Préparation
Année 2022–2023

Corrigé du Sujet 2020

I Exercices préliminaires

1. Soit $s = x + iy \in \mathbb{C}$ et soit $t > 0$. Par définition:

$$t^s = e^{s\ln(t)} = e^{(x+iy)\ln t} = e^{x\ln t}\, e^{iy\ln t} \Rightarrow |t^s| = e^{x\ln t} = t^x.$$

2. (a) Soit $x \in [0,1]$. On pose:

$$\forall n \geq 0, \quad S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} (-x)^k = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}.$$

Alors:

$$|S_n(x)| \leq \frac{2}{1+x} \leq 1.$$

On pose:

$$\forall N \geq 1, \quad R_N(x) = \sum_{n\geq N} \frac{(-1)^n x^n}{n}.$$

Il suffit de montrer que la suite des restes $(R_N)_{N\geq 1}$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$. Soit $N \geq 1$. On a:

$$R_N(x) = \sum_{n\geq N} \frac{S_n(x) - S_{n-1}(x)}{n} = -\frac{S_{N-1}(x)}{N} + \sum_{n\geq N} \frac{S_n(x)}{n(n+1)}$$

avec

$$\left|\frac{S_{N-1}(x)}{N}\right| \leq \frac{1}{N} \underset{N\to+\infty}{\to} 0$$

et

$$\sum_{n\geq 1} \left|\frac{S_n(x)}{n(n+1)}\right| \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

On en déduit que que la suite des restes $(R_N(x))_{N\geq}$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$ comme somme d'une suite uniformément convergente vers 0 sur $[0,1]$ et du reste d'une série uniformément convergente sur $[0,1]$.

Pour tout $n \geq 1$, la somme partielle $x \mapsto \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ est une fonction continue sur $[0,1]$, donc la somme de la série $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n}$ est continue sur $[0,1]$ comme limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de fonctions continues sur $[0,1]$.

(b) On pose

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

On a: $\forall n \geq 1$,

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 1 = \frac{1}{r}$$

i.e. $r = 1$.

On remarque que la série entière $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n}$ est la série primitive de la série $-\sum(-1)^n x^n$. Comme la convergence sur le disque ouvert de convergence est uniforme on en déduit par intégration terme à terme de la série $-\sum(-1)^n x^n$ de somme $x \mapsto -\frac{1}{1+x}$ que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x^n}{n} = -\int_0^x \frac{dt}{1+t} = -\ln(x+1), \quad \forall x \in]-1,1[$$

(c) De (b), on déduit que

$$\forall x \in [0,1[, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x^n}{n} = -\ln(x+1).$$

D'après (a), la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ est une fonction continue sur $[0,1]$. On en déduit que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x\to+1^-} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x^n}{n} = -\ln(2).$$

3. (a) On remarque que

$$\forall x \in [0,1[, \quad \lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow \{x\} = x.$$

On en déduit l'allure du graphe de $x \mapsto \{x\} - \frac{1}{2}$ qui montre que la restriction de cette fonction à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est impaire. En effet, soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et soit $n = \lfloor x \rfloor$. Par définition:

$$n < x < n+1 \iff -n-1 < -x < -n \Rightarrow \lfloor -x \rfloor = -n-1 = -\lfloor x \rfloor - 1,$$

i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad \lfloor -x \rfloor + \frac{1}{2} = -\lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} = -\left(\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}\right),$$

d'où il résulte:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad \lfloor -x \rfloor + x + \frac{1}{2} = -\left(\lfloor x \rfloor - x + \frac{1}{2}\right) \iff \{-x\} + \frac{1}{2} = -\left(\{x\} + \frac{1}{2}\right)$$

On en déduit: $\forall n \geq 0$,

$$a_n\left(x \mapsto \{x\} - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$b_n\left(x \mapsto \{x\} - \frac{1}{2}\right) = 2\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)\sin(2\pi n x)dx$$

$$\underset{y=x-\frac{1}{2}}{=} 2(-1)^n \int_{-1/2}^{1/2} y \sin(2\pi n y)dy = 4(-1)^n \int_0^{1/2} y \sin(2\pi n y)dy$$

$$= 4(-1)^n \left[\frac{-y}{2\pi n}\cos(2\pi n y)\right]_0^{1/2} + \frac{4(-1)^n}{2\pi n}\int_0^{1/2} \cos(2\pi n y)dy$$

$$= \frac{-1}{\pi n}, \quad \text{si} \quad n \neq 0.$$

Si $n = 0$, alors $b_0 = 0$.

(b) L'ensemble des points de discontinuité de $x \mapsto \{x\}$ est $\mathbb{Z}$ donc cette fonction coïncide avec la somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ i.e., compte tenu de (a):

$$\{x\} - \frac{1}{2} = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\pi n}\sin(2\pi n x).$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{-\pi n}\sin(2\pi n x)$ et simplement convergente sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ de somme:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{-\pi n}\sin(2\pi n x) = \{x\} - \frac{1}{2}$$

4. (a) L'application $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

donc $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ se prolonge en une application continue sur $\mathbb{R}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ est définie comme l'intégrale d'une application continue sur $[0, 1]$.

Soit $X > 1$. En intégrant par parties, on obtient:

$$\int_1^X \frac{\sin x}{x} dx = \Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]_1^X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2} dx$$

avec

$$\Big|\frac{\cos x}{x}\Big| \leq \frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$$

$$\int_1^X \Big|\frac{\cos x}{x^2}\Big| dx \leq \int_1^X \frac{1}{x^2} dx < +\infty$$

donc la limite

$$\lim_{X \to \infty} \int_1^X \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \in \mathbb{R}$$

est bien définie comme somme d'une limite finie et d'une intégrale généralisée convergente.

(b) L'application F est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, et 0 est un pôle simple. D'après le Théorème des Résidus:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[\varepsilon,R]} F(x)dx + \int_0^\pi F(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta + \\ &\qquad + \int_{[-R,-\varepsilon]} F(x)dx + \int_\pi^0 F(\varepsilon e^{i\theta})\varepsilon i e^{i\theta}d\theta \\ &= \int_{[\varepsilon,R]} F(x)dx + \int_0^\pi F(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta + \\ &\qquad + \int_{[-R,-\varepsilon]} F(x)dx - \int_0^\pi F(\varepsilon e^{i\theta})\varepsilon i e^{i\theta}d\theta \qquad (1) \end{aligned}$$

avec, par parité de $x \mapsto \cos x$:

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\cos x}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\cos x}{x} dx = -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\cos x}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\cos x}{x} dx = 0$$

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x} dx$$

donc

$$\int_{[-R,-\varepsilon]} F(x)dx + \int_{[\varepsilon,R]} F(x)dx = 2i \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0,\ R \to +\infty} \int_{[\varepsilon,R]} F(x)dx + \int_{[\varepsilon,R]} F(x)dx = 2i \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

De plus:

$$\left| \int_0^{\pi} F(Re^{i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta \right| = \left| i \int_0^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} d\theta \right| \leq \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta$$

avec

$$\lim_{R \to +\infty} e^{-R\sin\theta} = 0, \quad \forall \theta \in]0, \pi[$$

et $\sin\theta \geq 0 \Rightarrow e^{-R\sin\theta} \leq 1$, $\forall \theta \in [0, \pi]$. Du Théorème de convergence dominée, on déduit:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_0^{\pi} F(Re^{i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta = 0.$$

De plus:

$$\int_0^{\pi} F(\varepsilon e^{i\theta}) \varepsilon i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{\pi} e^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta$$

avec:

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad \lim_{\varepsilon \to 0} ie^{i\varepsilon e^{i\theta}} = i$$

et:

$$\left| ie^{i\varepsilon e^{i\theta}} \right| = e^{-\varepsilon \sin\theta} \leq 1$$

avec

$$\int_0^{\pi} d\theta = \pi < +\infty$$

donc, d'après le théorème de convergence dominée:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\pi F(\varepsilon e^{i\theta})\varepsilon i e^{i\theta} d\theta = i\pi$$

En reportant dans (1) les résultats obtenus quand $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$, on obtient:

$$0 = 2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx - i\pi \iff \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

II Autour de la transformée de MELLIN

1. On suppose $I(f) \neq \emptyset$. Soit alors $\sigma \in (f)$. Si $I(f) = \{\sigma\}$, alors $If)$ est un intervalle réduit au singleton $\{\sigma\}$. Sinon, $I(f)$ contient au moins deux élements $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Soit par exemple $\sigma_1 < \sigma_2$ et soit $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$.

