

# Equations de Laplace

I - Modélisation

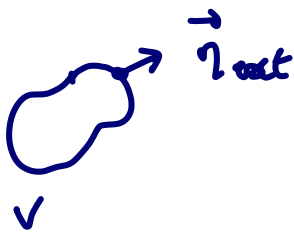
II - Formulation variationnelle, espaces de Sobolev

III - Discrétisation et éléments finis.

I - Modélisation  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ouvert

$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  densité d'une certaine quantité  
à l'équilibre (chaleur, concentration de particules, ...)

Soit  $V \subset \Omega$  ouvert régulier (élément de volume)



taux d'évolution de  $u$ :

$$\frac{d}{dt} \int_V u(x) dx = - \int_{\partial V} \vec{F}(w) \cdot \vec{n}_{ext}(w) d\sigma(w)$$

loi de conservation.

où  $\vec{F}$  est le flux sortant : quantité qui traverse  
une unité de surface par unité de temps.

→ donné par le modèle / loi empirique

1) Diffusion :

$$\vec{F} = -a \nabla u \quad a > 0$$

- loi de Fick (concentration particules)
- loi de Fourier (température)
- loi d'Ohm (conduction électrique)

2) Flux advectif (transport)

$$\vec{F} = \vec{c} u \quad \vec{c} \in \mathbb{R}^n \text{ champ de vitesse}$$

La Formule de Stokes donne :

$$-\int_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n}_{\text{ext}} d\sigma = -\int_V \operatorname{div}(\vec{F}(x)) dx$$

$$\operatorname{div}(a \nabla u) = a \Delta u \quad (\text{si } a \text{ constant})$$

$$\operatorname{div}(\vec{c} u) = \vec{c} \cdot \nabla u \quad (\text{si } \vec{c} \text{ constant})$$

$$\text{d'où } \int_V \left( \frac{d}{dt} u + \operatorname{div}(-a \nabla u + \vec{c} u) \right) dx = 0$$

$$\text{vrai } \forall V, \text{ donc } \frac{d}{dt} u = -\operatorname{div}(-a \nabla u + \vec{c} u)$$

(équation d'advection-diffusion)

À l'équilibre ( $\frac{d}{dt} u = 0$ )  $\leadsto \operatorname{div}(-a \nabla u + \vec{c} u) = 0$

Equation de Laplace:  $-\Delta u = 0$

Equation de Poisson:  $-\Delta u = f$  ← source

Condition au bord:

- Dirichlet homogène:  $u|_{\partial\Omega} = 0$ .

- Neumann:  $\nabla u \cdot \vec{n}_{\text{ext}} = 0$ .

Modèle 1d: sur  $I = ]0, 1[$

$$- \underbrace{(pu')'}_{\text{diffusion}} + \underbrace{qu'}_{\text{advection}} + \underbrace{ru}_{\text{reaction}} = \underbrace{f}_{\text{source}}$$

$f \in L^2$ ,  $p, q, r \in L^\infty$ ,  $p(x) \geq \alpha_0 > 0$

Cas particulier:  $q = r = 0$

$$\begin{cases} -(pu')' = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

On peut, en intégrant 2 fois et en divisant par  $p$ , trouver  $G(x, y)$  positive symétrique et continue sauf éventuellement en  $x=0$  +  $q$

$$u(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy$$

$G$ : fonction de Green.

## II. Formulation variationnelle / faible.

### 1) Généralités

$$(1) \begin{cases} -(pu')' + qu' + ru = f & \text{sur } \mathbb{I} \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

$\times \varphi \in C^\infty(\mathbb{I})$  fonction test régulière +  $\mathbb{I} \mathbb{P} \mathbb{P}$

$\varphi(0) = \varphi(1) = 0$  (Dirichlet homogène)

$$(2) \quad \int_0^1 p u' \varphi' + \int_0^1 q u' \varphi + \int_0^1 r u \varphi = \int_0^1 f \varphi$$

Termes de bord

$$\Rightarrow a(u, \varphi) = l(\varphi) \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{I}), \varphi(0) = \varphi(1) = 0.$$

où  $a$  bilinéaire,  $l$  continue pour la norme  $L^2$

→ utiliser théorèmes type Poincaré / Lax-Milgram  
pour avoir existence / unicité de  $u$ .

