

I. Formule de Jensen

1. (a) On a:

$$\begin{aligned} X^{2n} - 1 &= \prod_{k=0}^{2n-1} (X - e^{\frac{ik\pi}{n}}) = (X^2 - 1) \underbrace{\prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{\frac{ik\pi}{n}})(X - e^{-\frac{ik\pi}{n}})}_{=X^2 - 2X \cos(\frac{k\pi}{n}) + 1} = \\ &= (X^2 - 1) \underbrace{\prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right)}_{=: P_k(X)} \end{aligned}$$

où les polynômes $X - e^{\frac{ik\pi}{n}}$, $k \in [[0, 2n - 1]]$, resp. $X^2 - 2X \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1$, $k \in [[0, n - 1]]$, sont irréductibles dans \mathbb{C} , resp. dans \mathbb{R} .

Soit $r > 1$. On remarque que r n'est pas racine de $X^{2n} - 1$, et donc $P_k(r) \neq 0$, $\forall k \in [[0, n - 1]]$. De plus:

$$P_k(r) \geq 1 - 2r + r^2 = (r - 1)^2 > 0,$$

donc $\ln P_k(r)$ est bien défini dans \mathbb{R} . On a:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln P_k(r) = \ln \prod_{k=1}^{n-1} P_k(r) = \ln \frac{(r^{2n} - 1)}{(r^2 - 1)}.$$

(b) Soit $r > 1$. On a: $\forall t \in [0, \pi]$

$$1 - 2r \cos(t) + r^2 \geq 1 - 2r + r^2 = (r - 1)^2 > 0$$

donc $t \mapsto \ln(1 - 2r \cos(t) + r^2)$ est bien définie et continue sur $[0, \pi]$. Du Théorème d'approximation des sommes de Darboux appliqué à la subdivision $x_k = \frac{k\pi}{n}$, $k \in [[1, n - 1]]$, de $[0, \pi]$, on déduit:

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos(t) + r^2) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left(1 - 2r \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + r^2 \right) =$$

$$= \lim_{(a) n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \ln \frac{(r^{2n} - 1)}{(r^2 - 1)}$$

avec:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \ln(r^{2n} - 1) &= \lim_{r>1} 2 \ln(r) + \frac{1}{n} \ln(1 - r^{-2n}) = \\ \frac{1}{n} \ln(1 - r^{-2n}) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{nr^{2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 \end{aligned}$$

i.e.:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(r^{2n} - 1) = 2 \ln(r).$$

De plus:

$$\frac{1}{n} \underbrace{\ln(r^2 - 1)}_{>0} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.$$

Finalement:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos(t) + r^2) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \ln \frac{(r^{2n} - 1)}{(r^2 - 1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \ln(r^{2n} - 1) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \ln(r^2 - 1) = 2\pi \ln(r) \quad (1) \end{aligned}$$

De plus: $\forall t \in [0, \pi]$,

$$\begin{aligned} 1 - 2r \cos(t) + r^2 &= (1 - re^{it})(1 - re^{-it}) = |1 - re^{it}|^2 \Rightarrow \\ \int_{-\pi}^\pi \ln |1 - re^{it}| dt &= 2 \int_0^\pi \ln |1 - re^{it}| dt = \\ &= \int_0^\pi \ln(|1 - re^{it}|^2) dt = \int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos(t) + r^2) dt \stackrel{(1)}{=} 2\pi \ln(r). \end{aligned}$$

(c) L'intégrale est singulière au voisinage de $t = 0$. Le calcul donne:

$$|1 - e^{it}| = 2 \left| \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Il en résulte:

$$\int_{-\pi}^\pi \ln |1 - e^{it}| dt = 2\pi \ln(2) + \int_{-\pi}^\pi \ln \left| \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right| dt = 2\pi \ln(2) + 2 \underbrace{\int_0^\pi \ln \sin \left(\frac{t}{2} \right) dt}_{<0}.$$

Soit $\alpha > 0$. On a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha \ln \sin \left(\frac{t}{2} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(t^\alpha \ln \frac{\sin \left(\frac{t}{2} \right)}{t} \right) + \lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha \ln t = 0.$$

Ceci étant vrai en particulier pour $\alpha \in]0, 1[$, on en déduit par le critère de Riemann que

$$\int_0^\pi \left| \ln \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right| dt = - \int_0^\pi \ln \sin \left(\frac{t}{2} \right) dt < +\infty$$

et on conclut pour l'existence avec le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives.

Soit $t \in]0, \pi]$. On pose :

$$f_t(r) = |1 - re^{it}|, \quad \forall r > 1.$$

L'étude des variations de $|f_t|^2$ montre que f_t est croissante, > 0 sur $[1, +\infty[$. Par croissance de $x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $r \mapsto \ln f_t(r)$ est définie, croissante sur $[1; +\infty[$. Du théorème de convergence monotone, il résulte que :

$$\lim_{r \searrow 1^+} \int_0^\pi \ln |1 - re^{it}| dt = \int_0^\pi \ln |1 - e^{it}| dt < +\infty.$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \ln |1 - e^{it}| dt &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln |1 - e^{it}|^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln(2 - 2 \cos t) dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln P_k(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \ln(\prod_{k=1}^{n-1} P_k(1)) \end{aligned}$$

avec : $\forall n \geq 1$,

$$\prod_{k=1}^{n-1} P_k(1) = \lim_{r \rightarrow 1^+} \frac{(r^{2n} - 1)}{(r^2 - 1)} = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 1^+} \frac{(r^{2n} - 1)}{(r - 1)} = n.$$

On en déduit :

$$\int_{-\pi}^\pi \ln |1 - e^{it}| dt = 2 \int_0^\pi \ln |1 - e^{it}| dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \ln(n) = 0.$$

(d) On pose $a = |a|e^{i\alpha}$ et alors:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |a - re^{it}| dt &= 2\pi \ln |a| + \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| 1 - \frac{r}{|a|} e^{i(t-\alpha)} \right| dt = \\ &= 2\pi \ln |a| + \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| 1 - \frac{r}{|a|} e^{it} \right| dt \stackrel{(b),(c)}{=} 2\pi \ln |a| + 2\pi \ln \frac{r}{|a|} = 2\pi \ln(r). \end{aligned}$$

où on a utilisé la périodicité de $t \mapsto e^{it}$.

2. Par hypothèse, $|F(re^{it})| > 0, \forall t \in [-\pi, \pi]$, donc $t \mapsto \ln |F(re^{it})|$ est bien définie et continue sur $[-\pi, \pi]$, donc d'intégrale sur $[-\pi, \pi]$ bien définie. On a: $\forall z \in D$,

$$\frac{|F(z)|^2}{|F(0)|^2} = \prod_{i=1}^p \left| 1 - \frac{z}{a_i} \right|^2 e^{\underbrace{G(z) + \overline{G(z)}}_{=2\operatorname{Re}G(z)} - \underbrace{(G(0) + \overline{G(0)})}_{=2\operatorname{Re}G(0)}}$$

et donc: $\forall t \in [-\pi, \pi]$,

$$\ln |F(re^{it})| = \ln |F(0)| + \sum_{i=1}^p \ln \left| 1 - \frac{r}{a_i} e^{it} \right| + 2\operatorname{Re}(G(re^{it})) - 2\operatorname{Re}(G(0))$$

On remarque que par holomorphie de G :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(re^{it}) dt = G(0)$$

ce qui entraîne, par linéarité de l'intégrale:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{G(re^{it})} dt = \overline{G(0)},$$

et donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}(G(re^{it})) dt = \operatorname{Re}(G(0)).$$

Il en résulte:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |F(re^{it})| dt = \ln |F(0)| + \sum_{i=1}^p \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| 1 - \frac{r}{a_i} e^{it} \right| dt$$

avec: $\forall i \in [[1, p]]$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| 1 - \frac{r}{a_i} e^{it} \right| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |a_i - r e^{it}| dt - \ln |a_i| \stackrel{(d)}{=} \ln \frac{r}{|a_i|}.$$

Finalement:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |F(r e^{it})| dt = \ln |F(0)| + \sum_{i=1}^p \ln \frac{r}{|a_i|}.$$

II. Composantes connexes par arcs de \mathcal{C}^*

1. On a:

$$\forall t \in I, \quad e^{f(t)-g(t)} = 1 \Rightarrow (f-g)(I) \subset 2i\pi\mathbb{Z}.$$

Comme I est connexe, son image par $f-g$ continue est une partie connexe de \mathbb{C} , donc réduite à un point puisque $2i\pi\mathbb{Z}$ est discret.

