

TP9– Séries de Fourier et Equation de la Chaleur

Théorie Soit f une fonction 1-périodique intégrable. On note c_n son coefficient de Fourier d'ordre n :

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi nt} dt. \quad (1)$$

La méthode des rectangles (qui coïncide ici avec celle des trapèzes) fournit l'approximation :

$$\hat{f}_K(n) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} f\left(\frac{k}{K}\right) e^{-2i\pi \frac{kn}{K}}, \quad -\frac{K}{2} < n \leq \frac{K}{2} \quad (2)$$

On rappelle que dans le cas où la fonction est très régulière (comme fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}), l'approximation obtenue est bien meilleure que le résultat de convergence habituel pour la méthode des trapèzes. L'ensemble des valeurs $\hat{f}_K(n)$ pour $-K/2 < n \leq K/2$ est appelé *transformée de Fourier discrète de la fonction f* . Il est possible d'organiser les calculs de manière astucieuse pour gagner du temps, cf. l'algorithme FFT.

On s'intéresse ici à la résolution de l'équation de la chaleur par séries de Fourier :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \partial_x^2 u(t, x) = f(t, x) & \text{dans } (0, +\infty) \times (0, 1), \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{pour } x \in (0, 1), \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & \text{pour } t > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Mise en œuvre

- ◇ Programmer le calcul du coefficient de Fourier d'ordre n d'une fonction f donnée. Tester sur une fonction régulière, puis sur une fonction "créneau" pour observer le phénomène de Gibbs.
- ◇ Résoudre l'équation de la chaleur (3) à l'aide des séries de Fourier.

Prolongements

Quelques pistes pour aller plus loin.

- ◇ Comparer la solution obtenue par la méthode précédente avec une méthode de différences finies.
- ◇ Faire le même travail avec l'équation des ondes.