• **Solution forte (classique)**:  $u \in C^2(\bar{\Omega})$   
solution de (1).  $(= \{u|_{\Omega} : u \in C_c^2(\mathbb{R}^n)\})$

• **Solution faible**:  $u \in H^1(\Omega)$  solution de (2).

Remarque: On montre que

$u$  solution forte  $\Rightarrow u$  solution faible

Objectif:

- 1) Existence / unicité solution faible
- 2) la solution faible est  $C^2$
- 3) la solution faible est solution forte.

2) Rapels sur  $H^1$  et  $H_0^1$ .

( $\mathbb{I} = ]0, 1[$ )

Definition:  $H^1(\mathbb{I}) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{I}), \exists g \in L^2(\mathbb{I}), \right.$   
 $\left. \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{I}), \int_0^1 u \frac{d\varphi}{dx} = - \int_0^1 g \varphi \right\}$

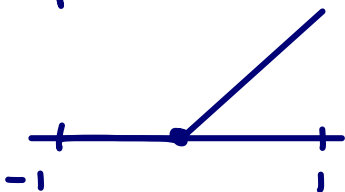
• On note  $u' = g$  la dérivée au sens de  $H^1$  de  $u$   
(dérivée faible)

• Si:  $u \in C^1(\mathbb{I}) \cap L^2(\mathbb{I}), \int u \varphi' = - \int u' \varphi \quad \forall \varphi$

donc  $\int (u' - g) \varphi = 0 \quad \forall \varphi$

donc  $u' = g$  p.p.

Exemple:  $\mathbb{I} = ]-1, 1[$        $u(x) = \frac{1}{2} (|x| + x)$



$$\int_{-1}^1 u \varphi' = \int_0^1 x \varphi'(x) dx = \underbrace{[x \varphi(x)]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \varphi(x) dx$$

donc  $u' = 1_{]0, 1[}$

Toute fonction  $C^1$  par morceaux sur  $\overline{I}$  est  $H^1$ .

théorème : Si  $u \in H^1(I)$ ,  $\exists \tilde{u} \in C(\overline{I})$

$$\text{t.q. } u = \tilde{u} \text{ p.p.}$$

$$\text{et } \tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t) dt$$

Preuve sur deux lemmes :

lemme 1 :  $\int \varphi' f = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I)$

$$\Rightarrow f = \text{constante p.p.}$$

lemme 2 : Si  $f \in L^1_{loc}(I)$  et  $y_0 \in I$

$$u(x) = \int_{y_0}^x f(t) dt \text{ est } C^0 \text{ sur } \overline{I} \text{ et}$$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(I), \int \varphi' u = - \int f \varphi$$

Corollaire du théorème :

$$u' \in C(\overline{I}) \Rightarrow u \in C^1(\overline{I}).$$

En pratique on identifiera  $u$  à  $\tilde{u}$ , son représentant continu.

Topologie: l'espace  $H^1$  est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} := (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$$

$$\|u\|_{H^1} := \left( \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition:

L'espace  $H^1$  muni de  $\|\cdot\|_{H^1}$  est complet: c'est un espace de Hilbert.

Preuve: Soit  $(u_n)$  une suite de Cauchy dans  $H^1$ .

alors  $(u_n)$  et  $(u_n')$  sont Cauchy dans  $L^2$

donc  $\exists u, g \in L^2$  t.q.  $u_n \xrightarrow{L^2} u$ ,  $u_n' \xrightarrow{L^2} g$ .

$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{I})$ ,

$$\int \varphi' u_n = - \int u_n' \varphi$$

$$\text{d'où } \int \varphi' u = - \int g \varphi$$

donc  $u \in H^1$ ,  $u' = g$ , et  $\|u - u_n\|_{H^1} \rightarrow 0$ .  $\square$

Théorème :  $\forall u \in H^1(\mathbb{I})$ ,  $\exists (u_n) \in (C_c^\infty(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$   
 t.q.  $u_n|_{\mathbb{I}} \rightarrow u$  dans  $H^1(\mathbb{I})$

Ide :  $\exists \mathcal{P} : H^1(\mathbb{I}) \rightarrow H^1(\mathbb{R})$  opérateur de  
 prolongement linéaire continu t.q.  $\mathcal{P}u|_{\mathbb{I}} = u$   
 $\forall u \in H^1(\mathbb{I})$ .

$\leadsto$  on se ramène au cas  $\mathbb{I} = \mathbb{R}$

$\leadsto$  convolution, troncature.

