TP10 – Différences finies pour les problèmes elliptiques et paraboliques en dimension 1

Partie I - Problèmes elliptiques

Le problème

Considérons le problème : étant données deux fonctions c et f continues sur l'intervalle $[0,1]$, trouver une fonction u deux fois continûment différentiable telle que

$$(\mathrm{P}_1) \qquad \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{si } 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

But du travail

Mettre en place une méthode numérique pour résoudre le problème (P_1), basée sur les différences finies. Faire une étude de convergence en fonction du pas de la discrétisation.

Mise en œuvre

- ◇ Écrire et programmer le schéma obtenu en prenant une différence centrée pour approcher la dérivée seconde, le tester sur un cas particulier.
- ◇ Faire une étude de convergence de la méthode pour un cas bien choisi.
- ◇ Reprendre le problème (P_1) en remplaçant la condition aux limites $u(1) = 0$ par $u'(1) = 0$ et faire une étude analogue.

Prolongements

Quelques pistes pour aller plus loin.

- ◇ Modifier l'équation différentielle dans (P_1) en prenant $-Au'' + Bu' = f(x)$, où A, B sont des nombres réels. Pour l'approximation prendre des différences centrées. Discuter de la stabilité du schéma en comparant le pas de discrétisation et le rapport A/B.
- ◇ Considérer le problème modèle

$$(\mathrm{P}_2) \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) + c(x,y)u(x,y) = f(x,y) & \text{pour } (x,y) \in (0,1) \times (0,1), \\ u(x,y) = 0 \text{ pour } (x,y) \text{ sur le bord du domaine.} \end{cases}$$

Écrire un schéma de discrétisation basé sur les différences centrées. Proposer une méthode de résolution du problème à partir de la méthode de Gauss-Seidel, en évitant de construire la matrice du système à résoudre.

Partie II - Problèmes paraboliques

Le problème
Trouver $u(x, t)$ solution du système

$$(P_3) \qquad \begin{cases} \partial_t u(x, t) - \partial_{xx} u(x, t) = 0 \quad \text{pour } 0 < x < \pi, \\ u(x, 0) = \sin(x) \quad \text{pour } 0 < x < \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \qquad t > 0. \end{cases}$$

But du travail
Mettre en place une méthode numérique pour résoudre le problème (P_3), basée sur les différences finies. Faire une étude de convergence en fonction des pas de discrétisation.

Mise en œuvre
- Écrire et programmer le schéma obtenu en prenant une différence finie centrée pour la dérivée en x et une différence progressive pour la dérivée en t.
- Tester le schéma sur le problème (P_3) et faire une étude de stabilité et de convergence de la méthode en fonction des paramètres de discrétisation.
- Refaire le travail ci-dessus en prenant une différence finie rétrograde pour la dérivée en temps.

Prolongements
Quelques pistes pour aller plus loin.
- Modifier les données dans (P_3), en particulier la condition aux limites $u(1, t) = 0$ est remplacée par $\partial_x u(1, t) = \alpha$.
- Pour approcher la dérivée en temps, choisir une combinaison de différence progressive et différence rétrograde. Pour quelle valeur du paramètre a-t-on l'ordre optimal ? C'est le schéma de Crank-Nicholson.
- Tester d'autres schémas que l'on retrouvera par exemple dans le livre de Richtmyer et Morton, *Difference methods for initial value problems, second edition, John Wiley and Sons, New York, pages 189–191*.