   Alors: $\forall t \in \mathbb{R}^+$,

$$t^{\sigma-1} = e^{-(\sigma-1)|\ln t|}\chi_{[0,1]} + e^{(\sigma-1)|\ln t|}\chi_{[1,+\infty[} \leq$$

$$\leq e^{-(\sigma_1-1)|\ln t|}\chi_{[0,1]} + e^{(\sigma_2-1)|\ln t|}\chi_{[1,+\infty[} = t^{\sigma_1-1}\chi_{[0,1]} + t^{\sigma_2-1}\chi_{[1,+\infty[}$$

   On en déduit:

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|t^{\sigma-1}dt \leq \int_0^1 |f(t)|t^{\sigma_1-1}dt + \int_1^{+\infty} |f(t)|t^{\sigma_2-1}dt$$

$$\leq \int_0^{+\infty} |f(t)|t^{\sigma_1-1}dt + \int_0^{+\infty} |f(t)|t^{\sigma_2-1}dt < +\infty.$$

   Donc $[\sigma_1, \sigma_2] \subset I(f)$. On en déduit que $If)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2. Soit $f \in L^2(]0, +\infty[)$. On suppose que $f = 0$ p.p. sur $]1, +\infty[$. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$. On a

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|t^{\sigma-1}dt = \int_0^1 |f(t)|t^{\sigma-1}dt.$$

   Alors $f \in L^2(]0, +\infty[) \Rightarrow \int_0^1 |f(t)|t^{\sigma-1}dt < +\infty$ dès que $t^{\sigma-1} \in L^2(]0, 1[)$, i.e. dès que $2(1-\sigma) < 1$. On a

$$2(1-\sigma) < 1 \iff \sigma > \frac{1}{2}.$$

   Donc: $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\subset I(f)$.

3. Soit $s \in D(f)$ et soit $s = \sigma + iy$. Par définition de $D(f)$, $\sigma \in I(f)$. On a:

$$\int_0^{+\infty} |f(t)t^{s-1}|dt = \int_0^{+\infty} |f(t)t^{\sigma-1+iy}|dt = \int_0^{+\infty} |f(t)|t^{\sigma-1}dt \underset{\sigma \in I(f)}{<} +\infty$$

donc $\mathcal{M}f(s)$ est absolument convergente donc convergente.

4. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$. On a

$$\sigma \in I(1_{]0,1]}) \iff 0 < \int_0^1 t^{\sigma-1}dt < +\infty \iff 1-\sigma < 1 \iff \sigma > 0.$$

i.e. $I(1_{]0,1]}) =]0,+\infty[$.

Soit $s \in D(1_{]0,1]})$. Par définition:

$$\mathcal{M}(1_{]0,1]})(s) = \int_0^1 t^{s-1}dt = \left[\frac{t^s}{s}\right]_0^1 = \left[\frac{e^{s\ln t}}{s}\right]_0^1 = \frac{1}{s} - \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{s\ln t}}{s}$$

avec, en posant $s = \sigma + iy$ avec $\sigma > 0$:

$$\lim_{t\to 0^+} \left|\frac{e^{s\ln t}}{s}\right| = \lim_{t\to 0^+} \left|\frac{e^{(\sigma+iy)\ln t}}{s}\right| = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{\sigma \ln t}}{|s|} \underset{\sigma>0}{=} 0 \Rightarrow \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{s\ln t}}{s} = 0.$$

Il en résulte:

$$\mathcal{M}(1_{]0,1]})(s) = \frac{1}{s}, \quad \forall s \in D(1_{]0,1]}).$$

5. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$. On a

$$\sigma \in I(T_\lambda f) \iff \int_0^{+\infty} |f(\lambda t)|t^{\sigma-1}dt < +\infty$$

$$\underset{y=\lambda t}{\iff} \int_0^{+\infty} |f(y)| \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\sigma-1} \frac{dy}{\lambda} < +\infty \iff \int_0^{+\infty} |f(y)|y^{\sigma-1}dy < +\infty$$
$$\iff \sigma \in I(f).$$

i.e. $I(T_\lambda f) = I(f)$.

Soit $s \in D(f)$. De ce qui précède, on déduit que $s \in D(T_\lambda f)$. On a

$$\mathcal{M}(T_\lambda f)(s) = \int_0^{+\infty} f(\lambda t)t^{s-1}dt \underset{y=\lambda t}{=} \int_0^{+\infty} f(y) \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{s-1} \frac{dy}{\lambda}$$
$$= \lambda^{-s}\mathcal{M}(f)(s)$$

III Fonction zeta de Riemann

1. (a) Soit $s = \sigma + iy \in \mathbb{C}$.

$$\forall n \geq 1, \quad \left|\frac{1}{n^s}\right| = \left|\frac{1}{n^{\sigma+iy}}\right| = \frac{1}{n^\sigma}.$$

D'après le critère sur les séries de Riemann, la série $\sum \frac{1}{n^\sigma}$ converge ssi $\sigma > 1$. On en déduit que les séries $\sum \frac{1}{n^s}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n^s}$ sont absolument convergentes donc convergentes dès que $\sigma > 1$, i.e. que les séries de fonctions $s \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ et $s \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^s}$ convergent simplement sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$.

(b) Soit $a > 1$ et soit $s = \sigma + iy$ avec $\sigma > a$. Alors: $\forall N \geq 1$,

$$\left|\sum_{n\geq N} \frac{1}{n^s}\right| \leq \sum_{n\geq N} \frac{1}{n^\sigma} \leq \sum_{n\geq N} \frac{1}{n^a}$$

et

$$\left|\sum_{n\geq N} \frac{(-1)^n}{n^s}\right| \leq \sum_{n\geq N} \frac{1}{n^\sigma} \leq \sum_{n\geq N} \frac{1}{n^a}.$$

D'après (a), la série $\sum \frac{1}{n^a}$ converge. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n_0 > 0$ t.q.

$$\forall N \geq 1, \quad N \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n\geq N} \frac{1}{n^a} \leq \varepsilon.$$

Alors

$$\forall N \geq 1, \quad N \geq n_0 \Rightarrow \left(\forall s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) \geq a \Rightarrow \left|\sum_{n\geq N} \frac{1}{n^s}\right| \leq \varepsilon\right)$$

resp.:

$$\forall N \geq 1, \quad N \geq n_0 \Rightarrow \left(\forall s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) \geq a \Rightarrow \left|\sum_{n\geq N} \frac{(-1)^n}{n^s}\right| \leq \varepsilon\right)$$

autrement dit, les séries $\sum \frac{1}{n^s}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n^s}$ sont uniformément convergentes sur le demi-plan $\mathcal{P}_a := \{s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) \geq a\}$, donc uniformément convergentes sur tout compact de ce demi-plan. On en déduit que leurs sommes sont homlomorphes sur P_a comme sommes de séries de fonctions holomorphes uniformément convergentes sur tout compact de $\mathcal{P}_a$. Ceci étant vrai pour tout $a > 1$, on en déduit que les fonctions ζ et G sont holomorphes sur $\mathcal{P}_1$.

2. Soit $s \in \mathcal{P}_1$. Par définition de la somme de séries convergentes:

$$\zeta(s) + G(s) = \sum_{n\geq 1} \left(\underbrace{\frac{1}{n^s} + \frac{(-1)^n}{n^s}}_{\neq 0 \iff n\equiv 0 \mod (2)} \right) = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{(2n)^s}$$

$$= \frac{1}{2^{s-1}} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{2^{s-1}}\zeta(s).$$

$$\iff G(s) = \left(\frac{1}{2^{s-1}} - 1\right)\zeta(s) \iff \zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{1-2^{s-1}}G(s).$$

Remarque : Autre solution: Les fonctions ζ et G étant les sommes de séries uniformément convergentes sur $\mathcal{P}_1$, on peut les réordonner pour écrire: $\forall s \in \mathcal{P}_1$,

$$\zeta(s) = \sum_{n\equiv 0 \mod (2)} \frac{1}{n^s} + \sum_{n\equiv 1 \mod (2)} \frac{1}{n^s}$$

$$G(s) = \sum_{n\equiv 0 \mod (2),} \frac{1}{n^s} - \sum_{n\equiv 1 \mod (2)} \frac{1}{n^s}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\equiv 0 \mod (2)} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{2}(\zeta(s) + G(s)), \qquad \sum_{n\equiv 1 \mod (2)} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{2}(\zeta(s) - G(s)).$$

D'autre part:

$$\sum_{n\equiv 0 \mod (2)} \frac{1}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n)^s} = \frac{1}{2^s}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s} = \frac{1}{2^s}\zeta(s)$$

$$\Rightarrow \sum_{n\equiv 0 \mod (2)} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2}(\zeta(s) + G(s))$$

$$\iff G(s) = \left(\frac{1}{2^{s-1}} - 1\right)\zeta(s) \iff \zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{1-2^{s-1}}G(s).$$

3. (a) Soit $s \in \mathbb{C}$ et soit $N \geq 1$. On a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^s} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{s-\varepsilon}} \frac{(-1)^n}{n^{\varepsilon}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{s-\varepsilon}} (B_\varepsilon(n) - B_\varepsilon(n-1)) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{s-\varepsilon}} B_\varepsilon(n) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{s-\varepsilon}} B_\varepsilon(n-1) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{s-\varepsilon}} B_\varepsilon(n) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(n+1)^{s-\varepsilon}} B_\varepsilon(n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} B_\varepsilon(n) \left(\frac{1}{n^{s-\varepsilon}} - \frac{1}{(n+1)^{s-\varepsilon}} \right) + \frac{B_\varepsilon(N)}{(N+1)^{s-\varepsilon}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{B_\varepsilon(n)}{(n+1)^{s-\varepsilon}} \left(\frac{(n+1)^{s-\varepsilon}}{n^{s-\varepsilon}} - 1 \right) + \frac{B_\varepsilon(N)}{(N+1)^{s-\varepsilon}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{B_\varepsilon(n)}{(n+1)^{s-\varepsilon}} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1 \right) + \frac{B_\varepsilon(N)}{(N+1)^{s-\varepsilon}}$$

