TP7– Différences finies pour les problèmes elliptiques en dimension 1

Le problème

Considérons le problème : étant données deux fonctions c et f continues sur l'intervalle $[0,1]$, trouver une fonction u deux fois continûment différentiable telle que

$$(\mathrm{P}_1) \qquad \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) & si \;\; 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

But du travail

Mettre en place une méthode numérique pour résoudre le problème (P_1), basée sur les différences finies. Faire une étude de convergence en fonction du pas de la discrétisation.

Mise en œuvre

- ◇ Écrire et programmer le schéma obtenu en prenant une différence centrée pour approcher la dérivée seconde, le tester sur un cas particulier.
- ◇ Faire une étude de convergence de la méthode pour un cas bien choisi.
- ◇ Reprendre le problème (P_1) en remplaçant la condition aux limites $u(1) = 0$ par $u'(1) = 0$ et faire une étude analogue.

Prolongements

Quelques pistes pour aller plus loin.

- ◇ Modifier l'équation différentielle dans (P_1) en prenant $-Au'' + Bu' = f(x)$, où A, B sont des nombres réels. Pour l'approximation prendre des différences centrées. Discuter de la stabilité du schéma en comparant le pas de discrétisation et le rapport A/B.
- ◇ Considérer le problème modèle

$$(\mathrm{P}_2) \quad \begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) + c(x,y)u(x,y) = f(x,y) & \text{pour } (x,y) \in (0,1) \times (0,1), \\ u(x,y) = 0 \quad \text{Pour } (x,y) \text{ sur le bord du domaine.} \end{cases}$$

Écrire un schéma de discrétisation basé sur les différences centrées. Proposer une méthode de résolution du problème à partir de la méthode de Gauss-Seidel, en évitant de construire la matrice du système à résoudre.