2. (a) On remarque que $t \mapsto \varphi(e^{it})$ est continue sur le compact $[-A, A]$ comme composée d'applications continues, donc uniformément continue sur $[-A, A]$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ t.q.:

$$|t-s| < \eta \Rightarrow |\varphi(e^{it}) - \varphi(e^{is})| < \varepsilon, \quad \forall t, s \in [-A, A].$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$. On a: $\forall t \in [-A, A]$,

$$\left| \frac{(k+1)t}{n} - \frac{kt}{n} \right| = \frac{|t|}{n} \leq \frac{A}{n}.$$

Soit $n_0 > 0$ t.q. $\frac{A}{n_0} < \eta$. Alors:

$$\left| \varphi \left(e^{\frac{i(k+1)t}{n}} \right) - \varphi \left(e^{\frac{ikt}{n}} \right) \right| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \forall t \in [-A, A].$$

(b) Soit $n \geq n_0$ choisi comme dans (a). Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et soit $t \in [-A, A]$. On a:

$$|u_{k,n}(t) - 1| = \frac{\left| \varphi \left(e^{\frac{i(k+1)t}{n}} \right) - \varphi \left(e^{\frac{ikt}{n}} \right) \right|}{\underbrace{\left| \varphi \left(e^{\frac{ikt}{n}} \right) \right|}_{\varphi \in \mathcal{C}^*}} \stackrel{(a)}{\leq} \frac{\varepsilon}{\min_{[-A, A]} |\varphi|}$$

avec $\min_{[-A,A]} |\varphi| > 0$ car $\varphi \in \mathcal{C}^*$.

On conclut en choisissant $\varepsilon \in]0, \min_{[-A,A]} |\varphi|$.

De ce qui précède, on déduit que $u_{k,n}(t) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-; \forall t \in [-A, A]$.

On définit donc une application $v_{k,n} : [-A, A] \rightarrow \mathbb{C}$ en posant:

$$v_{k,n}(t) = \ln u_{k,n}(t), \quad \forall t \in [-A, A].$$

De plus, $v_{k,n}$ est continue sur $[-A, A]$ comme composée d'applications continues et par construction: $u_{k,n}(t) = e^{v_{k,n}(t)}, \forall t \in [-A, A]$.

- (c) Quitte à remplacer φ par $-\varphi$ et θ_A par $t \mapsto i\pi + \theta_A(t)$, on peut supposer que $\varphi(1) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Alors, il suffit de poser:

$$\theta_A(t) = \ln \varphi(1) + \sum_{k=0}^{n-1} v_{k,n}(t).$$

- (d) Soit $\delta > 0$ associé à φ comme précédemment. Soit $(A_N)_{N \geq 0} \in]0, +\infty[^{\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante vers $+\infty$ et soit $(n_N)_{N \geq 0} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ t.q.: $\frac{A_N}{n_N} < \delta$. Par unicité de la détermination principale du logarithme, on a:

$$\theta_{A_{N+1}}|_{[-A_N, A_N]}, \quad \forall N \geq 0.$$

On pose donc:

$$\theta(t) = \theta_{A_N}(t) \quad \text{si} \quad |t| \leq A_N.$$

De plus, si $|t + 2\pi| \leq A_N$,

$$\begin{aligned} \theta_{A_N}(t + 2\pi) &= \ln \varphi(1) + \sum_{k=0}^{n_N-1} \ln \frac{\varphi(\zeta_n^{k+1} e^{\frac{i(k+1)t}{n}})}{\varphi(\zeta_n^k e^{\frac{ikt}{n}})} \\ &= \ln \varphi(1) + \sum_{k=0}^{n_N-1} \left(\ln \varphi(e^{\frac{i(k+1)t}{n}}) + 2i\pi \frac{(k+1)}{n} \deg \varphi - \ln \varphi(e^{\frac{ikt}{n}}) - 2i\pi \frac{k}{n} \deg \varphi \right) = \\ &= \theta_{A_N}(t) + 2i\pi \deg \varphi \end{aligned}$$

Il en résulte:

$$\theta(t + 2\pi) = \theta(t) + 2i\pi \deg \varphi.$$

[Autres solutions:](#)

(i) Soit $A > 2\pi$ et soit $n \geq 1$ t.q. $\frac{A}{n} < \delta$. On pose:

$$\theta(t) = \theta_A \left(t - 2\pi \left(1 + \left\lceil \frac{t-A}{2\pi} \right\rceil \right) \right) + 2i\pi \left(1 + \left\lceil \frac{t-A}{2\pi} \right\rceil \right) \deg \varphi.$$

(ii) Soit $\delta > 0$ associé à φ comme précédemment. Soit $(A_N)_{N \geq 0} \in]0, +\infty[^{\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante vers $+\infty$ et soit $(n_N)_{N \geq 0} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ t.q.: $\frac{A_0}{n_0} < \delta$, et $\frac{A_N - A_{N-1}}{n_N} < \delta$, $N \geq 1$. Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose:

$$\varphi_A(s) = \varphi(e^{iA}s), \quad \forall s \in \mathbb{S}^1, \quad \forall A \in \mathbb{R},$$

$$v_{k,n}^A(t) = \ln \frac{\varphi_A(e^{\frac{i(k+1)t}{n}})}{\varphi_A(e^{\frac{ikt}{n}})}, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta_{A_0}(t) & \text{si } |t| \leq A_0, \\ \theta(A_{N-1}) + \sum_{k=0}^{n_N-1} v_{k,n_N}^{A_{N-1}}(t - A_{N-1}) & \text{si } A_{N-1} < t \leq A_N, \\ \theta(-A_{N-1}) + \sum_{k=0}^{n_N-1} v_{k,n_N}^{A_{N-1}}(t + A_{N-1}) & \text{si } -A_N < t \leq -A_{N-1}. \end{cases}$$

Par construction: θ est continue sur \mathbb{R} et $\theta \in R(\varphi)$.

(iii) Une autre solution est obtenue en posant:

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta_\pi(t) & \text{si } |t| \leq \pi, \\ \theta_\pi(t - 2N\pi) + 2i\pi N \deg(\varphi) & \text{si } (2N-1)\pi \leq t \leq (2N+1)\pi \end{cases}$$

où $\deg(\varphi)$ est calculé à partir de θ_π . Il reste à vérifier que θ ainsi définie est continue sur \mathbb{R} . Soit $N \in \mathbb{Z}$. Par construction:

$$\begin{aligned} \theta((2N+1)\pi^+) &= \theta_\pi(\pi) + 2i\pi N \deg(\varphi) = \\ &= \theta_\pi(-\pi) + 2i\pi(N+1) \deg(\varphi) = \theta((2N+1)\pi^-). \end{aligned}$$

3. (a) Par périodicité de l'exponentielle complexe:

$$e^{\theta(t+2\pi)} = \varphi(e^{it}) = e^{\theta(t)} \Rightarrow \theta(t+2\pi) - \theta(t) \in 2i\pi\mathbb{Z}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Comme de plus $t \mapsto \frac{\theta(t+2\pi) - \theta(t)}{2i\pi}$ est continue, on en déduit qu'elle est constante, de valeur constante égale dans \mathbb{Z} .