(b) On remarque que $\frac{1}{k^\varepsilon} \underset{k \to +\infty}{\searrow} 0$. D'après le théorème sur les séries alternées, on en déduit que la série alternée $\sum \frac{(-1)^k}{k^\varepsilon}$ est convergente, i.e. que la suite $(B_\varepsilon(n))_{n \geq 0}$ converge, ce qui permet de définir G sur $\mathbb{R}_*^+$ en posant

$$\forall \varepsilon > 0, \quad G(\varepsilon) = \lim_{n \to +\infty} B_\varepsilon(n).$$

Soit $s = \sigma + iy \in \mathcal{P}_\varepsilon$. On a: $\forall N \geq 1$,

$$\left| \frac{B_\varepsilon(N)}{(N+1)^{s-\varepsilon}} \right| \leq \frac{C}{(n+1)^{\sigma-\varepsilon}} \underset{N \to +\infty}{\to} 0$$

On remarque que: $\forall n \geq 1$,

$$B_\varepsilon(2n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{(2k+1)^\varepsilon} - \frac{1}{(2k+2)^\varepsilon} \right)$$

avec

$$\forall k \geq 1, \quad \frac{1}{(2k+1)^{\varepsilon}} - \frac{1}{(2k+2)^{\varepsilon}} > 0.$$

On en déduit que $G(\varepsilon) = \lim_{n\to+\infty} B_{\varepsilon}(2n)$ est la limite d'une suite croissante à termes > 0 et donc que $G(\varepsilon) \geq B_{\varepsilon}(2) = 1 - \frac{1}{2^{\varepsilon}} > 0$.
De plus

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1 = e^{(s-\varepsilon)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1 = e^{(s-\varepsilon)\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} - 1 =$$

$$= \sum_{k\geq 1} \frac{(s-\varepsilon)^k}{k!}\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^k = (s-\varepsilon)\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(s-\varepsilon)}{n}$$

En particulier:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{s-\varepsilon}}{n^{s-\varepsilon}} = 1 \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^{s-\varepsilon}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{s-\varepsilon}}$$

Il en résulte:

$$\frac{B_{\varepsilon}(n)}{(n+1)^{s-\varepsilon}}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{G(\varepsilon)}{n^{s-\varepsilon}}\frac{(s-\varepsilon)}{n} = \frac{G(\varepsilon)}{n^{s-\varepsilon+1}}$$

avec

$$\left|\frac{1}{n^{s-\varepsilon+1}}\right| = \frac{1}{n^{\sigma-\varepsilon+1}}$$

avec $s \in \mathcal{P}_{\varepsilon} \Rightarrow \sigma - \varepsilon + 1 > 1$. On en déduit que la série $\sum \frac{1}{n^{s-\varepsilon+1}}$ est absolument convergente donc convergente, puis que la série de terme général $\dfrac{B_{\varepsilon}(n)}{(n+1)^{s-\varepsilon}}\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1\right)$ est convergente.
Finalement, $\forall s \in \mathcal{P}_{\varepsilon}$,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{B_{\varepsilon}(N)}{(N+1)^{s-\varepsilon}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(s) := \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^s} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{B_{\varepsilon}(n)}{(n+1)^{s-\varepsilon}}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1\right)$$

(c) i. Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit $u > 0$. On a

$$|(1+u)^{it} - 1| = |e^{it\ln(1+u)} - 1| = \left| \sum_{n \geq 1} \frac{(it)^n}{n!} (\ln(1+u))^n \right|$$

$$\leq \sum_{n \geq 1} \frac{|t|^n}{n!} (\ln(1+u))^n = e^{|t|\ln(1+u)} - 1.$$

On pose

$$\forall u > -1, \quad f(u) = e^{|t|\ln(1+u)} - 1 - |t|u.$$

Alors f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ de dérivée définie par:

$$\forall u \in] \in -1, +\infty[, \quad f'(u) = \frac{|t|}{1+u} - |t| = -\frac{|t|u}{1+u}.$$

On en déduit: $\forall u \in]0, +\infty[, \quad f'(u) < 0 \Rightarrow f(u) \leq f(0) = 0$, i.e.:

$$\forall u \in]0, +\infty[, \quad e^{|t|\ln(1+u)} - 1 \leq |t|u.$$

Finalement:

$$\forall u \in]0, +\infty[, \quad |(1+u)^{it} - 1| \leq e^{|t|\ln(1+u)} - 1 \leq |t|u.$$

ii. Soit $x \in [0, 1]$ et soit $u > 0$. On a

$$|(1+u)^x - 1| = |e^{x\ln(1+u)} - 1| = e^{x\ln(1+u)} - 1.$$

En remplaçant $|t|$ par x dans le raisonnement de la question i., on conclut:

$$|(1+u)^x - 1| = e^{x\ln(1+u)} - 1 \leq xu.$$

iii. Si $\sigma = \varepsilon$, alors $s - \varepsilon = it$ et alors:

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1 \right| = \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{it} - 1 \right| \underset{i.}{\leq} \frac{|t|}{n}. \qquad (2)$$

Sinon, on remarque que: $\forall r \in \mathbb{R}^+$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$|re^{i\theta} - 1|^2 = (r\cos\theta - 1)^2 + r^2(\sin\theta)^2 = r^2 - 2r\cos\theta + 1 \leq (r-1)^2$$

$$\Rightarrow |re^{i\theta} - 1| \leq |r - 1|.$$

En posant $r = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sigma-\varepsilon}$ et $\theta = t$, on obtient, en remarquant que $\sigma - \varepsilon \in [0, 1]$,

$$\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1\right| = \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sigma-\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{it} - 1\right| \leq$$

$$\leq \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sigma-\varepsilon} - 1\right| \underset{ii.}{\leq} \frac{\sigma - \varepsilon}{n} \leq \frac{1}{n} \tag{3}$$

De (2) et (3) on déduit que dans tous les cas:

$$\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1\right| \leq \frac{1 + |t|}{n}$$

(d) Soit $a > 0$ et soit $\varepsilon \in]0, a[$. De (b) on déduit: $a > \varepsilon \Rightarrow$

$$\forall s \in \mathcal{P}_a, \quad s \in \mathcal{P}_\varepsilon \Rightarrow G(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{B_\varepsilon(n)}{(n+1)^{s-\varepsilon}} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1\right).$$

avec, d'après (c) iii., en posant $s = \sigma + it$:

$$\left|\frac{B_\varepsilon(n)}{(n+1)^{s-\varepsilon}} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1\right)\right| \leq C\frac{(1 + |t|)}{n^{\sigma-\varepsilon+1}}.$$

On en déduit que sur tout compact de $\mathcal{P}_a$ de la forme

$$K_R = \{s = \sigma + it \in \mathbb{C},\ a \leq \sigma \leq 1 + \varepsilon, \quad |t| \leq R\}, \quad R > 0$$

on a:

$$\forall s \in K_R, \quad \left|\frac{B_\varepsilon(n)}{(n+1)^{s-\varepsilon}} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1\right)\right| \leq C\frac{(1 + R)}{n^{a-\varepsilon+1}}.$$

avec $a - \varepsilon + 1 > 1$, donc $G(s)$ est la somme d'une série de fonctions holomorphes uniformément convergente sur K_R, donc G est holomorphe sur tout compact de $\mathcal{P}_{a,\varepsilon} = \{s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) \in [a, a + \varepsilon]\}$, donc holomorphe sur $\mathcal{P}_{a,\varepsilon}$. De 1.(b), on déduit que G est holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 0\}$.

4. D'après 3., l'application $s \mapsto 2^{s-1}G(s)$ est holomorphe sur le demi-plan $\mathcal{P}_0$. De plus:

$$1 - 2^{s-1} = 0 \iff e^{(s-1)\ln 2} = 1 \iff (s-1)\ln 2 = 0 \iff s = 1$$

donc 2. montre que ζ est méromorphe sur $\mathcal{P}_0$ et admet $s = 1$ pour unique pôle. De plus

$$\lim_{s\to 1} \frac{2^{s-1}-1}{s-1} = \lim_{s\to 1} \frac{e^{(s-1)\ln 2}-1}{s-1} = \ln 2\, e^{(s-1)\ln 2}\big|_{s=1} = \ln 2 \neq 0$$

i.e. $s = 1$ est un pôle simple de ζ. On en déduit:

$$\mathrm{Res}_{s=1}\zeta = \lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) \underset{2.}{=} \lim_{s\to 1} \frac{(s-1)}{(1-2^{s-1})} 2^{s-1}G(s) = -\frac{G(1)}{\ln 2} \underset{(I.2.)}{=} 1.$$

IV Fonction partie fractionnaire

1. (a) Soit $n \geq 1$ et soit $x \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$. On a

$$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \iff n \leq \frac{1}{x} < n+1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = n.$$