Théorème : On a l'injection continue  $H^1 \hookrightarrow L^\infty$  :  

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{I})} \leq C \|u\|_{H^1(\mathbb{I})}$$
 De plus si  $\mathbb{I}$  borné alors cette injection  
 est compacte.

Preuve : par densité et prolongement on peut supposer

$$u \in C_c^1(\mathbb{I}) = \{ \varphi|_{\mathbb{I}} : \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}) \}.$$

$$\text{d'ors } u(x)^2 = 2 \int_{-\infty}^x u(t) u'(t) dt$$

Cauchy - Schwarz :

$$u^2(x) \leq 2 \|u\|_{L^2} \|u'\|_{L^2}$$

$$\leq \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2$$

$$\text{d'où } \|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{H^1}.$$

Injection compacte  $\mathcal{I}$  borné :

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u\|_{H^1} |x - y|^{\frac{1}{2}}$$

+ Arzela - Ascoli.

□

Def:  $H^k(\mathcal{I}) = \{u \in H^{k-1}(\mathcal{I}) : u' \in H^{k-1}(\mathcal{I})\}$   $k \geq 2$

espace de Sobolev pour la norme

$$\|u\|_{H^k} = \left( \|u\|_{L^2}^2 + \|u^{(k)}\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Espace  $H_0^1(\mathcal{I})$

Def:  $H_0^1(\mathcal{I})$  est la fermeture de  $C_c^\infty(\mathcal{I})$  dans  $H^1(\mathcal{I})$

. C'est un espace de Hilbert (rev. fermé de  $H^1(\mathcal{I})$ ).

.  $H_0^1(\mathbb{R}) = H^1(\mathbb{R})$  car  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

Théorème: Soit  $u \in H^1(\mathbb{I})$ . Alors  $u \in H_0^1(\mathbb{I})$   
si  $u = 0$  sur  $\partial\mathbb{I}$ .

Inégalité de Poincaré:

Théorème: Si  $\mathbb{I}$  borné,  $\exists C(\mathbb{I}) > 0 \forall u \in H_0^1(\mathbb{I})$   
$$\|u\|_{L^2(\mathbb{I})} \leq C \|u'\|_{L^2(\mathbb{I})}$$

Preuve:  $\mathbb{I} = ]a, b[$ ,  $u(a) = 0$

$$u(x) = \int_a^x u'(t) dt + \text{Cauchy Schwarz}$$

Fonx sur  $H^1(\mathbb{I})$  (des fonctions constantes sont des c-ct).

---

Exemple 1 (Problème de Sturm-Liouville)

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \mathbb{I} = ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

théorème : \* S:  $f \in L^2(\mathbb{I})$  il existe une unique solution faible dans  $H_0^1(\mathbb{I})$

. Cette solution est dans  $H^2(\mathbb{I})$

\* S:  $f \in C(\mathbb{I})$  il existe une unique solution forte dans  $C^2(\mathbb{I})$ .

Rappel: classique  $\Rightarrow$  faible

. Existence / unicité solution faible:

$u \in H_0^1(\mathbb{I})$  t.q.  $\forall v \in H_0^1(\mathbb{I})$

$$\int_{\mathbb{I}} u' v' + \int_{\mathbb{I}} u v = \int_{\mathbb{I}} f v \quad (*)$$

de théorème de Riesz dans le Hilbert  $H_0^1(\mathbb{I})$

donne l'existence d'un unique  $u \in H_0^1(\mathbb{I})$  solution

de (\*) ( $v \mapsto \int f v \in (H_0^1(\mathbb{I}))'$ ).

Régularité: mg  $u \in H^2(\mathbb{I})$

$$\int u' v' = \int (f - u) v \quad \forall v \in C_c^\infty(\mathbb{I})$$

$f - u \in L^2$  donc  $u' \in H^1$  donc  $u \in H^2$

S:  $f \in C(\bar{\Omega})$  alors  $(u')' \in C^1(\bar{\Omega})$

donc  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ .

Exercice: Sturm-Liouville:  $p \in C^1$

$$\begin{cases} (pu')' + qu = f & p(x) \geq p_0 > 0. \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

(Indication:  $u' = \frac{1}{p} \cdot pu' \Rightarrow u' \in H^1$ ).

