On peut supposer en outre, par l'uniforme convergence de v_n vers 0, que $\forall n \geq n_1, \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times [-1, 1]$,

$$|v_n(t, x)| \leq \varepsilon.$$

Alors: $\forall n \geq n_1, \forall (t, x) \in [-T, T] \times [-1, 1]$,

$$|u_n(t, x)| \leq (2CT + 1)\varepsilon.$$