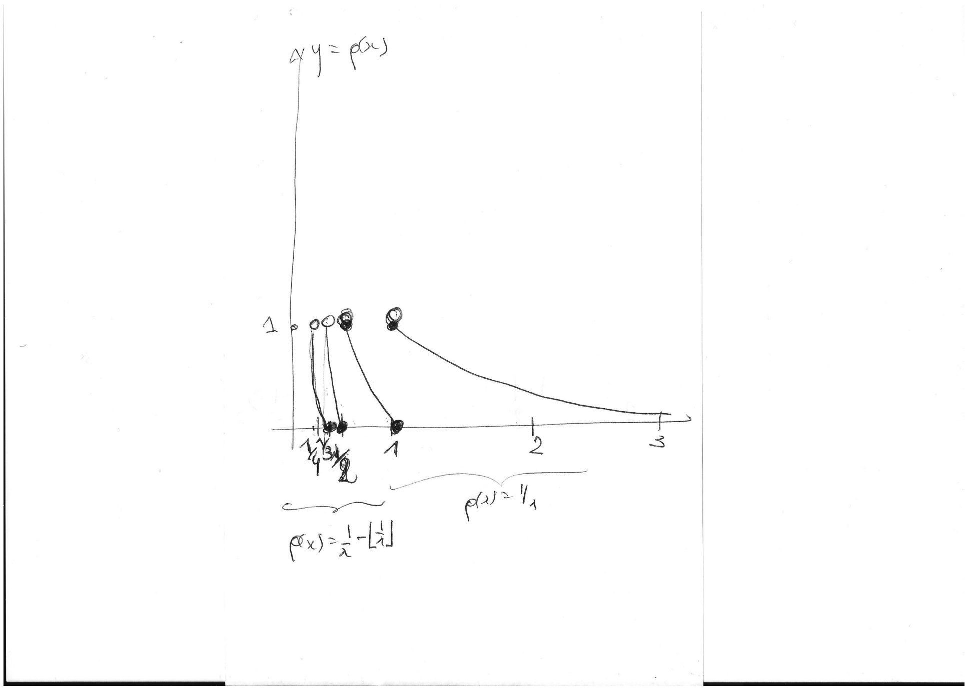
On en déduit: $\rho(x) = \dfrac{1}{x} - n$.
En particulier: $\rho\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.
Soit $x > 1$. Alors $\frac{1}{x} \in]0,1[\Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$. On en déduit:

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \rho(x) = \frac{1}{x}.$$

(b) Voir la figure.

(c) Soit $\mathcal{C}_\rho$ le domaine de continuité de ρ. D'après (a), ρ est continue sur $]1, +\infty[$ ainsi que sur $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, $\forall n \geq 1$. Donc

$$\cup_{n\geq 1} \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[\cup]1, +\infty[\subset \mathcal{C}_\rho$$



avec: $\forall n \geq 1$,

$$\lim_{x \to \frac{1}{n}^+} \rho(x) = \lim_{x \to \frac{1}{n}} \left(\frac{1}{x} - n + 1 \right) = 1 \neq 0 = \rho\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc

$$\mathcal{C}_\rho = \cup_{n \geq 1} \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[\cup]1, +\infty[$$

De plus, d'après (a): $\rho(]1, +\infty[) =]0, 1[$ et

$$\forall n \geq 1, \quad \rho\left(\left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \right) = [0, 1[.$$

Finalement $\rho(]0, +\infty[) = [0, 1[$ et ρ est bornée.

2. Par définition de ρ:

$$\int_1^{+\infty} |\rho(x)|^2 dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{+\infty} = 1.$$

De plus: $\rho(]0,+\infty[) = [0,1[\Rightarrow$

$$\int_0^1 |\rho(x)|^2 dx \leq \int_0^1 dx = 1.$$

Finalement:

$$\|\rho\|_2^2 \leq 1+1 = 2 \iff \|\rho\|_2 \leq \sqrt{2}.$$

3. Soit $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ avec $\sigma < 1$. On a

$$\int_1^{+\infty} |\rho(x)x^{s-1}|dx = \int_1^{+\infty} \rho(x)x^{\sigma-1}dx = \int_1^{+\infty} x^{\sigma-1}\frac{dx}{x} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2-\sigma}}$$

avec

$$2-\sigma > 2-1 = 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} |\rho(x)x^{s-1}|dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2-\sigma}} < +\infty$$

i.e. $x \mapsto \rho(x)x^{s-1}$ est intégrable sur $]1+\infty[$. On a

$$I_1(s) = \int_1^{\infty} x^{s-2}dx = \left.\frac{x^{s-1}}{s-1}\right|_1^{+\infty}$$

avec

$$\sigma < 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} |x^{s-1}| = \lim_{x\to+\infty} x^{\sigma-1} = 0$$

donc $\lim_{x\to+\infty} x^{s-1} = 0$.

On conclut que:

$$I_1(s) = \frac{1}{1-s} \quad \text{si} \quad \mathrm{Re}(s) < 1.$$

4. (a) Soit $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ avec $\sigma > 0$. On a $0 \leq \rho \leq 1 \Rightarrow$

$$\int_0^1 |\rho(x)x^{s-1}|dx = \int_0^1 \rho(x)x^{\sigma-1}dx \leq \int_0^1 x^{\sigma-1}dx$$

avec $\lim_{x\to0^+} x^\sigma = 0$ car $\sigma > 0$, donc

$$\int_0^1 |\rho(x)x^{s-1}|dx \leq \left.\frac{x^\sigma}{\sigma}\right|_0^1 = \frac{1}{\sigma} < +\infty,$$

i.e. $x \mapsto \rho(x)x^{s-1}$ est intégrable sur $]0,1]$.
Soit $a > 0$ et soit $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ t.q. $\sigma \geq a$. On a: $\forall x \in]0,1]$,

$$|\rho(x)x^{s-1}| = \rho(x)x^{\sigma-1} = \rho(x)e^{-(\sigma-1)|\ln(x)|} \leq \rho(x)e^{-(a-1)|\ln(x)|} = \rho(x)x^{a-1}$$

et le raisonnement précédent monte que $x \mapsto \rho(x)x^{a-1}$ est intégrable sur $]0,1]$, donc d'après le Théorème d'holomorphie des fonctions intégrales, $s \mapsto I_2(s)$ est holomorphe sur tout compact de la forme $\{s \in \mathbb{C},\ a \leq \mathrm{Re}(s) \leq R\}$, $0 < a < R$. On en déduit que $s \mapsto I_2(s)$ est holomorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 0\}$.

(b) Soit $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ avec $\sigma > 1$. On a:

$$\int_0^1 |x^{s-1}| = \int_0^1 x^{\sigma-1}dx = \left.\frac{x^\sigma}{\sigma}\right|_0^1$$

avec

$$\sigma > 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^\sigma = \lim_{x\to 0^+} e^{\sigma \ln x} = 0$$

donc

$$\int_0^1 |x^{s-1}| = \left.\frac{x^\sigma}{\sigma}\right|_0^1 = \frac{1}{\sigma} < +\infty$$

donc $\int_0^{1/n} x^{s-1}dx$ est bien défini, $\forall n \geq 1$. On a:

$$\sum_{n\geq 1}\int_0^{1/n} x^{s-1}dx = \sum_{n\geq 1}\left.\frac{x^s}{\sigma}\right|_0^{1/n} = \frac{1}{s}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s} = \frac{1}{s}\zeta(s). \qquad (4)$$

De plus,

$$\sum_{n\geq 1}\int_0^{1/n} x^{s-1}dx = \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq n}\int_{1/(k+1)}^{1/k} x^{s-1}dx$$

avec:

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq n}\int_{1/(k+1)}^{1/k}|x^{s-1}|dx = \sum_{k\geq 1}\sum_{1\leq n\leq k}\int_{1/(k+1)}^{1/k} x^{\sigma-1}dx =$$

$$= \sum_{n\geq 1}\int_0^{1/n} x^{\sigma-1}dx = \frac{1}{\sigma}\zeta(\sigma) \underset{\sigma>1}{<} +\infty.$$

Du Théorème de Fubini-Tonelli, on déduit:

$$\sum_{n\geq 1}\int_0^{1/n} x^{s-1}dx = \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq n}\int_{1/(k+1)}^{1/k} x^{s-1}dx$$

$$= \sum_{k\geq 1} k\int_{1/(k+1)}^{1/k} x^{s-1}dx = \sum_{k\geq 1}\int_{1/(k+1)}^{1/k} \left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor x^{s-1}dx = \int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor x^{s-1}dx$$

Il en résulte:

$$\int_0^1 \rho(x)x^{s-1}dx = \int_0^1 x^{s-2}dx - \int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor x^{s-1}dx =$$

$$= \frac{1}{s-1} - \sum_{n\geq 1}\int_0^{1/n} x^{s-1}dx = \frac{1}{s-1} - \frac{\zeta(s)}{s}$$

$$\iff \zeta(x) = \frac{s}{s-1} - s\int_0^1 \rho(x)x^{s-1}dx.$$

(c) D'après III.4., ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 0\}$ dont l'expression est donnée par (a)–(b):

$$\zeta(x) = \frac{s}{s-1} - s\int_0^1 \rho(x)x^{s-1}dx \quad \text{si} \quad \mathrm{Re}(s) > 0.$$