Soit $\theta_1, \theta_2 \in R(\varphi)$. Par définition:

$$e^{\theta_1(t)} = e^{\theta_2(t)} = \varphi(t) \Rightarrow \theta_1(t) - \theta_2(t) \in 2i\pi\mathbb{Z}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Par continuité de $\theta_1 - \theta_2$, on déduit que $\frac{\theta_1 - \theta_2}{2i\pi}$ est constante, de valeur constante dans \mathbb{Z} . Il en résulte: $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\theta_1(t+2\pi) - \theta_1(t)}{2i\pi} - \frac{\theta_2(t+2\pi) - \theta_2(t)}{2i\pi} = \frac{\theta_1(t+2\pi) - \theta_2(t+2\pi)}{2i\pi} - \frac{\theta_1(t) - \theta_2(t)}{2i\pi} = 0$$

Donc la quantité $\frac{\theta(t+2\pi) - \theta(t)}{2i\pi}$ est indépendante du choix de $(\theta, t) \in R(\varphi) \times \mathbb{R}$.

(b) i) Le choix $\theta : t \mapsto \text{int}$ convient et alors

$$\theta(t+2\pi) - \theta(t) = 2in\pi \Rightarrow \deg(e_n) = n.$$

ii) Par définition: $\theta = \theta_1 + \theta_2$, donc:

$$\deg(\varphi_1\varphi_2) = \deg(\varphi_1) + \deg(\varphi_2).$$

iii) On peut choisir: $\theta : t \mapsto \ln \varphi(e^{it})$ où \ln désigne la détermination principale du Logarithme. On en déduit: $\deg(\varphi) = 0$.

(c) On remarque que $\frac{1}{\varphi_1} \in \mathcal{C}^*$ et $\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \in \mathcal{C}^*$. On a:

$$\deg\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) \stackrel{(b).ii)}{=} \deg(\varphi_2) + \deg\left(\frac{1}{\varphi_1}\right)$$

avec:

$$\deg(e_0) \stackrel{(b).i)}{=} 0 \quad \text{et} \quad e_0 = 1 = \varphi_1 \times \frac{1}{\varphi_1} \stackrel{(b).ii)}{\Rightarrow} \deg\left(\frac{1}{\varphi_1}\right) = -\deg(\varphi_1).$$

On en déduit:

$$\deg\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) = \deg(\varphi_2) - \deg(\varphi_1).$$

On a aussi:

$$\left| \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} - 1 \right| < 1 \Rightarrow \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Il en résulte, par définition de L :

$$\theta_2(t) - \theta_1(t) = L \left(\frac{\varphi_2(e^{it})}{\varphi_1(e^{it})} \right), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

d'où, en particulier: $\deg(\varphi_2) - \deg(\varphi_1) = 0$.

- (d) Soit $\varphi \in \mathcal{C}^*$, $\varphi \neq 0$, et soit $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite de \mathcal{C}^* qui converge vers φ pour la norme $|\cdot|_\infty$. Par définition de \mathcal{C}^* , $\min_{\mathbb{S}^1} |\varphi| > 0$, donc il existe $\varepsilon_0 > 0$ t.q.:

$$|\varphi_\varepsilon - \varphi|_\infty < \min_{\mathbb{S}^1} |\varphi|, \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[.$$

Soit $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. On en déduit:

$$|\varphi_\varepsilon - \varphi| < \min_{\mathbb{S}^1} |\varphi| \leq |\varphi| \stackrel{(c)}{\Rightarrow} \deg(\varphi_\varepsilon) = \deg(\varphi).$$

Comme $\varphi \mapsto \deg(\varphi)$ est à valeurs discrètes, cela signifie que cette application est continue sur $(\mathcal{C}^*, |\cdot|_\infty)$.

4. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et soit $\varphi \in \mathcal{C}_n^*$. Quitte à remplacer φ par φe_n^{-1} , on peut supposer que $n = 0$. Soit $\theta \in R(\varphi)$. Pour tout $s \in [0, 1]$, on définit H_s sur \mathbb{S}^1 en posant:

$$H_s(e^{it}) = e^{s\theta(t)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Par construction, $H_s \in \mathcal{C}_0^*$, $\forall s \in [0, 1]$. Soit $s \in [0, 1]$ et soit $[0, 1] \ni s_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} s$. On a: $\forall \varepsilon > 0$,

$$|H_{s_\varepsilon} - H_s| = |e^{(s_\varepsilon - s)\theta} - 1| |e^{s\theta}| \leq |s_\varepsilon - s| |\theta|_\infty e^{|\theta|_\infty} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

i.e. $s \mapsto H_s$, resp. $s \mapsto H_{1-s}$, est un chemin continu de $(\mathcal{C}^*, |\cdot|_\infty)$ reliant e_0 , resp. φ , à φ , resp. e_0 , dans \mathcal{C}_0^* . On en déduit que deux éléments quelconques $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_0^*$ peuvent être reliés par un chemin continu contenu dans \mathcal{C}_0^* et passant par e_0 , i.e. \mathcal{C}_0^* est connexe par arcs.

Dans le cas général où $\varphi \in \mathcal{C}_n^*$, on remarque que $\varphi e_n^{-1} \in \mathcal{C}_0^*$ et que $\theta - n \in R(\varphi e_n^{-1})$. Pour tout $s \in [0, 1]$, on définit:

$$H_s(e^{it}) = e^{s(\theta(t) - n)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Alors $H_s \in \mathcal{C}_0^*$ et $s \mapsto H_s e_n \in \mathcal{C}_n^*$ est un chemin continu contenu dans \mathcal{C}_n^* reliant e_n à varphi dans \mathcal{C}_n^* . On conclut comme dans le cas $n = 0$ que \mathcal{C}_n^* est connexe par arcs.

Soit $\Gamma \subset \mathcal{C}^*$ une composante connexe par arcs de \mathcal{C}^* et soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma$. Par hypothèse, il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Gamma$, t.q. $\gamma(0) = \varphi_1$, $\gamma(1) = \varphi_2$. On remarque que $s \mapsto \deg(\gamma(s))$ est continue comme composée d'applications continues, à valeurs dans \mathbb{Z} , donc constante. Soit $n = \deg(\gamma)$. Alors $\Gamma \subset \mathcal{C}_n^*$ et comme \mathcal{C}_n^* est connexe par arcs, on en déduit que $\Gamma = \mathcal{C}_n^*$.

III. Espace de Hardy H^2

1. La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ étant une base hilbertienne de L^2 , la sous-famille $(e_n)_{n \geq 0}$ est orthonormée. Par définition de H^2 :

$$H^2 = \left\{ f \in L^2, f = \sum_{n \geq 0} \hat{f}(n) e_n \right\} = \overline{\text{Vect}\{e_n, n \geq 0\}}.$$

On en déduit que H^2 est un sous-espace fermé de L^2 de base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 0}$. Par définition de Π :

$$\Pi(f) = \sum_{n \geq 0} \hat{f}(n) e_n, \quad \forall f \in L^2.$$

2. Soit $f \in H^2$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On a: $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$|\hat{f}(n) z^n| \leq |f|_1 |z|^n$$

avec $|f|_1 < +\infty$ car $[-\pi, \pi]$ est borné. La série majorante converge ssi $|z| < 1$. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum \hat{f}(n) z^n$ est ≥ 1 .