---

Théorème de Riesz-Neumann: Soit  $a: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$

bilinéaire continue coercive:

-  $|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|$  (continue)

-  $\alpha \|u\|^2 \leq a(u, u)$  (coercive)

alors  $\forall l \in H'$   $\exists ! u \in H$  t.q  $\forall v \in H$

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle$$

De plus si  $a$  symétrique alors

$$(*) \quad \frac{1}{2} a(u, u) - \langle l, u \rangle = \min_v \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle l, v \rangle \right\}$$

Vérifions (\*): Soit  $u$  l'unique solution et

$$J: H \mapsto \mathbb{R}$$

$$v \mapsto \frac{1}{2} a(v, v) - \langle l, v \rangle$$

Pour  $v \in H$ , on a

$$J(v) - J(u) = \frac{1}{2} (a(v, v) - a(u, u)) - \langle l, v \rangle + \langle l, u \rangle$$

$$= \frac{1}{2} (a(v, v) - a(u, u)) - a(u, v) + a(u, u)$$

$$= \frac{1}{2} \{ a(v, v) + a(u, u) - 2a(u, v) \}$$

$$= \frac{1}{2} a(u-v, u-v) \geq 0, = 0 \text{ si } u=v$$

↖ car  $a$  symétrique.

## Application:

$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Formulation faible:  $\forall \varphi \in C_c^\infty(0,1)$

$$\int_0^1 pu'\varphi' + \int_0^1 ru'\varphi + \int_0^1 qu\varphi = \int_0^1 f\varphi$$

$:= a(u, \varphi) \qquad \qquad \qquad := \langle \ell, \varphi \rangle$

(pas de termes de bord)

•  $\ell \in (H_0^1)'$ :  $|\langle \ell, \varphi \rangle| \leq \|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{H^1}$ .

•  $a$  bilinéaire, continue (si  $p, q, r \in L^\infty$ )

• (pas symétrique)

•  $a$  coercive?

-  $\int p|u'|^2 \geq p_0 \|u'\|_{L^2}^2 \geq C p_0 \|u\|_{H^1}^2 \quad \forall u \in H_0^1$

inégalité de Poincaré

-  $|\int ru'u| \leq \|r\|_\infty \|u'\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq \frac{1}{\alpha} \|r\|_\infty \|u\|_{H^1}^2$

On utilise  $ab \leq \frac{1}{2} (\lambda a^2 + \frac{1}{\lambda} b^2)$  :

$$|\int r u' u| \leq \frac{1}{2} \left( \lambda \|u'\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\lambda} \|r\|_{\infty} \|u\|_{L^2}^2 \right)$$

Donc

$$a(u, u) \geq \left( p_0 - \frac{1}{2} \lambda \right) \|u'\|_{L^2}^2 + \int_0^1 \left( q - \frac{1}{\lambda} \|r\|_{\infty} \right) |u|^2$$

→ Prendre  $\lambda = p_0$

$$a(u, u) \geq \frac{p_0}{2} \|u'\|_{L^2}^2 + \int_0^1 \left( q - \frac{2}{p_0} \|r\|_{\infty} \right) |u|^2$$

ok si  $q(x) - \frac{2}{p_0} \|r\|_{\infty} \geq 0 \quad \forall x.$

---

Exercices Brezis pour autres conditions initiales  
(Dirichlet non homogène, Neumann, Robin, ...)

### III - Discrétisation et éléments finis

#### 1) Principes généraux, théorème de Dax

EDP linéaire:  $Lu = f \rightarrow$  Problème continu  $u \in V$

On le suppose bien posé (au sens de Hadamard)

- existence
- unicité
- continuité par rapport aux données

Discrétiser:  $h > 0$  petit paramètre  
 $V_h$  s.v. de  $V$  de dimension  $N(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$

On cherche  $L_h \in \mathcal{L}(V_h)$ ,  $f_h \in V_h$  approximation de  $f$

+ q  $L_h u_h = f_h$  (pbm discret) admette

une unique solution  $u_h \quad \forall h > 0$  (i.e.  $L_h$  inversible)

$$\|u_h - P_h u\|_{V_h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

où  $P_h: V \rightarrow V_h$  projecteur.

Definition (Consistance)

$$\|L_h P_h u - P_h L u\|_{V_h} \rightarrow 0$$

(l'opérateur discret approche bien l'opérateur continu)

Idée : formules de Taylor.