Compte tenu de (a), ζ admet 1 pour unique pôle dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 0\}$. De plus:

$$\mathrm{Res}\,\zeta|_{s=1} = \mathrm{Res}\frac{s}{s-1}\bigg|_{s=1}$$

avec

$$\frac{s}{s-1} \underset{s\to 1}{\sim} \frac{1}{s-1} \Rightarrow \mathrm{Res}\,\zeta|_{s=1} = \mathrm{Res}\frac{s}{s-1}\bigg|_{s=1} = 1.$$

5. De 3. et 4.(a) on déduit que $]0,1[\subset I(\rho)$.

   Soit $s \in \mathbb{C}$ t.q. $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. D'après 3. et 4.(c):

$$\zeta(s) \underset{4.(c)}{=} \frac{s}{s-1} - s\int_0^1 \rho(t)t^{s-1}dt \underset{3.}{=} -s\int_1^{+\infty} \rho(t)t^{s-1}dt = -s\mathcal{M}\rho(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}\rho(s) = -\frac{\zeta(s)}{s}.$$

V Distance de $1_{]0,1]}$ à un espace de fonctions

1. Soit $f \in \mathcal{B}_N$, $f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n T_n \rho$.

   Soit $x \in]1, +\infty[$. D'après le raisonnement de IV.1.(a),

$$\forall n \geq 1, \quad nx > n \geq 1 \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{nx} = \frac{1}{x} Q_f(1).$$

   On en déduit:

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{1}{x} Q_f(1).$$

   Il en résulte

$$f|_{]1,+\infty[} = 0 \iff Q_f(1) = 0 \iff f \in \widetilde{B_N}.$$

2. (a) Par définition: $\tilde{f} = \sum_{n=1}^{N} \tilde{c}_n T_n \rho \in \mathcal{B}_N$ avec

$$\tilde{c}_n = \begin{cases} c_1 - Q_f(1) & \text{si} \quad n = 1, \\ c_n & \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

   Soit $x > 1$. Alors $\rho(x) = \dfrac{1}{x}$ et d'après 1.: $f \in \mathcal{B}_N \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} Q_f(1)$. Il en résulte: $\tilde{f}(x) = 0$. De 1., on déduit que $\tilde{f} \in \widetilde{B_N}$.

   (b) On a

$$\int_1^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_1^{+\infty} \frac{|Q_f(1)|^2}{x^2} dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} |Q_f(1)|^2 =$$

$$= -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} |Q_f(1)|^2 = |Q_f(1)|^2.$$

   (c) On a:

$$\int_0^{+\infty} |f - \tilde{f}|^2 dx \underset{(a)}{=} \int_0^1 |f - \tilde{f}|^2 dx + \int_1^{+\infty} |f|^2 dx$$

$$\underset{(b)}{=} \int_0^1 |f - \tilde{f}|^2 dx + |Q_f(1)|^2$$

$$= |Q_f(1)|^2 \left(\int_0^1 |\rho|^2 dx + 1 \right).$$

De plus:

$$\int_0^{+\infty} |f - 1_{]0,1]}|^2 dx = \int_0^1 |f-1|^2 dx + \int_1^{+\infty} |f|^2 dx$$

$$\underset{(b)}{=} \int_0^1 |f-1|^2 dx + |Q_f(1)|^2.$$

On en déduit:

$$2\int_0^{+\infty} |f - 1_{]0,1]}|^2 dx - \int_0^{+\infty} |f - \tilde{f}|^2 dx =$$

$$= 2\left(\int_0^1 |f-1|^2 dx + |Q_f(1)|^2 \right) - |Q_f(1)|^2 \left(\int_0^1 |\rho|^2 dx + 1 \right)$$

$$= 2\int_0^1 |f-1|^2 dx + |Q_f(1)|^2 \left(1 - \int_0^1 |\rho|^2 dx \right)$$

$$\geq 2\int_0^1 |f-1|^2 dx \geq 0.$$

i.e.:

$$\int_0^{+\infty} |f - \tilde{f}|^2 dx \leq 2\int_0^{+\infty} |f - 1_{]0,1]}|^2 dx.$$

On en déduit:

$$\|\tilde{f} - 1_{]0,1]}\|_2 \leq \|f - \tilde{f}\|_2 + \|f - 1_{]0,1]}\|_2$$

$$\leq \sqrt{2}\|f - 1_{]0,1]}\|_2 + \|f - 1_{]0,1]}\|_2 = (\sqrt{2}+1)\|f - 1_{]0,1]}\|_2$$

3. Soit $s \in \mathbb{C}$ avec $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ et soit $\tilde{f} \in \widetilde{\mathcal{B}_N}$.

   Par définition de $\widetilde{\mathcal{B}_N}$, $\tilde{f} \in \widetilde{\mathcal{B}_N} \Rightarrow \tilde{f} \in \mathcal{B}_N$. Soit alors $\tilde{f} = \sum_{n=1}^N \tilde{c}_n T_n \rho$.

   Par définition de $\widetilde{B_N}$, $\tilde{f}|_{]1,+\infty[} = 0$, donc

$$\int_0^1 \tilde{f}(x) x^{s-1} dx = \mathcal{M}\tilde{f}(s) = \sum_{n=1}^N \tilde{c}_n \mathcal{M}(T_n\rho)(s)$$

$$\underset{II.5.}{=} \sum_{n=1}^{N} \frac{\tilde{c}_n}{n^s} \mathcal{M}\rho(s) = Q_{\tilde{f}}(s)\mathcal{M}\rho(s)$$

$$\underset{IV.5.}{=} -Q_{\tilde{f}}(s)\frac{\zeta(s)}{s}$$

4. Soit $f \in \mathcal{B}_N$. De 3., on déduit que

$$\int_0^1 \tilde{f}x^{\beta-1}dx = 0 = \int_0^1 (\tilde{f}-1)x^{\beta-1}dx + \int_0^1 x^{\beta-1}dx = \int_0^1 (\tilde{f}-1)x^{\beta-1}dx + \left.\frac{x^\beta}{\beta}\right|_0^1$$

avec

$$\mathrm{Re}(\beta) > 0 \Rightarrow |x^\beta| = x^{\mathrm{Re}(\beta)} = e^{\mathrm{Re}(\beta)\ln x} \underset{x\to 0^+}{\to} 0$$

donc

$$0 = \int_0^1 \tilde{f}x^{\beta-1}dx = \int_0^1 (\tilde{f}-1)x^{\beta-1}dx + \frac{1}{\beta}$$

i.e.:

$$\frac{1}{\beta} = -\int_0^1 (\tilde{f}-1)x^{\beta-1}dx.$$

Onen déduit:

$$\frac{1}{|\beta|} \leq \|\tilde{f} - 1_{]0,1]}\|_2 \sqrt{\int_0^1 |x^{\beta-1}|^2 dx}$$

$$= \|\tilde{f} - 1_{]0,1]}\|_2 \sqrt{\int_0^1 x^{2\mathrm{Re}(\beta)-2}dx} = \|\tilde{f} - 1_{]0,1]}\|_2 \sqrt{\left.\frac{x^{2\mathrm{Re}(\beta)-1}}{2\mathrm{Re}(\beta)-1}\right|_0^1}$$

avec

$$2\mathrm{Re}(\beta) > 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^{2\mathrm{Re}(\beta)-1} = 0$$

donc

$$\frac{1}{|\beta|} \leq \|\tilde{f} - 1_{]0,1]}\|_2 \sqrt{\frac{1}{2\mathrm{Re}(\beta)-1}} = \frac{\|\tilde{f} - 1_{]0,1]}\|_2}{\sqrt{2\mathrm{Re}(\beta)-1}}$$

i.e.:

$$\frac{\sqrt{2\mathrm{Re}(\beta)-1}}{|\beta|} \leq \|\tilde{f} - 1_{]0,1]}\|_2.$$

5. On suppose que $1_{]0,1]} \in \overline{\mathcal{B}_N}^{L^2}$. On suppose de plus qu'il existe $\beta \in \mathbb{C}$ avec $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(\beta) < 1$ t.q. $\zeta(\beta) = 0$. D'après 4.:

$$\forall f \in \mathcal{B}_N, \quad \frac{\sqrt{2\mathrm{Re}(\beta) - 1}}{|\beta|} \leq \|\tilde{f} - 1_{]0,1]}\|_2.$$

On en déduit:

$$0 < \frac{\sqrt{2\mathrm{Re}(\beta) - 1}}{|\beta|} \leq \inf_{f \in \mathcal{B}_N} \|\tilde{f} - 1_{]0,1]}\|_2$$

en contradiction avec

$$1_{]0,1]} \in \overline{\mathcal{B}_N}^{L^2} \Rightarrow \inf_{f \in \mathcal{B}_N} \|\tilde{f} - 1_{]0,1]}\|_2 = 0$$

VI Applications linéaires de $L^2(]0, +\infty[)$

1. (a) La linéarité de D_θ est immédiate. Soit $f \in L^2(]0, +\infty[)$ On a:

$$\int_0^{+\infty} |D_\theta f|^2 dx = \int_0^{+\infty} \theta |f(\theta x)|^2 dx \underset{y=\theta x}{=} \|f\|_2^2 < +\infty$$

donc D_θ est une application linéaire de $L^2(]0, +\infty[)$ dans $L^2(]0, +\infty[)$. On remarque que l'application $\Lambda_\theta : x \mapsto \theta x$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ d'inverse $\Lambda_\theta^{-1} = \Lambda_{1/\theta}$. On a

$$D_\theta f = g \iff \sqrt{\theta} f \circ \Lambda_\theta = g \iff f = \frac{1}{\sqrt{\theta}} g \circ \Lambda_{1/\theta} = D_{1/\theta} g.$$

(b) On a: $\forall \theta > 0$, $\forall \theta' > 0$, $\forall f \in L^2(]0, +\infty[)$

$$D_\theta \circ D_{\theta'} f = \sqrt{\theta} D_{\theta'} f \circ \Lambda_\theta = \sqrt{\theta}\sqrt{\theta'} f \circ (\Lambda_\theta \circ \Lambda_{\theta'}) = \sqrt{\theta\theta'} f \circ \Lambda_{\theta\theta'} = D_{\theta\theta'} f$$

i.e.

$$\forall \theta > 0, \quad \forall \theta' > 0, \quad D_\theta \circ D_{\theta'} = D_{\theta'} \circ D_\theta = D_{\theta\theta'}. \qquad (5)$$

En particulier: $D_1 = id$.