Soit $f \in H^2$. Sa décomposition dans la base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 0}$ s'écrit:

$$f = \sum_{n \geq 0} \hat{f}(n) e_n.$$

avec

$$\sum_{n \geq 0} |\hat{f}(n)|^2 < +\infty. \quad (2)$$

Soit $R \in [0, +\infty]$ le rayon de convergence de la série entière $\sum \hat{f}(n)z^n$.

Par définition:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |\hat{f}(n)|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(|\hat{f}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2n}} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(|\hat{f}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{n}}}.$$

Soit $(n_k)_{k \geq 0}$ extraite de $(n)_{n \geq 0}$ t.q.:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(|\hat{f}(n_k)|^2 \right)^{\frac{1}{n_k}}} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(|\hat{f}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{n}}}.$$

Par continuité de $x \mapsto \sqrt{x}$, on en déduit:

$$\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(|\hat{f}(n_k)|^2 \right)^{\frac{1}{n_k}}} = \sqrt{\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(|\hat{f}(n_k)|^2 \right)^{\frac{1}{n_k}}} \leq \sqrt{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(|\hat{f}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{n}}} \stackrel{(2)}{\leq} 1,$$

i.e.: $R \geq 1$.

Par construction: $\forall r \in]0, 1[$,

$$f_r - f = \sum_{n \geq 0} \hat{f}(n)(r^n - 1)e_n \Rightarrow |f_r - f|_2^2 = \sum_{n \geq 0} |\hat{f}(n)|^2 |r^n - 1|^2$$

avec:

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} |r^n - 1|^2 = 0, \quad \forall n \geq 0,$$

et:

$$|\hat{f}(n)|^2 |r^n - 1|^2 \underset{0 < r < 1}{\leq} |\hat{f}(n)|^2.$$

La série majorante $\sum |\hat{f}(n)|^2$ étant convergente, on déduit du théorème de convergence dominée de Lebesgue séquentiel que:

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} |f_r - f|_2^2 = 0 = \lim_{r \rightarrow 1^-} |f_r - f|_2.$$

3. (a) Soit $\varepsilon > 0$. On a:

$$0 \leq \ln \left(1 + \frac{|f|}{\varepsilon} \right) \leq \frac{|f|}{\varepsilon}$$

avec:

$$f \in H^2 \subset L^2 \subset L^1.$$

On en déduit:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \ln \left(1 + \frac{|f|}{\varepsilon} \right) \right| dt = \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left(1 + \frac{|f|}{\varepsilon} \right) dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f|}{\varepsilon} dt < +\infty.$$

Finalemement:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln(|f(e^{it})| + \varepsilon)| dt \leq 2\pi |\ln \varepsilon| + \int_{-\pi}^{\pi} \left| \ln \left(1 + \frac{|f|}{\varepsilon} \right) \right| dt < +\infty.$$

i.e. $\ln(|f| + \varepsilon) \in L^1$.

(b) Soit $r \in [0, 1[$ et soit $t \in \mathbb{R}$. On remarque:

$$|\ln(x) - \ln(y)| = \left| \int_x^y \frac{dt}{t} \right| \leq \frac{|x - y|}{\varepsilon}, \quad \forall x, y \in [\varepsilon, +\infty[.$$

Il en résulte:

$$|\ln(|f_r(e^{it})| + \varepsilon) - \ln(|f(e^{it})| + \varepsilon)| \leq \frac{|f_r(e^{it}) - f(e^{it})|}{\varepsilon}.$$

(c) De la décomposition de f dans la base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 0}$ de H^2 :

$$f = \sum_{n \geq 0} \hat{f}(n) e_n,$$

on déduit, avec les notations de 2., que $F \equiv f$ dans L^2 et que $\hat{f}(0) = F(0)$. Il en résulte:

$$\begin{aligned} \ln |\hat{f}(0)| &= \ln |F(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |F(re^{it})| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |f_r(e^{it})| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(|f_r(e^{it})| + \varepsilon) dt \stackrel{(b)}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(|f(e^{it})| + \varepsilon) dt + \frac{|f_r - f|_1}{\varepsilon} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(|f(e^{it})| + \varepsilon) dt + \frac{|f_r - f|_2}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} \ln |\hat{f}(0)| &\leq \limsup_{r \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(|f(e^{it})| + \varepsilon) dt + \frac{|f_r - f|_2}{\varepsilon} \right) \\ &\stackrel{2.}{=} \lim_{r \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(|f(e^{it})| + \varepsilon) dt + \frac{|f_r - f|_2}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(|f(e^{it})| + \varepsilon) dt. \end{aligned}$$

- (d) L'application $x \mapsto \ln x$ étant strictement croissante sur \mathbb{R}^*_+ , on déduit du théorème de convergence monotone de Lebesgue que:

$$\begin{aligned} \ln |\hat{f}(0)| &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(|f(e^{it})| + \varepsilon) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(|f(e^{it})| + \varepsilon) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(|f(e^{it})|) dt. \end{aligned}$$

On pose:

$$A = \{t \in [-\pi, \pi], f(e^{it}) = 0\}$$

Si A est de mesure de Lebesgue non nulle, alors $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(|f(e^{it})|) dt = -\infty$, en contradiction avec $\hat{f}(0) \neq 0$. Donc A est de mesure de Lebesgue nulle.

IV. Opérateurs de Toeplitz

1. (a) On remarque que:

$$|\varphi f|_2 \leq |\varphi|_{\infty} |f|_2 < \infty$$

et donc $\varphi f \in L^2$. On en déduit que $\Pi(\varphi f) \in H^2$ est bien défini. Soit $f \in H^2 \setminus \{0\}$. On a:

$$|T_{\varphi}(f)|_2 = |\Pi(\varphi f)|_2 \leq |\varphi f|_2 \leq |\varphi|_{\infty} |f|_2$$

donc

$$\|T_{\varphi}\| \leq \frac{|T_{\varphi}(f)|_2}{|f|_2} \leq |\varphi|_{\infty} < +\infty,$$

i.e. $T_{\varphi} \in \mathcal{L}(H^2)$.

- (b) Soit $i, j \in \mathbb{N}$. Par définition: $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{\varphi e_j}(n) = \int \varphi e_j e^{-n} = \int \varphi e_{j-n} = \hat{\varphi}(n-j).$$

On en déduit la décomposition de φe_j dans L^2 :

$$\varphi e_j = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n-j) e_n.$$

Il en résulte, par définition de la projection orthogonale sur $H^2 \subset L^2$:

$$T_\varphi(e_j) = \Pi(\varphi e_j) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{\varphi}(n-j)e_n \Rightarrow$$

$$\langle e_i, T_\varphi(e_j) \rangle = \int \Pi(\varphi e_j) e_{-i} = \hat{\varphi}(i-j).$$

On remarque que $T : \varphi \mapsto T_\varphi$ est linéaire sur le \mathbb{C} -ev \mathcal{C} . On est donc ramené à étudier $\text{Ker}(T)$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}$ t.q. $T_\varphi = 0$. En particulier:

$$0 = \langle e_i, T_\varphi(e_j) \rangle = \hat{\varphi}(i-j), \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Comme l'application $(i, j) \mapsto i-j$ est surjective de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur \mathbb{Z} , on en déduit que $\hat{\varphi}(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, i.e.: $\varphi = 0$ par injectivité de la transformation de Fourier sur \mathcal{C} , et T est injective.

