Université de Rennes 1 **Année 2023–2024**

Agrégation de Mathématiques
Feuille de TD 2

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ t.q.

$$Ax \cdot x \geq \alpha \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha > 0.$$

Soit $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche $x \in \mathbb{R}^n$ solution de

$$Ax = b.$$

1. On considère la suite $(x^{(k)})_{k \geq 0}$ définie par :

$$x^{(0)} \quad \text{donné dans } \mathbb{R}^n$$
$$Ax^{(k)} + \beta x^{(k)} = b + \beta x^{(k-1)} \quad k \geq 1, \quad \beta > 0. \tag{1}$$

   Montrer que la suite $(x^{(k)})_{k \geq 0}$ converge vers x.

2. Montrer que la suite $(y^{(n)})_{n \geq 0}$ définie par :

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} - \rho(By^{(n)} - c), \quad n \geq 0 \tag{2}$$

   converge vers vers $x^{(k)}$ solution de (1), $k \geq 0$, pour $\rho \in \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c, $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ convenablement choisis.

3. Pour tout $k \geq 0$, on note $(y_k^{(n)})_{n \geq 0}$ la suite définie par (2) qui converge vers $x^{(k)}$ et on arrête les itérations (2) pour $n = p$, p fixé. En déduire une majoration de $\|y_k^{(p)} - x\|$ en fonction de α, β, ρ, k et p. Quel est le meilleur choix du paramètre β ?

4. Comment choisir $\rho = \rho_n$ en fonction des itérations ?