Compte tenu de (a), on en déduit que l'application $D :]0, +\infty[\to L^2(:]0, +\infty[)$, $\theta \mapsto D_\theta$, est un morphisme de groupes de $(]0, +\infty[, \times)$ dans l'ensemble des applications $]0, +\infty[\to \overline{\mathbb{R}}$ muni de la composition $(f, g) \mapsto f \circ g$. Son image $\{D_\theta, \ \theta > 0\}$ est donc un sous-groupe de l'ensemble des applications $]0, +\infty[\to \overline{\mathbb{R}}$ et ce sous-groupe est commutatif d'après (5).

2. (a) La linéarité de J est immédiate.
Soit $f \in L^2(]0,+\infty[)$. On a

$$\int_0^{+\infty} |Jf(x)|^2 dx = \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx x^2.$$

Le changement de variable $y = \frac{1}{x}$, $dy = -\frac{dx}{x^2}$, donne:

$$\int_0^{+\infty} |Jf(x)|^2 dx = \int_0^{+\infty} |f(y)|^2 dy = \|f\|_2^2 < +\infty$$

i.e. $\|Jf\|_2 = \|f\|_2 < +\infty$. On en déduit, J étant linéaire, que J est un endomorphisme continu de $L^2(]0,+\infty[)$ de norme:

$$|||J||| := \sup_{f\in L^2(]0,+\infty[)} \frac{\|Jf\|_2}{\|f\|_2} = 1$$

(b) Soit l'application $\Lambda^\sharp :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Alors

$$\forall f \in L^2(]0,+\infty[), \quad Jf = \Lambda^\sharp \cdot f \circ \Lambda^\sharp.$$

On en déduit, par linéarité de J: $\forall \theta > 0$, $\forall f \in L^2(]0,+\infty[)$,

$$JD_\theta f = J(\sqrt{\theta} f \circ \Lambda_\theta) = \sqrt{\theta} J(f \circ \Lambda_\theta)$$

puis, par définition de J et par associativité de la composition:

$$JD_\theta f = \sqrt{\theta}\Lambda^\sharp \cdot f \circ (\Lambda_\theta \circ \Lambda^\sharp)$$

De plus:

$$\forall x > 0, \quad (\Lambda_\theta \circ \Lambda^\sharp)(x) = \frac{\theta}{x} = (\Lambda^\sharp \circ \Lambda_{1/\theta})(x)$$

i.e. $\Lambda_\theta \circ \Lambda^\sharp = \Lambda^\sharp \circ \Lambda_{1/\theta} \Rightarrow$

$$JD_\theta f = \sqrt{\theta}\Lambda^\sharp \cdot f \circ (\Lambda^\sharp \circ \Lambda_{1/\theta}) = \sqrt{\theta}\Lambda^\sharp \cdot (f \circ \Lambda^\sharp) \circ \Lambda_{1/\theta} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\theta}}\Lambda^\sharp \circ \Lambda_{1/\theta} \cdot (f \circ \Lambda^\sharp) \circ \Lambda_{1/\theta} = D_{1/\theta} Jf$$

i.e. $JD_\theta = D_{1/\theta} J$.

3. (a) Soit $f \in L^2(]0,+\infty[) \cap \mathcal{C}(]0,+\infty[)$. Soit $X > 1$ et soit $\xi \in]0,1[$.
La régularité $\mathcal{C}(]0,+\infty[)$ de f permet d'intégrer par parties dans

$$\int_\xi^X \frac{1}{x^2} \left| \int_0^x f(t)dt \right|^2 dx$$

en posant

$$U(x) = \left| \int_0^x f(t)dt \right|^2, \quad V'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Alors:

$$U'(x) = 2 \int_0^x f(t)dt f(x), \quad V(x) = -\frac{1}{x}$$

d'où on déduit:

$$\int_\xi^X \frac{1}{x^2} \left| \int_0^x f(t)dt \right|^2 dx = - \left. \frac{1}{x} \left| \int_0^x f(t)dt \right|^2 \right|_\xi^X +$$

$$+ \int_\xi^X \frac{2}{x} f(x) \int_0^x f(t)dtdx$$

avec: $\forall x \in]0,+\infty[$,

$$0 < \frac{1}{x} \left| \int_0^x f(t)dt \right|^2 \leq \int_0^x |f(t)|^2 dt \leq \|f\|_2^2 < +\infty$$

donc

$$\limsup_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \left| \int_0^x f(t)dt \right|^2 \leq \lim_{x \to 0^+} \int_0^x |f(t)|^2 dt = 0$$

i.e.:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \left| \int_0^x f(t)dt \right|^2 = 0.$$

De plus,

$$\limsup_{X \to +\infty} \frac{1}{X} \left| \int_0^X f(t)dt \right|^2 \leq \|f\|_2^2 < +\infty$$

Il en résulte: $\forall X > 1$,

$$\int_0^X \frac{1}{x^2} \left| \int_0^x f(t)dt \right|^2 dx = -\frac{1}{X} \left| \int_0^X f(t)dt \right|^2 + \int_0^X \frac{2}{x} f(x) \int_0^x f(t)dtdx$$

$$0 \leq \int_0^X |Hf(x)|^2 dx = -\frac{1}{X} \left| \int_0^X f(t)dt \right|^2 + \int_0^X 2f(x)Hf(x)dx$$
$$\leq 2 \int_0^X f(x)Hf(x)dx \leq 2\|f\|_2 \|Hf\|_2$$

d'où:

$$\|Hf\|_2^2 = \lim_{X \to +\infty} \int_0^X |Hf(x)|^2 dx \leq 2\|f\|_2 \|Hf\|_2$$
$$\Rightarrow \|Hf\|_2 \leq 2\|f\|_2. \tag{6}$$

(b) La linéarité de H étant immédiate, on en déduit que H est un endomorphisme de $L^2(]0, +\infty[)$ dans $L^2(]0, +\infty[)$, continu d'après (6).

4. (a) Soit $f \in L^2(]0, +\infty[)$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on peut défnir la transformée de Fourier de $\chi_{]0,+\infty[}f$:

$$(\widehat{\chi_{]0,+\infty[}}f)(2\pi x) \overset{L^2}{=} \lim_{T \to +\infty} \int_0^T f(u) e^{-2i\pi xu} du$$

et alors

$$2\mathrm{Re}(\widehat{\chi_{]0,+\infty[}}f)(2\pi x) \overset{L^2}{=} \lim_{T \to +\infty} \int_0^T 2f(u)\cos(2\pi xu) du =: \mathcal{G}(x).$$

Par construction de la transformée de Fourier, $\mathcal{G} \in L^2(\mathbb{R})$.

(b) Par construction de $\mathcal{G}$:

$$\|Cf\|_2^2 = \|\mathcal{G}\|_2^2 = 4 \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{Re}(\widehat{\chi_{]0,+\infty[}}f)(2\pi x)|^2 dx \leq 4 \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\chi_{]0,+\infty[}}f(2\pi x)|^2 dx =$$
$$\underset{y=2\pi x}{=} \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\chi_{]0,+\infty[}}f(y)|^2 dy = 4 \int_{\mathbb{R}} |\chi_{]0,+\infty[}f(t)|^2 dt =$$
$$= 4 \int_0^{+\infty} |f(t)|^2 dt = 4\|f\|_2^2.$$

i.e. $\|Cf\|_2 \leq 2\|f\|_2$. On en déduit que C est un endomorphisme continue de $L^2(]0, +\infty[)$ de norme:

$$|||C||| = \sup_{f \in L^2(]0,+\infty[)} \frac{\|Cf\|_2}{\|f\|_2} \leq 2.$$

5. (a) L'application V est linéaire continue de $L^2(]0,+\infty[)$ dans $L^2(]0,+\infty[)$ comme composée de telles applications.