(c) Soit $i, j \in \mathbb{N}$. On a:

$$\langle e_i, T_{\bar{\varphi}}(e_j) \rangle = \widehat{\bar{\varphi}}(i-j)$$

avec:

$$\bar{\varphi} = \overline{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n)e_n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{\hat{\varphi}(n)}e_{-n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\bar{\varphi}}(-n)e_n$$

car la décomposition dans L^2 est une série normalement convergente. On en déduit, par unicité de la décomposition dans L^2 :

$$\widehat{\bar{\varphi}}(n) = \overline{\hat{\varphi}(-n)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

ce qui entraîne:

$$\langle e_i, T_{\bar{\varphi}}(e_j) \rangle = \widehat{\bar{\varphi}}(j-i) = \overline{\langle e_j, T_\varphi(e_i) \rangle} = \int e_j \overline{T_\varphi(e_i)} = \langle T_\varphi(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, T_\varphi^*(e_j) \rangle$$

i.e.: $T_\varphi^* = T_{\bar{\varphi}}$.

2. (a) On a:

$$\int |u| = \int |\varphi| |f| |g| \leq |\varphi|_\infty |f|_2 |g|_2 < +\infty$$

i.e. $u \in L^1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition:

$$\hat{u}(n) = \int \varphi f \bar{g} e_{-n} = \int \varphi f \overline{g e_n} = \langle g e_n, \varphi f \rangle$$

avec: $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \widehat{g e_n}(k) &= \int g e_n e_{-k} = \int g e_{n-k} = \hat{g}(k-n) = 0 \quad \text{dès que } k \leq n. \\ &\Rightarrow g e_n \in H^2. \end{aligned}$$

Il en résulte:

$$\hat{u}(n) = \langle g e_n, \underbrace{T_\varphi(f)}_{=0} \rangle = 0.$$

- (b) On a: $\bar{u} = \overline{\varphi f} g$ avec $g \in \text{Ker}(T_\varphi)$ d'après 1.(c). Le même raisonnement que dans (a) avec u remplacé par \bar{u} montre ue:

$$\hat{\bar{u}}(n) = 0, \quad \forall n \geq 0.$$

Il en résulte:

$$\overline{\hat{u}(n)} = \hat{\bar{u}}(-n) = 0, \quad \forall n \leq 0.$$

i.e. $\hat{u}(n) = 0, \forall n \leq 0$. Combiné avec (a), ce résultat entraîne $\hat{u}(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, i.e. $u = 0$ dans $L^1 \subset L^2$.

- (c) On suppose que T_φ et T_φ^* ne sont pas injectifs et que $g \in \text{Ker}(T_\varphi^*)$. D'après (b), $u = 0$ dans L^1 . Il en résulte que $u(e^{it}) = 0$ p.p. dans $[-\pi, \pi]$. Si f et g ne sont pas nuls, alors $f(e^{it}) \neq 0$ et $g(e^{it}) \neq 0$ p.p. dans $[-\pi, \pi]$ d'après III.3. Il en résulte que $\varphi(e^{it}) = 0$ p.p. dans $[-\pi, \pi]$, i.e. $\varphi = 0$ dans \mathbb{S}^1 par continuité, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Donc l'un au moins des opérateurs T_φ et T_φ^* est injectif.

On suppose que T_φ n'est pas injectif. Alors T_φ^* est injectif d'après ce qui précède, i.e. $\text{Ker}(T_\varphi^*) = \{0\}$. D'après III.1., H^2 est un espace de Hilbert comme sev fermé de l'espace de L^2 . On en déduit:

$$H^2 = \{0\}^\perp = \text{Ker}(T_\varphi^*)^\perp = \text{Im}(T_\varphi)^{\perp\perp} = \overline{\text{Im}(T_\varphi)}$$

i.e. l'image de T_φ est dense dans H^2 .

V. Opérateurs compacts et opérateurs de Toeplitz

1. (a) Soit $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(H)$. On a: $\overline{T_1(B) - T_2(B)} \underset{T_1 \text{ et } T_2 \text{ compacts}}{\subset} \overline{T_1(B)} + \overline{T_2(B)}$ image du compact $\overline{T_1(B)} \times \overline{T_2(B)}$ par l'application $(x, y) \mapsto x + y$ à valeurs dans H^2 séparé, donc $\overline{T_1(B)} + \overline{T_2(B)}$ est compact. On en déduit que $\overline{T_1(B) - T_2(B)}$ est compact comme fermé inclus dans un compact. Donc $T_1 - T_2 \in \mathcal{K}(H)$ et $\mathcal{K}(H)$ est un sous-groupe additif de $\mathcal{L}(H)$.

Soit $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(H)$ et soit $(y_n)_{n \geq 0} \in \overline{(T_1 - T_2)(B)}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \geq 0$, il existe $x_n \in B$ t.q.

$$\|y_n - (T_1 - T_2)(x_n)\| < \frac{1}{n+1}.$$

En particulier $T_1(x_n) \in T_1(B) \subset \overline{T_1(B)}$ et $\overline{T_1(B)}$ est compact par hypothèse, donc il existe une suite extraite $(T_1(x_{\varphi_1(n)}))_{n \geq 0}$ convergente vers $z_1 \in H$. De même, $T_2(x_{\varphi_1(n)}) \in T_2(B) \subset \overline{T_2(B)}$ avec $\overline{T_2(B)}$ compact par hypothèse, donc il existe une suite extraite $(T_2(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}))_{n \geq 0}$ convergente vers $z_2 \in H$. Par construction:

$$T_1(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}) - T_2(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z_1 - z_2 \in H.$$

Il en résulte:

$$\begin{aligned} \|y_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)} - z_1 + z_2\| &\leq \|y_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)} - T_1(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}) + T_2(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)})\| + \\ &\quad + \|T_1(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}) - T_2(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}) - z_1 + z_2\| \\ &\leq \frac{1}{\varphi_1 \circ \varphi_2(n) + 1} + \|T_1(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}) - T_2(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}) - z_1 + z_2\| \\ &\leq \frac{1}{n+1} + \|T_1(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}) - T_2(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}) - z_1 + z_2\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

i.e.:

$$y_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z_1 - z_2 \in H.$$

Donc $T_1 - T_2 \in \mathcal{K}(H)$ et $\mathcal{K}(H)$ est un sous-groupe additif de $\mathcal{L}(H)$.

Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ et soit $S \in \mathcal{L}(H)$. Soit $(y_n)_{n \geq 0} \in \overline{S \circ T(B)}^{\mathbb{N}}$ et soit $(x_n)_{n \geq 0} \in B^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\|y_n - S \circ T(x_n)\| < \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \geq 0.$$

Comme $T(x_n) \in T(B) \subset \overline{T(B)}$ avec $\overline{T(B)}$ compact par hypothèse, il existe une suite extraite $(T(x_{\varphi(n)}))_{n \geq 0}$ convergente vers $y \in H$. Par continuité de $S \in \mathcal{L}(H)$, on en déduit que

$$S \circ T(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S(y) \in H.$$

et donc que $y_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S(y) \in H$. Donc $S \circ T \in \mathcal{K}(H)$.

