Université de Rennes 1 **Année 2023–2024**

Agrégation de Mathématiques
Feuille de TD 1

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit A une matrice carrée d'ordre n de coefficients :

$$a_{ij} = \begin{cases} a & \text{si} \quad i = j, \\ b & \text{si} \quad j = i-1, \\ c & \text{si} \quad j = i+1, \end{cases}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. On suppose A inversible. Montrer que A s'écrit de façon unique sous la forme : $A = LU$ où L et U sont bi-diagonales, avec L triangulaire inférieure de diagonale unité et U triangulaire supérieure.
2. En déduire le nombre d'opérations nécessaires pour la résolution de $Ax = b$.

Exercice 2

Soit à résoudre :

$$Ax = b \tag{1}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ et où $b \in \mathbb{R}^m$ sont donnés et supposés connus exactement. On suppose que x est calculé par une méthode d'élimination donnant $x_1 \neq x$ solution exacte de

$$(A + \Delta A)x_1 = b$$

où la matrice ΔA vérifie $\|A^{-1}\|\|\Delta A\| < \frac{1}{2}$ pour une norme matricielle subordonnée donnée. On considère alors le schéma itératif :

$$r_k = b - Ax_k, \quad A\Delta x_k = r_k, \quad x_{k+1} = x_k + \Delta x_k, \quad k \geq 1. \tag{2}$$

1. Montrer que
$$\|x_2 - x\| \leq \frac{\|A^{-1}\|\|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|}\|x_1 - x\|.$$
2. En déduire que l'algorithme (2) converge.

Exercice 3

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ de rang $r = \min(n, m)$ et soit $A = U\Sigma V^T$ la décomposition en valeurs propres singulières de A dans laquelle Σ est diagonale de coefficients diagonaux $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, U et V sont orthogonales d'ordres n et m resp.

Soit $k \leq r$. On note Σ_k la matrice diagonale d'ordre r de coefficients :

$$\sigma_1, \cdots, \sigma_k, 0, \cdots, 0$$

et on pose $A_k = U\Sigma_k V^T$.

1. *Montrer que :*

$$\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1} = \min_{\dim V = n-k} \max_{x \in V} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

   On a :

$$\|A - A_k\|_2 = \|U(\Sigma - \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_k, 0, \cdots, 0))V^T\|_2 =$$

$$= \|U(\mathrm{diag}(0, \cdots, 0, \sigma_{k+1}, \cdots, \sigma_r))V^T\|_2 = \sigma_{k+1}$$

   Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ un sev de dimension $n-k$ et soit P_F la projection orthogonale sur F. Il existe une famille $\sigma_{i_1}, \cdots \sigma_{i_{n-k}}$ t.q.

$$AP_F = U\Sigma_F V^T P_F$$

   où Σ_F est diagonale de coefficients :

$$(\Sigma_F)_{ii} = \begin{cases} \sigma_{i_r} & \text{si} \quad i = i_r, \\ 0 & \text{si} \quad i \notin \{i_1, \cdots, i_{n-k}\} \end{cases}$$

   On en déduit :

$$\|AP_F\|_2 = \sigma_{i_1}$$

   avec σ_{i_1} minimal lorsque $\Sigma_F = \mathrm{diag}(0, \cdots, 0, \sigma_{k+1}, \cdots, \sigma_r)$, i.e. lorsque $\sigma_{i_1} = \sigma_{k+1}$.

2. *Soit $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ de rang k. Montrer que*

$$\sigma_{k+1} \leq \min_{\mathrm{rang}(B)=k} \|A - B\|_2.$$

   Soit $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ de rang k. En particulier $\dim \mathrm{Ker}(B) = n - k \Rightarrow$

$$\sigma_{k+1} \leq \max_{x \in \mathrm{Ker}(B)} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{x \in \mathrm{Ker}(B)} \frac{\|(A-B)x\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A - B\|_2.$$

3. *En déduire que*

$$\sigma_{k+1} = \min_{\mathrm{rang}(B)=k} \|A - B\|_2$$

   On remarque que

$$\min_{\mathrm{rang}(B)=k} \|A - B\|_2$$

   est atteint pour $B = A_k$.

Exercice 4

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et soit $b \in \mathbb{R}^m$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ solution de $Ax = b$ au sens des moindres carrés.

1. *Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ symétrique orthogonale et $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangulaire supérieure d'ordre n t.q. :*

$$QA = \begin{pmatrix} T \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } 0 \in \mathbb{R}^{m-n\times n} \text{ désigne la matrice nulle.}$$

   La résolution de $Ax = b$ au sens des moindres carrés correspond au cas $m > n$. On suppose que n coïncide avec le rang de A. On note A_j le $j$ème vecteur colonne de A. Soit $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ la base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ déduite de $(A_1, \cdots, A_n)$ par le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt, et soit Q la matrice orthogonale de vecteurs colonnes $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$. Par construction,

$$\mathrm{Vect}\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k\} = \mathrm{Vect}\{A_1, cdots, A_k\}, \quad k = 1, \cdots n$$

   ce qui entraîne que la matrice $Q^T A$ est triangulaire supérieure, soit $Q^T A = R$.