(b) Soit $f \in L^2(]0,+\infty[)$ et soit $x > 0$. Par définition de V:

$$Vf(x) = (H-I)Cf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (CJf(u) - CJf(x))\,du =$$

avec: $\forall x > 0$:

$$CJf(x) = 2\int_0^{+\infty} Jf(u)\cos(2\pi xu)du = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right)\cos(2\pi xu)du$$

$$\underset{v=1/u}{=} 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{v} f(v)\cos\left(\frac{2\pi x}{v}\right)dv$$

donc: $\forall u, x > 0$,

$$CJf(u) - CJf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2}{v} f(v)\left(\cos\left(\frac{2\pi u}{v}\right) - \cos\left(\frac{2\pi x}{v}\right)\right)dv$$

On en déduit: $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned}
Vf(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{xv} f(v)\int_0^x \left(\cos\left(\frac{2\pi u}{v}\right) - \cos\left(\frac{2\pi x}{v}\right)\right)dudv \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2}{xv} f(v)\left(\frac{v}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi x}{v}\right) - x\cos\left(\frac{2\pi x}{v}\right)\right)dv \\
&= 2\int_0^{+\infty} f(v)\left(\frac{1}{2\pi x}\sin\left(\frac{2\pi x}{v}\right) - \frac{1}{v}\cos\left(\frac{2\pi x}{v}\right)\right)dv.
\end{aligned}$$

Dautre part, on pose:

$$\forall t > 0, \quad \varphi(t) = \frac{\sin(t)}{t}.$$

et alors: $\forall t > 0$,

$$\psi(t) := \frac{\sin(2t)}{t} = 2\varphi(2t).$$

On en déduit

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi x/v}\right) = \frac{d}{dv}\psi\left(\frac{2\pi x}{v}\right) = 2\frac{d}{dv}\varphi\left(\frac{2\pi x}{v}\right) = -\frac{4\pi x}{v^2}\varphi'\left(\frac{2\pi x}{v}\right)$$

avec: $\forall t > 0$,

$$\varphi'(t) = \frac{\cos t}{t} - \frac{\sin t}{t^2}$$

donc: $\forall v > 0$,

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi x/v}\right) = -\frac{2}{v}\cos\left(\frac{2\pi x}{v}\right) + \frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{2\pi x}{v}\right).$$

En comparant avec l'expression de $Vf(x)$, on obtient:

$$Vf(x) = \int_0^{+\infty} f(v)\frac{d}{dv}\left(\frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi x/v}\right)dv.$$

(c) Soit $\theta > 0$. On a

$$VD_\theta = (H-I)CJD_\theta \underset{2.(b)}{=} (H-I)CD_{1/\theta}J$$

Soit $f \in L^2(]0,+\infty[)$. On a, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$CD_\theta f(x) = 2\int_0^{+\infty} D_\theta f(u)\cos(2\pi xu)du = 2\int_0^{+\infty} \sqrt{\theta} f(\theta u)\cos(2\pi xu)du$$

$$\underset{y=\theta u}{=} \frac{2}{\sqrt{\theta}}\int_0^{+\infty} f(y)\cos\left(2\pi\frac{x}{\theta}y\right)dy = D_{1/\theta}Cf(x)$$

donc $CD_\theta = D_{1/\theta}C$.
Il en résulte:

$$VD_\theta = (H-I)CD_{1/\theta}J = (H-I)D_\theta CJ$$

avec, pour presque tout $x > 0$: $\forall f \in L^2(]0,+\infty[)$,

$$HD_\theta f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x D_\theta f(t)dt = \frac{\sqrt{\theta}}{x}\int_0^x f(\theta t)dt$$

$$\underset{y=\theta t}{=} \frac{1}{x}\int_0^{\theta x} f(\theta t)\frac{dy}{\sqrt{\theta}} = \frac{\sqrt{\theta}}{\theta x}\int_0^{\theta x} f(\theta t)dy = D_\theta Hf(x)$$

i.e. $HD_\theta = D_\theta H$. Donc

$$VD_\theta = (H-I)D_\theta CJ = D_\theta(H-I)CJ = D_\theta V.$$

(d) i. Soit $n \geq 1$ et soit $x \in]0,+\infty[\setminus \left\{\frac{1}{n}, n\right\}$. On a

$$\cup_{j=1}^{n-1} \left]\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}\right] = \left]\frac{1}{n}, 1\right]$$

avec: $\forall j \in [[1, n-1]]$, $\forall x \in \left]\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}\right]$,

$$j \leq \frac{1}{x} < j+1 \iff \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = j \Rightarrow \rho(x) = \frac{1}{x} - j.$$

On en déduit:

$$\rho(x) 1_{]1/n,1]}(x) = \frac{1}{x} 1_{]1/n,1]}(x) - \sum_{j=1}^{n-1} j 1_{]1/(j+1),1/j]}(x)$$

Si $x \in]1+\infty[$, alors, d'après IV.1.(a) on a

$$\rho(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \sum_{j=1}^{n-1} j 1_{]1/(j+1),1/j]}(x)$$

et en particulier:

$$\rho(x) 1_{]1,n[}(x) = \frac{1}{x} 1_{]1,n[}(x) - \sum_{j=1}^{n-1} j 1_{]1/(j+1),1/j]}(x).$$

Dans tous les cas:

$$\rho(x) 1_{]1/n,n]}(x) = \frac{1}{x} 1_{]1/n,n]}(x) - \sum_{j=1}^{n-1} j 1_{]1/(j+1),1/j]}(x).$$

Par définition de J:

$$(J 1_{]1/n,n]})(x) = \frac{1}{x} 1_{]1/n,n]} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} 1_{[1/n,n[}(x)$$

i.e. $(J 1_{]1/n,n]})(x) = \rho(x) 1_{]1/n,n]}(x)$ si $x \notin \left\{\frac{1}{n}, n\right\}$.
Finalement: $\forall x \in]0,+\infty[\setminus \left\{\frac{1}{n}, n\right\}$.

$$\rho(x) 1_{]1/n,n]}(x) = (J 1_{]1/n,n]})(x) - \sum_{j=1}^{n-1} j 1_{]1/(j+1),1/j]}(x).$$

ii. D'après i., $\rho 1_{]1/n,n]})$ est somme de fonctions à support compact, continues sur leur support.

Soit $x \in]0,+\infty[\setminus\left\{\frac{1}{n},n\right\}$.

D'après (b), par linéarté de V on a :

$$V(\rho 1_{]1/n,n]})(x) = V(J1_{]1/n,n]})(x) - \sum_{j=1}^{n-1} jV(1_{]1/(j+1),1/j]})(x)$$

$$V(\rho 1_{]1/n,n]})(x) \underset{(b)}{=} \int_{1/n}^{n} \frac{1}{v}\frac{d}{dv}\left(\frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi x/v}\right)dv +$$

$$-\sum_{j=1}^{n-1} j\int_{1/(j+1)}^{1/j}\frac{d}{dv}\left(\frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi x/v}\right)dv$$

On pose:

$$\forall v>0,\quad \varphi(v) = \frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi x/v}.$$

Alors: $\varphi \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[) \Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^{n-1} j\int_{1/(j+1)}^{1/j}\frac{d}{dv}\left(\frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi x/v}\right)dv = \sum_{j=1}^{n-1} j\int_{1/(j+1)}^{1/j}\varphi'(v)dv =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} j\left(\varphi\left(\frac{1}{j}\right) - \varphi\left(\frac{1}{j+1}\right)\right) = \sum_{j=1}^{n-1} j\varphi\left(\frac{1}{j}\right) - \sum_{j=2}^{n}(j-1)\varphi\left(\frac{1}{j}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\varphi\left(\frac{1}{j}\right) - n\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\sin(2\pi jx)}{\pi jx} - \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi x}$$

Dans le terme

$$\int_{1/n}^{n}\frac{1}{v}\frac{d}{dv}\left(\frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi x/v}\right)dv$$

on intègre par parties pour obtenir:

$$\int_{1/n}^{n}\frac{1}{v}\frac{d}{dv}\left(\frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi x/v}\right)dv = \frac{1}{n}\varphi(n) - n\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{1/n}^{n}\frac{\varphi(v)}{v^2}dv$$

$$= \frac{\sin(2\pi x/n)}{\pi x} - \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi x} + \int_{1/n}^{n} \frac{\varphi(v)}{v^2} dv.$$

Il en résulte:

$$V(\rho 1_{]1/n,n]})(x) = \frac{\sin(2\pi x/n)}{\pi x} - \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi x} + \int_{1/n}^{n} \frac{\varphi(v)}{v^2} dv +$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin(2\pi jx)}{\pi jx} + \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi x} =$$

$$= \frac{\sin(2\pi x/n)}{\pi x} + \int_{1/n}^{n} \frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi xv} dv - \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin(2\pi jx)}{\pi jx}$$

avec

$$\int_{1/n}^{n} \frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi xv} dv \underset{y=1/v}{=} \int_{1/n}^{n} \frac{\sin(2\pi xy)}{\pi xy} dy \underset{u=2\pi xy}{=} \frac{1}{\pi x} \int_{1/n}^{n} \frac{\sin(u)}{u} du$$

donc:

$$V(\rho 1_{]1/n,n]})(x) = \frac{\sin(2\pi x/n)}{\pi x} + \frac{1}{\pi x} \int_{2\pi x/n}^{2\pi nx} \frac{\sin(u)}{u} du - \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin(2\pi jx)}{\pi jx}$$

$$= \frac{1}{\pi x} \left(\sin\left(\frac{2\pi x}{n}\right) + \int_{2\pi x/n}^{2\pi nx} \frac{\sin(u)}{u} du - \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin(2\pi jx)}{j} \right)$$

iii. Soit $x \in]0, +\infty[\setminus \mathbb{N}^*$. De i., on déduit, compte tenu de I.3 et I.4., que

$$\lim_{n \to +\infty} V(\rho 1_{]1/n,n]})(x) = \frac{1}{\pi x} \left(\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi jx)}{j} \right)$$

$$= \frac{\{x\}}{x} = \frac{1}{x} \rho\left(\frac{1}{x}\right) = (J\rho)(x).$$

la série étant convergente dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, donc dans $]0, +\infty[\setminus \mathbb{N}^*$ en particulier.

