UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Préparation à l'agrégation externe

Feuille d'exercices sur les corps finis

Soit k un corps fini, de caractéristique p et de cardinal $q = p^n$. Notons $\varphi\colon x \mapsto x^p$ l'automorphisme de Frobenius du corps k. Alors l'application φ est une permutation des éléments de k. Le but de cette feuille est de calculer la signature $\varepsilon(\varphi)$ de cette permutation, en fonction des nombres p et n.

Quelques cas particuliers

Exercice 1

1. Déterminer $\varepsilon(\varphi)$ dans le cas $n = 1$.
2. Déterminer $\varepsilon(\varphi)$ dans le cas $q = 4$.
3. Si $n = 2$, montrer que la permutation φ est produit de $\frac{p^2-p}{2}$ transpositions, et en déduire $\varepsilon(\varphi)$.
4. Si n est impair, montrer que $\varepsilon(\varphi) = 1$. (Indication : considérer l'ordre de φ.)

Exercice 2

Soit ℓ un nombre premier impair, et soit $a \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$.

1. Montrer que si a est un générateur du groupe $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$, alors la permutation de $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ donnée par la multiplication par a est un $(\ell - 1)$-cycle. En déduire la signature de cette permutation.
2. Dans le cas général, montrer que la signature de la multiplication par a est le symbole de Legendre $\left(\frac{a}{\ell}\right)$.
3. En déduire la signature $\varepsilon(\varphi)$ dans le cas où $q - 1$ est un nombre premier de Mersenne.

L'abélianisé du groupe linéaire

Dans cette partie, K est un corps, non nécessairement fini. Si G est un groupe, on note $D(G)$ le sous-groupe engendré par les commutateurs, appelé sous-groupe dérivé.

Exercice 3

1. Montrer que $D(\mathrm{GL}_n(K)) \subseteq \mathrm{SL}_n(K)$, en mettant en valeur le rôle de la commutativité du groupe $K^\times$.
2. Montrer que si $n < 2$, alors $D(\mathrm{GL}_n(K)) = \mathrm{SL}_n(K)$.
3. Montrer que le groupe $\mathrm{SL}_n(K)$ est engendré par les transvections. (Indication : on peut penser au pivot de Gauß.)
4. Montrer que les transvections de K^n sont semblables entre elles. (Indication : utiliser le théorème de la base incomplète pour montrer qu'elles ont la même matrice (réduction de Jordan) dans des bases bien choisies.)
5. En déduire que les transvections sont toutes dans la même classe du quotient $\mathrm{GL}_n(K)/D(\mathrm{GL}_n(K))$.
6. En déduire que si, dans $\mathrm{GL}_n(K)$, le produit de deux transvections est une transvection, alors $D(\mathrm{GL}_n(K)) = \mathrm{SL}_n(K)$.
7. Soit λ une forme linéaire non nulle sur K^n. Supposons qu'il existe $u, v, w \in \ker\lambda \setminus \{0\}$ tels que $u + v = w$. Montrer que $D(\mathrm{GL}_n(K)) = \mathrm{SL}_n(K)$.

8. En déduire que si $|K| \geqslant 3$ ou $n \geqslant 3$, alors $D(\mathrm{GL}_n(K)) = \mathrm{SL}_n(K)$.
9. Montrer que si $|K| \neq 2$ ou $n \neq 2$, alors le déterminant induit un isomorphisme de groupes de l'abélianisé $\mathrm{GL}_n(K)/D(\mathrm{GL}_n(K))$ sur $K^\times$.

Exercice 4 : Le théorème de Frobenius-Zolotarev

On suppose ici que K est un corps fini tel que $D(\mathrm{GL}_n(K)) = \mathrm{SL}_n(K)$.

1. Tout automorphisme de l'espace vectoriel K^n étant une permutation de K^n, la signature donne un morphisme de groupes de $\mathrm{GL}_n(K)$ dans $\{\pm 1\}$. Montrer que ce morphisme est se factorise par le déterminant $\det\colon \mathrm{GL}_n(K) \to K^\times$.
2. Montrer que le morphisme donné par la signature est surjectif si K n'est pas de caractéristique 2.
3. Combien y a-t-il de sous-groupes d'indice 2 dans un groupe cyclique ?
4. En déduire que si $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, alors

$$\varepsilon(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \det(A) \text{ est un carré dans } K \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Que se passe-t-il si K est de caractéristique 2 ?

La signature du morphisme de Frobenius

Exercice 5

1. Montrer que $X^n - 1$ est le polynôme minimal de l'application $\mathbb{F}_p$-linéaire φ. (On pourra considérer un polynôme annulateur Q de degré strictement inférieur, et majorer le nombre d'éléments de k où $Q(\varphi)$ s'annule.)
2. En déduire le polynôme caractéristique et de déterminant de φ.
3. En utilisant le théorème de Frobenius-Zolotarev, calculer $\varepsilon(\varphi)$ lorsque $q \neq 4$. Comparer aux cas où la signature a déjà été calculée.
4. Montrer que $D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)) \neq \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$.