2. *En déduire un schéma de calcul de x.*

   On commence par remarquer que x est solution du problème de minimisation :

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} \underbrace{\|Ax - b\|_2^2}_{=:f(x)}$$

   où $f : \mathbb{R}n \to \mathbb{R}$ est différentiable de différentielle $f'_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.q. :

$$\|Ax - b\|_2^2 = \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \|Ay - b\|_2^2 \Rightarrow f'_x = 0$$

   On a : $\forall h \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x+h) = f(x)+2(Ax-b)\cdot Ah+\|Ah\|_2^2 = f(x)+\underbrace{2A^T(Ax-b)\cdot h}_{=:f'_x(h)}+\|Ah\|_2^2$$

   d'où on déduit :

$$f'_x = 0 \iff A^T(Ax - b) = 0 \iff A^T Ax = A^T b$$

   avec $A^T A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de même rang que A, i.e. ici inversible.
   De la décompistion $A = QR$ on déduit :

$$\underbrace{R^T R}_{=T^T T} x = R^T Q^T b.$$

Exercice 5

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner un algorithme permettant de décomposer A sous la forme : $A = QR$ avec $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure.
2. On pose :
$$A_1 = A, \quad Q_1 = Q, \quad R_1 = R$$
$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_{k+1} R_{k+1}, \quad k \geq 1.$$
Montrer que A_{k+1} est semblable à A_k et donc à A, $k \geq 1$.
3. On pose : $P_k = Q_1 Q_2 \cdots Q_k, \quad S_k = R_k R_{k-1} \cdots R_1, \quad k \geq 1$. Montrer que $A^k = P_k S_k$, $k \geq 1$.
4. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et on suppose que
$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|.$$
   (a) Soit D la matrice diagonale de coefficients $D_{ii} = \lambda_i$, $i = 1, \cdots, n$. Montrer que si L est triangulaire inférieure de diagonale unité alors
$$\lim_{k \to +\infty} D^k L D^{-k} = I_n.$$
   (b) Montrer que si Q, Q', resp. R, R', sont des matrices orthogonales, resp. triangulaires supérieures, liées par la relation $QR = Q'R'$, alors il existe une matrice E diagonale de coefficients diagonaux $E_{ij} \in \{-1, 1\}$, t.q. $Q'^{-1}Q = R'R^{-1} = E$.

   (c) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q et des matrices triangulaires supérieures R, S t.q.
$$A^k = Q B_k R D^k S \quad \text{avec} \quad \lim_{k \to +\infty} B_k = I_n.$$
   (d) *Montrer que la suite $(A_k)_{k \geq 1}$ converge vers une limite à préciser.*
   Par hypothèse sur A, il existe X inversible qui diagonalise A et alors :
$$A^k = X D^k X^{-1} = Q_X R_X D^k \underbrace{L_{X^{-1}} R_{X^{-1}}}_{=X^{-1}} =$$
$$= Q_X \underbrace{R_X D^k L_{X^{-1}} D^{-k} R_X^{-1}}_{=:B_k \underset{\substack{k \to +\infty \\ (a)}}{\to} I} R_X D^k R_{X^{-1}}$$
   où $L_{X^{-1}}$ est triangulaire inférieure de diagonale unité. Soit $B_k = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k$. Alors :
$$\lim_{k \to +\infty} \tilde{Q}_k \tilde{R}_k = I$$
   avec $\|\tilde{Q}_k\|_2 = 1$ donc il existe $\tilde{Q}$ orthogonale t.q. $\lim_{k \to +\infty} \tilde{Q}_k = \tilde{Q}$ puis $\tilde{R}$ t.q. $\lim_{k \to +\infty} \tilde{R}_k = \tilde{R}$ avec $\tilde{Q}\tilde{R} = I \Rightarrow \tilde{Q} = \tilde{R} = I$, donc :
$$A^k = Q_X \tilde{Q}_k \tilde{R}_k R_X D^k R_{X^{-1}} = P_k S_k$$

$$\underset{(b)}{\Rightarrow} Q_X\tilde{Q}_k = P_k E_k, \quad \tilde{R}_k R_X D^k R_{X^{-1}} = E_k S_k$$

avec E_k diagonale d'éléments diagonaux ± 1. Il en résulte :

$$A_k = R_k Q_k = S_k S_{k-1}^{-1} P_{k-1}^{-1} P_k = E_k \tilde{R}_k R_X D R_X^{-1} (\tilde{Q}_{k-1}\tilde{R}_{k-1})^{-1} \tilde{Q}_k E_k$$

$$\underset{k \to +\infty}{\sim} E_k R_X D R_X^{-1} E_k$$

5. En déduire un algorithme de calcul des valeurs propres de A.
6. Montrer que si A est symétrique il en est de même des matrices A_k, $k \geq 1$. En déduire une amélioration de l'algorithme