iv. D'après (a), $|||V||| < +\infty$ et on a donc

$$\|V(\rho 1_{]1/n,n]}) - V\rho\|_2 \le |||V|||\, \|\rho 1_{]1/n,n]}) - \rho\|_2 \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

i.e. $V(\rho 1_{]1/n,n]}) \to V\rho$ dans $L^2(]0,+\infty[)$.
Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c(]0,+\infty[)$. On en déduit:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} V(\rho 1_{]1/n,n]})\varphi dx = \int_0^{+\infty} V\rho\varphi dx.$$

Par définition de $\mathcal{C}_c(]0,+\infty[)$, il existe $0 < a < b$ t.q. $\varphi|_{]0,+\infty[\setminus[a,b]} = 0$. Soit $n_0 > 0$, $p > 0$ t.q. $[a,b] \cap \mathbb{N}^* = [[n_0, n_0+p]]$. D'après iii.,

$$\int_0^{+\infty} V(\rho 1_{]1/n,n]})\varphi dx = \int_a^b V(\rho 1_{]1/n,n]}\varphi dx = \int_a^{n_0} V(\rho 1_{]1/n,n]})\varphi dx +$$

$$+ \sum_{k=n_0}^{n_0+p-1} \int_k^{k+1} V(\rho 1_{]1/n,n]})\varphi dx + \int_{n_0+p}^b V(\rho 1_{]1/n,n]})\varphi dx$$

$$\underset{n\to+\infty}{\to} \sum_{k=0}^{p} \int_a^{n_0} J\rho\varphi dx + \sum_{k=n_0}^{n_0+p-1} \int_k^{k+1} J\rho\varphi dx + \int_{n_0+p}^b J\rho\varphi dx$$

$$= \int_a^b J\rho\varphi dx = \int_0^{+\infty} J\rho\varphi dx.$$

En comparant avec ce qui précède, on obtient:

$$\int_0^{+\infty} V\rho\varphi dx = \int_0^{+\infty} J\rho\varphi dx.$$

Par densité de $\mathcal{C}_c(]0,+\infty[)$ dans $L^2(]0,+\infty[)$, on en déduit que $V\rho = J\rho$ p.p. dans $]0,+\infty[$.

VII Convergence d'une suite de $\cup_N \mathcal{B}_N$ vers $1_{]0,1]}$

1. Soit $n \ge 1$, $n = n^{\alpha_1} \cdots n_k^{\alpha_k}$ la décompositin en facteurs premiers de n, $\alpha_i \ge 1$. Si $\sum_{i=1}^k \alpha_i = k$, alors $\mu(n) = (-1)^k$. Sinon, $\mu(n) = 0$.

   Si $n = 1$, alors $\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) = 1$.

On suppose $n > 1$. Par définition de μ, on peut restreindre la somme $\sum_{d|n} \mu(d)$ aux termes dont la contribution est non nulle, i.e.:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \sum_{m=1}^{k} \sum_{d=n_{i_1}\cdots n_{i_m}} \mu(d) = 1 + \sum_{m=1}^{k} C_k^m (-1)^m$$

$$= \sum_{m=0}^{k} C_k^m (-1)^m = (1-1)^k = 0.$$

2. Soit $y \geq 1$. On a:

$$\sum_{n\geq 1} \mu(n) \left\lfloor \frac{y}{n} \right\rfloor = \sum_{1\leq n\leq y} \mu(n) \left\lfloor \frac{y}{n} \right\rfloor = \sum_{1\leq n\leq y} \mu(n) \sum_{k\leq y/n} 1 =$$

$$= \sum_{1\leq n\leq y} \sum_{m=nk\leq y} \mu(n) = \sum_{m\leq y} \sum_{n|m} \mu(n) = 1 + \sum_{1<m\leq y} \sum_{n|m} \mu(n) = 1$$

Si $y \in [0,1[$, alors

$$\left\lfloor \frac{y}{n} \right\rfloor = 0, \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \mu(n) \left\lfloor \frac{y}{n} \right\rfloor = 0$$

3. (a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a

$$S_N = -\sum_{n=1}^{N} \mu(n) T_n \rho \in \mathcal{B}_N$$

par définition de $\mathcal{B}_N$.

(b) Soit $x > 0$. Si $x > 1$, alors

$$\forall n \geq 1, \quad nx \geq x > 1 \Rightarrow \rho(nx) = \frac{1}{nx}$$

donc

$$S_N(x) = -\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu(n)}{n} \underset{N\to+\infty}{\to} -\frac{1}{x} \sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

Si $x \in]0,1]$, alors

$$S_N(x) = -\sum_{n=1}^{N} \mu(n)\left(\frac{1}{nx} - \left\lfloor \frac{1}{nx} \right\rfloor\right) = -\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{n} + \sum_{n=1}^{N}\mu(n)\left\lfloor \frac{1}{nx}\right\rfloor$$

donc $\frac{1}{x} \geq 1 \underset{2.}{\Rightarrow}$

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(x) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\mu(n)\left\lfloor \frac{1}{nx}\right\rfloor = \sum_{n\geq 1}\mu(n)\left\lfloor \frac{1}{nx}\right\rfloor \underset{2.}{=} 1$$

4. (a) Soit $x > 0$. On a

$$VS_N(x) = \sum_{n=1}^{N}\mu(n)VT_n\rho(x)$$

avec: $\forall n \geq 1$,

$$VT_n = \frac{1}{\sqrt{n}}VD_n \underset{VI.5.(c)}{=} \frac{1}{\sqrt{n}}D_nV$$

donc

$$VT_n\rho = \frac{1}{\sqrt{n}}D_nV\rho \underset{VI.5.(d)iv.}{=} \frac{1}{\sqrt{n}}D_nJ\rho.$$

Il en résulte:

$$VS_N(x) = \sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{\sqrt{n}}\sqrt{n}(J\rho)(nx) = \sum_{n=1}^{N}\mu(n)(J\rho)(nx) = \sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{nx}\rho\left(\frac{1}{nx}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{nx}(nx - \lfloor nx\rfloor) = \sum_{n=1}^{N}\mu(n) - \sum_{n=1}^{N}\mu(n)\frac{\lfloor nx\rfloor}{nx}.$$

On en déduit:

$$\int_0^{1/N}|VS_N(x)|^2dx \underset{x=y/N}{=} \int_0^1\left|VS_N\left(\frac{y}{N}\right)\right|^2\frac{dy}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\int_0^1\left|\sum_{n=1}^{N}\mu(n) - \frac{N}{y}\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{n}\left\lfloor\frac{ny}{N}\right\rfloor\right|^2 dy$$

avec: $\forall y \in [0,1[$,

$$\forall n \in [[1,N]], \quad 0 \le \frac{ny}{N} < \frac{n}{N} \le 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{ny}{N} \right\rfloor = 0$$

donc

$$\int_0^{1/N} |VS_N(x)|^2 dx = \frac{1}{N}\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^N \mu(n)\right|^2 dy = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^N \mu(n)\right|^2$$

(b) On suppose qu'il existe $S \in L^2(]0,+\infty[)$ t.q. $S_N \underset{N\to+\infty}{\to} S$. da,s $L^2(]0,+\infty[)$. Alors: $\forall N \ge 1$,

$$\|1_{[0,1/N]}VS_N\|_2 \le \|1_{[0,1/N]}V(S_N-S)\|_2 + \|1_{[0,1/N]}VS\|_2$$

avec

$$\|1_{[0,1/N]}VS\|_2^2 = \int_0^{1/N} |VS(x)|^2 dx \underset{N\to+\infty}{\to} 0.$$

De plus:

$$\|1_{[0,1/N]}V(S_N-S)\|_2^2 = \int_0^{1/N} |VS_N(x)-VS(x)|^2 dx \le \|VS_N-VS|_2^2 \underset{VI.5.(a)}{\le} C\|S_N-S\|_2^2 \ {}_{N-}$$

Finalement

$$\lim_{N\to+\infty} \|1_{[0,1/N]}VS_N\|_2^2 = \lim_{N\to+\infty}\int_0^{1/N} |VS_N(x)|_2^2 = 0.$$

en contradiction avec:

$$\frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^N \mu(n)\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^N \mu(n)\right|^2 \underset{N\to+\infty}{\not\to} 0$$