Soit $(y_n)_{n \geq 0} \in \overline{T \circ S(B)}^{\mathbb{N}}$ et soit $(x_n)_{n \geq 0} \in B^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\|y_n - T \circ S(x_n)\| < \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \geq 0.$$

On a:

$$\|S(x_n)\| \leq \|S\| \Rightarrow \frac{x_n}{\|S\|} \in B, \quad \forall n \geq 0.$$

Alors $\|S\|^{-1}T \circ S(x_n) \in T(B) \subset \overline{T(B)}$ avec $\overline{T(B)}$ compact par hypothèse, il existe une suite extraite $(\|S\|^{-1}T \circ S(x_{\varphi(n)}))_{n \geq 0}$ convergente vers $y \in H$. On en déduit que

$$\|S\|^{-1}T \circ S(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y \in H.$$

et donc que $y_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|S\|y \in H$. Donc $T \circ S \in \mathcal{K}(H)$. Finalement, $\mathcal{K}(H)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(H)$.

Soit $T \in \mathcal{K}_0(H)$. Alors $\overline{T(B)}$ est une partie fermée de $\text{Im}(T)$. Soit $y \in \overline{T(B)}$ et soit $(x_n)_{n \geq 0} \in B^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\|y - T(x_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Alors:

$$\|T(x_n)\| \leq \|T\|, \quad \forall n \geq 0.$$

On en déduit:

$$\|y\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T(x_n)\| \leq \|T\|,$$

i.e. $\overline{T(B)}$ est une partie bornée de H . Finalement, $\overline{T(B)}$ est fermé et borné dans $\text{Im}(T)$ qui est un ev de dimension finie, donc $\overline{T(B)}$ est compact et $T \in \mathcal{K}(H)$. Il en résulte que $\mathcal{K}_0(H) \subset \mathcal{K}(H)$.

- (b) Soit $T \in \overline{\mathcal{K}(H)}$ et soit $\varepsilon > 0$. Soit $T_\varepsilon \in \mathcal{K}(H)$ t.q. $\|T - T_\varepsilon\| < \varepsilon$. Par définition de $\mathcal{K}(H)$, il existe une $I_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $x_0, \dots, x_{I_\varepsilon} \in H$ t.q.

$$T_\varepsilon(B) \subset \cup_{i=0}^{I_\varepsilon} B_\varepsilon(x_i)$$

où $B_\varepsilon(x_i) := x_i + \varepsilon B$ est la boule fermée de rayon $\varepsilon > 0$ centrée en $x_i \in H$. Soit $x \in B$ et soit x_i , $0 \leq i \leq I_\varepsilon$, t.q.

$$\|T_\varepsilon(x) - x_i\| < \varepsilon.$$

Alors

$$\|T(x) - x_i\| \leq \|T - T_\varepsilon\| + \|T_\varepsilon(x) - x_i\| < 2\varepsilon$$

i.e. $T(B) \subset \cup_{i=0}^{I_\varepsilon} B_{2\varepsilon}(x_i)$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $T(B)$ est compact, i.e. que $T \in \mathcal{K}(H)$.

2. (a) Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}$ et soit

$$\varphi_i = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}_i(n) e_n, \quad i \in \{1, 2\}$$

leurs décompositions respectives dans la base $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Par hypothèse, $\hat{\varphi}_1(n) = 0$, resp. $\hat{\varphi}_2(n) = 0$, sauf pour un nombre fini d'entiers $n \in \mathbb{Z}$. Soit $f \in H^2$. On a:

$$T_{\varphi_1} T_{\varphi_2}(f) - T_{\varphi_1 \varphi_2}(f) = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}_1(m) \hat{\varphi}_2(n) (T_{e_m} T_{e_n} - T_{e_{m+n}})(f),$$

avec: $\forall k, \ell \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{e_\ell f}(k) = \int f e_\ell e_{-k} = \int f e_{\ell-k} = \hat{f}(k - \ell) \Rightarrow f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k - \ell) e_k$$

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$. De ce qui précède on déduit:

$$\begin{aligned} T_{e_m} T_{e_n}(f) &= \Pi(e_m T_{e_n}(f)) = \sum_{k \geq 0} \widehat{T_{e_n}(f)}(k - m) e_k = \\ &= \sum_{k \geq \max(0, m)} \widehat{T_{e_n}(f)}(k - m) e_k = \sum_{k \geq \max(0, m)} \hat{f}(k - m - n) e_k \\ T_{e_{m+n}}(f) &= \sum_{k \geq 0} \hat{f}(k - m - n) e_k. \end{aligned}$$

Il reste:

$$(T_{e_m}T_{e_n} - T_{e_{m+n}})(f) = \begin{cases} -\sum_{0 \leq k < m} \hat{f}(k - m - n)e_k & \text{si } m > 0, \\ 0 & \text{si } m \leq 0. \end{cases}$$

i.e.:

$$(T_{e_m}T_{e_n} - T_{e_{m+n}})(f) \in \text{Vect}\{e_0, \dots, e_{|m|}\}, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Comme φ_1 et φ_2 sont des combinaisons linéaires finies de $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, on en déduit que l'opérateur $T_{\varphi_1}T_{\varphi_2} - T_{\varphi_1\varphi_2}$ a son image de dimension finie, i.e. est dans $\mathcal{K}_0(H^2)$.

- (b) Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}$. D'après le Théorème de Weierstrass: $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{P}}^{|\cdot|_\infty}$. Soit $f \in H^2$. On remarque que:

$$\|T_{\varphi_1}(f) - T_{\varphi_2}(f)\|_2 = \|\Pi((\varphi_1 - \varphi_2)f)\|_2 \leq \|(\varphi_1 - \varphi_2)f\|_2 \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty \|f\|_2$$

i.e.:

$$\|T_{\varphi_1} - T_{\varphi_2}\| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\varphi_1^\varepsilon \in \mathcal{P}$, $\varphi_2^\varepsilon \in \mathcal{P}$ t.q.:

$$\|\varphi_i - \varphi_i^\varepsilon\|_\infty < \varepsilon, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Alors:

$$\begin{aligned} \|T_{\varphi_1}T_{\varphi_2} - T_{\varphi_1^\varepsilon}T_{\varphi_2^\varepsilon}\| &\leq \|\varphi_1 - \varphi_1^\varepsilon\|_\infty \|T_{\varphi_2}\| + \|\varphi_2 - \varphi_2^\varepsilon\|_\infty (\|T_{\varphi_1}\| + \varepsilon) \leq \\ &\leq \varepsilon (\|T_{\varphi_1}\| + \|T_{\varphi_2}\| + \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\|T_{\varphi_1\varphi_2} - T_{\varphi_1^\varepsilon\varphi_2^\varepsilon}\| \leq \|\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^\varepsilon\varphi_2^\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon (|\varphi_1| + |\varphi_2| + \varepsilon)$$

Finalement:

$$\|T_{\varphi_1}T_{\varphi_2} - T_{\varphi_1\varphi_2} - T_{\varphi_1^\varepsilon}T_{\varphi_2^\varepsilon} + T_{\varphi_1^\varepsilon\varphi_2^\varepsilon}\| \leq 2\varepsilon (|\varphi_1| + |\varphi_2| + \varepsilon) \leq C\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit de (a) que:

$$T_{\varphi_1}T_{\varphi_2} - T_{\varphi_1\varphi_2} \in \overline{\mathcal{K}_0(H^2)} \subset \overline{\mathcal{K}(H^2)} \stackrel{1.(b)}{=} \mathcal{K}(H^2)$$