Définition (stabilité) de schéma et stable

$$\sup_{h>0} \sup_{V_h \rightarrow V_h} \|L_h^{-1}\| < +\infty.$$

Traduit le contrôle des erreurs sur  $f$  :

$$\begin{cases} L_h(u_h + \delta u_h) = P_h f + \delta f \\ L_h u_h = P_h f \end{cases}$$

$$\text{alors } \sup_{V_h} \|\delta u_h\| \leq \sup_{V_h \rightarrow V_h} \|L_h^{-1}\| \sup_{V_h} \|\delta f\|$$

Théorème (dax) Si le schéma est stable

et consistant alors il est convergent, avec un

ordre au moins égal à celui de la consistance.

Preuve :

$$\sup_{V_h} \|u_h - P_h u\| = \sup_{V_h} \|L_h^{-1}(L_h u_h - L_h P_h u)\|$$

borné par rapport à  $h$   $\rightarrow$   $\sup_{V_h \rightarrow V_h} \|L_h^{-1}\| \sup_{V_h} \|L_h u_h - L_h P_h u\|$   
(stabilité)

$$\|L_h u_h - L_h P_h u\| = \|P_h f - L_h P_h u\| = \|P_h L u - L_h P_h u\| \rightarrow 0$$

erreur de consistance  $\rightarrow$   $\square$

## 2) Méthode des éléments finis 1d / Galerkin.

$V$  : espace de Hilbert

$V_h \subset V$  de dimension finie,  $h \rightarrow 0$

$a$  : forme bilinéaire continue, coercive sur  $V$

$l$  : forme linéaire sur  $V$

$$\bullet a_0 \leq a(u, v) \quad \forall v$$

$$\bullet |a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad \forall v.$$

On considère sur  $V_h$  le problème

$$a(u_h, v_h) = (l, v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

(ou plus généralement  $a_h(u_h, v_h) = (l_h, v_h)$ )

Max-Programm:  $\exists! u_h \in V_h$  solution.

• Soit par ailleurs  $u$  l'unique solution du prob continu

Alors

$$a(u, v) = (l, v) \quad \forall v \in V$$

$$a(u, v_h) = (l, v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

$$\text{donc } a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

$\leadsto$  propriété d'orthogonalité

" $u_h$  proj. orth. de  $u$  sur  $V_h$ "

lemme (Cea):

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{a_0} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V$$

Preuve :  $a(u-u_h, u-u_h) = a(u-u_h, u-\vartheta_h + \underbrace{\vartheta_h - u_h}_{\in V_h})$   
 $= a(u-u_h, u-\vartheta_h) + 0$

d'où,  $\forall \vartheta_h \in V_h$

$$a_0 \|u-u_h\|^2 \leq a(u-u_h, u-u_h) \leq M \|u-u_h\| \cdot \|\vartheta - \vartheta_h\|$$

ce qui donne le résultat. □

Remarque :  $\left\{ \begin{array}{l} \text{stabilité} \Leftrightarrow \text{coercivité } a_0 > 0 \\ \text{consistance} \Leftrightarrow \text{approximation de } u \end{array} \right.$

par un élément de  $V_h$

↳ donnent la convergence.

3) Mise en oeuvre  $V_h = \text{Vect}(\varphi_i)$

$$a(u_h, v_h) = \langle \ell, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h$$

$$u_h = \sum u_i \varphi_i$$

$$\text{donc } \sum_i u_i a(\varphi_i, \varphi_j) = \langle \ell, \varphi_j \rangle \quad \forall j$$

$$\Leftrightarrow AU = F$$

$$\text{d'où } \left\{ \begin{array}{l} A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) \\ U_i = u_i = (u, \varphi_i) \text{ si } (\varphi_i) \text{ BON} \\ F_j = \langle \ell, \varphi_j \rangle \end{array} \right.$$