3. (a) Soit $(x_n)_{n \geq 0} \in \text{Ker}(I+K)^{\mathbb{N}} \cap B^{\mathbb{N}}$. Alors: $x_n = -K(x_n) = K(-x_n)$ avec $-x_n \in B, \forall n \geq 0$, donc $x_n \in K(B) \subset \overline{K(B)}$. Par hypothèse sur K , $\overline{K(B)}$ est un compact donc il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ convergente vers $x \in \overline{K(B)}$. Par continuité de K et de la norme, on a: $x = -K(x)$ et $x \in B$, i.e. $x \in \text{Ker}(I+K) \cap B$. Comme ceci est vrai pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0} \in \text{Ker}(I+K)^{\mathbb{N}} \cap B^{\mathbb{N}}$, on en déduit que la boule unité fermée de $\text{Ker}(I+K)$ est compacte i.e. que $\text{Ker}(I+K)$ est de dimension finie.
- (b) Soit $y \in \overline{\text{Im}(I+K)}$ et soit $(x_n)_{n \geq 0} \in H^{\mathbb{N}}$ t.q. $x_n + K(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$. Pour tout $n \geq 0$, $(I+K)(x_n) = (I+K)(x'_n)$ avec $x'_n \in \text{Ker}(I+K)^{\perp}$ projection orthogonale de x_n sur $\text{Ker}(I+K)^{\perp}$. On suppose que $|x'_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et on pose:

$$u_n = \frac{x'_n}{|x'_n|}, \quad \forall n \geq 0.$$

Alors

$$|(I+K)(u_n)| \leq \frac{|x_n + K(x_n)|}{|x'_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

De plus $u_n \in B \Rightarrow K(u_n) \in K(B)$. Par compacité, il existe une suite extraite $(K(u_{\varphi(n)}))_{n \geq 0}$ convergente vers $v \in H$ et alors $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -v$ t.q. $|v| = 1$. Par construction, $u_n \in \text{Ker}(I+K)^{\perp}$ et $\text{Ker}(I+K)^{\perp}$ est fermé donc $v \in \text{Ker}(I+K)^{\perp}$. Par continuité de K : $-v - K(v) = 0$, i.e. $v \in \text{Ker}(I+K)$. Donc $v = 0$, ce qui contredit $|v| = 1$. Donc la suite $(x'_n)_{n \geq 0}$ est bornée dans $\text{Ker}(I+K)^{\perp}$. Soit $M > 0$ t.q. $y'_n := \frac{x'_n}{M} \in B$. Par compacité de $\overline{K(B)}$, on en déduit qu'il existe une suite extraite $(K(y'_{\varphi(n)}))_{n \geq 0}$ convergente vers $y' \in \overline{K(B)}$. Alors $y'_{\varphi(n)} \rightarrow M^{-1}y - y'$ et $x'_{\varphi(n)} \rightarrow y - My' =: x'$. Par continuité de K : $x' + Kx' = y \in \text{Im}(I+K)$, i.e. $\text{Im}(I+K)$ est fermé dans H .

- (c) Soit $(x_n)_{n \geq 0} \in B^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \geq 0$, on considère $f_n : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \langle x_n, x \rangle$. Soit $\Phi = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ et soit $x \in \Gamma$. On pose $\Phi(x) = \{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$. On remarque que: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| \leq |x_n||x| \leq |x|$$

donc $\Phi(x)$ est borné dans \mathbb{C} , ainsi que $\overline{\Phi(x)}$. Il en résulte que $\overline{\Phi(x)}$ est un compact de \mathbb{C} .

On a aussi: $\forall n \geq 0, \forall x, y \in \Gamma,$

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |x - y|$$

donc Φ est équicontinue sur Γ . Du Théorème d'Ascoli, on déduit que $\overline{\Phi}$ est une partie compacte de $\mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{C})$. Donc il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ uniformément convergente sur Γ vers $f \in \mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{C})$.

En particulier la suite $(f_{\varphi(n)} \circ K)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur B vers $f \circ K$. Pour tout $n \geq 0$, $g_n := f_{\varphi(n)} \circ K$ se prolonge naturellement à H en un élément du dual H^* de H en posant:

$$g_n(x) = \langle x_{\varphi(n)}, K(x) \rangle, \quad \forall x \in H$$

et on a aussi:

$$g_n(x) = \langle K^* x_{\varphi(n)}, x \rangle, \quad \forall x \in H.$$

En remarquant que:

$$|g_n|_{\infty} = \sup_{x \in B} |g_n(x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|g_n(x)|}{|x|}$$

on en déduit que $(g_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans H^* , donc convergente vers $g \in H^*$, de la forme:

$$g(x) = \langle y, x \rangle, \quad \forall x \in H$$

où $y \in H$, d'après le Théorème de représentation de Riesz. On a:

$$\|g_n - g\| = |K^* x_{\varphi(n)} - y|, \quad \forall n \geq 0$$

et donc la suite $(K^* x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ est convergente dans H vers $y \in H$.

(d) On a:

$$\text{Im}(I + K)^{\perp} = \text{Ker}(I + K^*).$$

D'après (c), $K^* \in \mathcal{K}(H)$. Donc, en remplaçant K par K^* dans le raisonnement de la question et le raisonnement de (a), on en déduit que $\text{Ker}(I + K^*)$ est de dimension finie, i.e que $\text{Im}(I + K)$ est de codimension finie égale à la dimension de $\text{Ker}(I + K^*)$.

VI. Opérateurs de Fredholm et opérateurs de Toeplitz

1. (a) Comme V est fermé, le théorème de projection orthogonale sur les espaces de Hilbert donne:

$$H = V \oplus V^\perp.$$

De même:

$$H = \overline{W} \oplus \overline{W}^\perp$$

avec:

$$\overline{W}^\perp = W^{\perp\perp\perp} = (W^\perp)^{\perp\perp} = \overline{W^\perp} = W^\perp$$

car l'orthogonal est toujours fermé. Donc on a en fait:

$$H = \overline{W} \oplus W^\perp.$$

avec $V \subset W \Rightarrow W^\perp \subset V^\perp$ et $\dim V^\perp = \text{codim} V < +\infty$ par hypothèse, donc $\dim W^\perp < +\infty$. Soit (e_0, \dots, e_w) une bon de W^\perp , complétée en une bon (e_0, \dots, e_v) , $v \geq w$, de V^\perp . Comme \overline{W} est un sev fermé de H , c'est un espace de Hilbert. Soit $(e_n)_{n>w}$ une base hilbertienne de \overline{W} . De plus, $W \subset V$ par hypothèse, et V est fermé. Donc $\overline{W} \subset V$. On peut donc compléter $(e_n)_{n>w}$ en une base hilbertienne $(e_n)_{n>v}$ de V . Finalement:

$$H = \underbrace{\overline{\text{Vect}\{e_n, n > v\}}}_{=V} \oplus \underbrace{\text{Vect}\{e_{w+1}, \dots, e_v\} \oplus \underbrace{\text{Vect}\{e_0, \dots, e_w\}}_{=W^\perp}}_{=V^\perp},$$

avec en outre:

$$V \subset W \subset V \oplus \text{Vect}\{e_{w+1}, \dots, e_v\} = \overline{W}.$$

Nécessairement, par le théorème de complétion d'une base, quitte à modifier les premiers vecteurs de $\text{Vect}\{e_{w+1}, \dots, e_v\}$, W est de la forme:

$$W = V \oplus \text{Vect}\{e_{w+1}, \dots, e_k\} \quad \text{avec} \quad w+1 \leq k \leq v$$

i.e. W est fermé. Donc $k = v$ et $\overline{W} = W$ est fermé, de codimension finie.

(b) D'après V.3.(a), $\dim \text{Ker}(I+K_1) = \dim \text{Ker}(S_1T) < +\infty$. Comme de plus $\text{Ker}(T) \subset \text{Ker}(S_1T)$, on en déduit que $\dim \text{Ker}(T) < +\infty$. D'après V.3(b), $\text{Im}(I+K_2) = \text{Im}(TS_2)$ est fermé, de codimension finie d'après V.3.(d). D'après (a) appliqué avec $V = \text{Im}(TS_2)$ et $W = \text{Im}(T)$, on en déduit que $\text{Im}(T)$ est fermé de codimension finie. Finalement, $T \in \mathcal{F}(H)$.

2. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^*$. On remarque que $T_1 = I$. De V.2.(b), on déduit que

$$T_\varphi T_{1/\varphi} - I \in \mathcal{K}(H^2) \quad \text{et} \quad T_{1/\varphi} T_\varphi - I \in \mathcal{K}(H^2).$$

De VI.1.(b) appliqué avec $T = T_\varphi$ et $S_1 = S_2 = T_{1/\varphi}$ on déduit que $T_\varphi \in \mathcal{F}(H^2)$.

3. On a: $ST - I = T_0^{-1}PT - I = T_0^{-1}T - I$, par définition de P . Comme $\text{Ker}(T)$ est fermé, on a: $H = \text{Ker}(T) \oplus \text{Ker}(T)^\perp$. Soit $x \in H$ et soit $x = x' + x'' \in \text{Ker}(T) \oplus \text{Ker}(T)^\perp$ la décomposition de x . On a:

$$T_0^{-1}T(x) = T_0^{-1}T(x'') \underset{x'' \in \text{Ker}(T)^\perp}{=} T_0^{-1}T_0(x'') = x'' \Rightarrow T_0^{-1}T(x) - x = -x' \in \text{Ker}(T).$$

Il en résulte que $\text{Im}(ST - I) \subset \text{Ker}(T)$ avec $\dim \text{Ker}(T) < +\infty$ par hypothèse sur T , donc $ST - I \in \mathcal{K}_0(H)$.

Par hypothèse sur T , $\text{Im}(T)$ est fermé donc $H = \text{Im}(T)^\perp \oplus \text{Im}(T)$. On a: $TS - I = TT_0^{-1}P - I = T_0T_0^{-1}P - I = P - I$. Soit $x \in H$ et soit $x = x' + x'' \in \text{Im}(T)^\perp \oplus \text{Im}(T)$ la décomposition de x . On a:

$$Px = x'' \Rightarrow (P - I)(x) = -x' \in \text{Im}(T)^\perp.$$

Par hypothèse sur T , $\text{Im}(T)^\perp$ est de dimension finie égale à $\text{codim} \text{Im}(T)$, donc $\text{Im}(TS - I) \subset \text{Im}(T)^\perp$ est de dimension finie, i.e. $TS - I \in \mathcal{K}_0(H)$.

4. (a) On remarque que

$$\|SJ\| \leq \|S\|\|J\| < 1 \quad \text{et} \quad \|JS\| \leq \|J\|\|S\| < 1$$

ce qui entraîne que $I + SJ$ et $I + JS$ sont inversibles.

La calcul direct montre que nécessairement:

$$K' = (I + SJ)^{-1}K \quad \text{et} \quad L' = L(I + JS)^{-1}.$$

Comme $K \in \mathcal{K}_0(H)$, $\text{Im}((I + SJ)^{-1}K)$ est de même dimension finie que $\text{Im}(K)$, i.e. $K' \in \mathcal{K}_0(H)$.

De plus: $\text{Im}(L') \subset \text{Im}(L)$ donc $L' \in \mathcal{K}_0(H)$ par hypothèse sur L .

On en déduit:

$$(I + SJ)^{-1}S(T + J) - I = K' \in \mathcal{K}_0(H) \subset \mathcal{K}(H)$$

$$(T + J)S(I + JS)^{-1} - I = L' \in \mathcal{K}_0(H) \subset \mathcal{K}(H).$$

De 1.(b) appliqué avec $S_1 = (I + SJ)^{-1}S$ et $S_2 = S(I + JS)^{-1}$, on déduit que $T + J \in \mathcal{F}(H)$.

(b) Par hypothèse: $ST - I \in \mathcal{K}_0(H) \underset{\text{V.1.(a)}}{\subset} \mathcal{K}(H)$ et $TS_I \in \mathcal{K}_0(H) \underset{\text{V.1.(a)}}{\subset} \mathcal{K}(H)$. De 1.(b), on déduit que $S \in \mathcal{F}(H)$.

Il en résulte:

$$\underset{i)}{\text{ind}(S(T + J))} = \text{ind}(S) + \text{ind}(T + J) = \text{ind}((I + SJ)(I + K'))$$

$$\underset{i)}{=} \text{ind}(I + SJ) + \text{ind}(I + K') = \text{ind}(I + K') \underset{ii)}{=} 0$$

$$\underset{i)}{\text{ind}(ST)} = \text{ind}(S) + \text{ind}(T) = \text{ind}(I + K) \underset{ii)}{=} 0.$$

Finalement:

$$\text{ind}(S) + \text{ind}(T) = \text{ind}(S) + \text{ind}(T + J) = 0 \Rightarrow \text{ind}(T) = \text{ind}(T + J) = -\text{ind}(S).$$

5. (a) Soit $f \in H^2$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Le calcul montre que:

$$e_n f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k - n) e_k$$

d'où on déduit:

$$Te_n(f) = \sum_{k \geq 0} \hat{f}(k - n) e_k.$$

Si $n \geq 0$, alors:

$$Te_n(f) = \sum_{k \geq n} \hat{f}(k - n) e_k,$$

donc:

$$\text{Im}(Te_n)^\perp = \text{Vect}\{e_k, 0 \leq k < n\} \Rightarrow \text{codim}_{H^2}(Te_n) = n.$$

De plus:

$$Te_n(f) = 0 \iff \hat{f}(k-n) = 0, \quad \forall k \geq n$$

i.e.: $\text{Ker}T_{e_n} = \{0\}$, et finalement: $\text{ind}(T_{e_n}) = 0 - n = -n$.

Si $n < 0$, alors

$$T_{e_n}(f) = \sum_{k \geq 0} \hat{f}(k-n)e_k,$$

donc $\text{Im}(T_{e_n})^\perp = \{0\}$ et $\text{codim}_{H^2}(T_{e_n}) = 0$. De plus:

$$T_{e_n}(f) = 0 \iff f = \sum_{0 \leq k < |n|} \hat{f}(k)e_k$$

donc $\dim \text{Ker}(T_{e_n}) = |n| = -n$. Finalement: $\text{ind}(T_{e_n}) = -n - 0 = -n$.

Dans tous les cas:

$$\text{ind}(T_{e_n}) = -n \stackrel{\text{II.3.(b)}}{=} -\text{deg}(e_n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. De II.4 et de 4.(b), on déduit:

$$\text{ind}(T_\varphi) + \text{deg}(\varphi) = \text{ind}(T_{e_n}) + \text{deg}(e_n) = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_n^*.$$

(b) Soit $\varphi \in \mathcal{C}^*$. On a: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$T_\varphi(e_n) = \sum_{k \geq 0} \hat{\varphi}(k-n)e_k.$$

Comme $(e_n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne de H^2 et que $(k, n) \mapsto k-n$ est surjective de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur \mathbb{Z} , on en déduit que $\text{Im}(T_\varphi)^\perp = \{0\}$, i.e. $\text{codim}_{H^2}(T_\varphi) = 0$.

De plus

$$\dim \text{Ker}(T_\varphi) = \text{ind}(T_\varphi) + \text{codim}_{H^2}(T_\varphi) \stackrel{5.(a)}{=} -\text{deg}(\varphi).$$

(c) Soit $\varphi \in \mathcal{C}$. De (b), on déduit que T_φ est inversible ssi $\text{deg}(\varphi) = 0$.