Remarque :  $U^T A U = a(u, u) \geq a_0 \|u\|^2$  donc  $A$  inversible

### 3) Exemple de mise en oeuvre

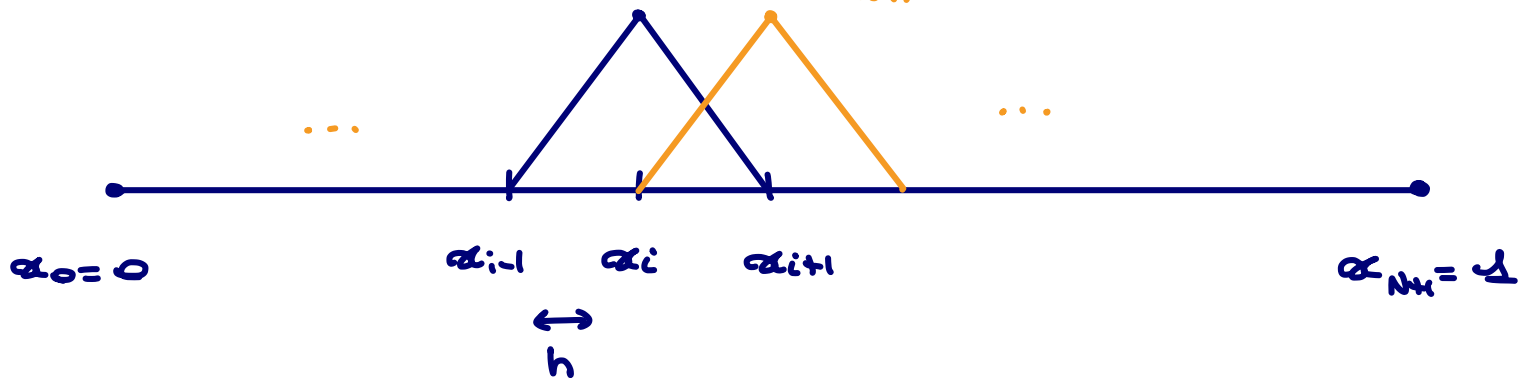
$$V = H_0^1$$

Subdivision de pas  $h = \frac{1}{N+1}$      $\alpha_i = ih$

$$V_h = \left\{ \varphi \in C^0, \varphi(0) = \varphi(1), \varphi|_{[\alpha_i, \alpha_{i+1}]} \text{ affine} \right\}$$

Une base est donnée par  $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$  où

$$\varphi_i \in V_h \text{ tq } \varphi_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$$



Matrice :  $A = (A_{ij})$  où  $A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) \in \mathbb{M}_N(\mathbb{R})$

Exemple :  $p = 1$      $q = r = 0$

$$A_{ij} = \int_0^1 \varphi_i' \varphi_j' = \begin{cases} 0 & \text{si } |i-j| > 1 \\ -\frac{1}{h} & \text{si } |i-j| = 1 \\ \frac{2}{h} & \text{si } i=j \end{cases}$$

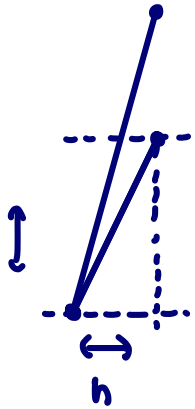
$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

S: on suppose  $f \in V_h$  (affine par morceaux)

alors 
$$\int_0^1 f \varphi_i = \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f \varphi_i + \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f \varphi_i$$

$$= \frac{1}{2} h f(\alpha_i) + \frac{1}{2} h f(\alpha_i)$$

$$= h f(\alpha_i)$$



Preuve convergence à partir de lemme de Coa.

Soit  $u \in H_0^1(\ ]0,1[ ) \cap C^4$

On pose 
$$I_h(u) = \sum_{i=1}^N u(\alpha_i) \varphi_i \in V_h$$

$$\|u - I_h(u)\|_{L^2}^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (u - I_h(u))^2 dx$$

Sur  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ :

$$I_h(u)(\alpha) = -u(\alpha_i) \frac{\alpha - \alpha_{i+1}}{h} + u(\alpha_{i+1}) \frac{\alpha - \alpha_i}{h}.$$

Taylor:  $\exists \theta_i, \tilde{\theta}_i$  tq

$$\begin{cases} u(\alpha_i) = u(\alpha) + u'(\alpha)(\alpha_i - \alpha) + \frac{u''(\theta_i)}{2} (\alpha_i - \alpha)^2 \\ u(\alpha_{i+1}) = u(\alpha) + u'(\alpha)(\alpha_{i+1} - \alpha) + \frac{u''(\tilde{\theta}_i)}{2} (\alpha_{i+1} - \alpha)^2 \end{cases}$$

→ remplacer par les formules de Taylor  
puis déduire que

$$\|u - \mathcal{I}_h(u)\|_{L^2}^2 \leq \|u''\|_{\infty}^2 h^4$$

Faire de même pour  $\|(u - \mathcal{I}_h(u))'\|_{L^2}$ .

↪ donne une convergence d'ordre 2.