

---

## Compléments sur les équations non linéaires

Miguel Rodrigues

---

Ces notes de cours sont consacrées aux problèmes d'équations non linéaires. L'essentiel de la théorie est essentiellement locale et s'énonce naturellement dans les espaces de Banach. Les étudiants moins à l'aise avec la dimension infinie pourront se restreindre à  $\mathbf{R}^d$ ,  $d \in \mathbf{N}$ , mais ils n'y trouveront pas de simplification essentielle.

Une partie relève classiquement du calcul différentiel [BG14, Rou15], le reste se trouve dans les livres généraux d'analyse numérique [Fil13, Sch04].

## 1 Théorème de point fixe de Banach

### 1.1 Le théorème

**Théorème 1** **Théorème du point fixe de Banach** ou **Théorème du point fixe de Picard** ou **Théorème de l'application contractante.**

Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet non vide,  $K \in [0, 1[$  et  $\Phi : X \rightarrow X$   $K$ -Lipschitzienne.

1.  $\Phi$  possède un unique point fixe.
2. Pour tout  $x_0 \in X$ , la suite  $(x^{(k)})_{k \in \mathbf{N}}$  définie par  $x^{(0)} = x_0$  et  $(\forall k \in \mathbf{N}, x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}))$  converge vers l'unique point fixe de  $\Phi$  et, de plus, en notant  $x_*$  ce point fixe, on a

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbf{N}^*, & \quad d(x^{(k)}, x_*) \leq \frac{K^k}{1-K} d(\Phi(x_0), x_0), \\ \forall k \in \mathbf{N}, & \quad d(x^{(k)}, x_*) \leq K^k d(x_0, x_*). \end{aligned}$$

La suite  $(x^{(k)})_{k \in \mathbf{N}}$  est appelée suite des itérées de Picard.

**Remarque 2** C'est un théorème constructif. On peut approcher  $x_*$  par les itérées de Picard. La première estimation a l'avantage de ne pas dépendre de  $x_*$ . On peut donc l'utiliser pour arrêter un algorithme d'évaluation de  $x_*$ . Elle quantifie le fait qu'ici si l'on résout presque l'équation, on est proche de la solution.

*Démonstration.* Si  $x$  et  $x'$  sont deux points fixes, alors on déduit  $d(x, x') \leq K d(x, x')$ , c'est-à-dire  $(1 - K)d(x, x') \leq 0$ . D'où l'unicité.

Comme  $X$  est non vide et que  $\Phi$  est continue, il suffit de montrer que toute suite d'itérés de Picard converge pour déduire l'existence d'un point fixe.

Soit  $(x^{(k)})_{k \in \mathbf{N}}$  une suite d'itérés de Picard partant d'un certain  $x_0$ . On a par une récurrence immédiate, pour tout  $k \in \mathbf{N}$ ,  $d(x^{(k+1)}, x^{(k)}) \leq K^k d(\Phi(x_0), x_0)$ . D'où par l'inégalité triangulaire, pour tout  $k \geq \ell$ ,

$$d(x^{(k)}, x^{(\ell)}) \leq \sum_{j=\ell}^{k-1} K^j d(\Phi(x_0), x_0) \leq \sum_{j=\ell}^{+\infty} K^j d(\Phi(x_0), x_0) = \frac{K^\ell}{1-K} d(\Phi(x_0), x_0).$$

Cela donne que la suite  $(x^{(k)})_{k \in \mathbf{N}}$  est de Cauchy et, en passant à la limite, la première estimation. La seconde se déduit d'une récurrence triviale. ■

Souvent on applique le résultat à une boule fermée d'un espace de Banach, avec  $\Phi$  la restriction d'une application  $\mathcal{C}^1$  dans un voisinage de ce fermé. La borne Lipschitz se déduit alors du théorème des accroissements finis. Comme la condition n'est pas invariante par changement de norme équivalente, pour certaines applications le lemme suivant joue un rôle crucial.

**Lemme 3** Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach réel ou complexe,  $\|\cdot\|$  la norme d'opérateur associée,  $A \in \mathcal{L}(X)$  et  $r \geq 0$ . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

1.  $r \geq \rho(A)$ , où  $\rho(A)$  est le rayon spectral<sup>1</sup> (complexe<sup>2</sup>) de  $A$ .
2. Pour tout  $r' > r$ , il existe  $C \geq 1$  tel que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\|A^n\| \leq C (r')^n$ .
3. Pour tout  $r' > r$ , il existe  $\|\cdot\|_*$  une norme équivalente à  $\|\cdot\|$  telle que la norme d'opérateur associée  $\|\cdot\|_*$  vérifie  $\|A\|_* \leq r'$ .

*Démonstration.* Le fait que 1. implique 2. provient directement de la formule de Cauchy

$$A^n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} z^n (zI_d - A)^{-1} dz, \quad n \in \mathbf{N},$$

où  $\gamma$  est un lacet simple décrivant positivement le bord de  $B(0, r)$ .

Le fait que 3. implique 2. provient du fait que  $\sigma(A) \subset \overline{B}(0, \|A\|_*)$  pour toute norme d'opérateur  $\|\cdot\|_*$ .

Pour montrer que 2. implique 3., il suffit de définir  $\|\cdot\|_*$  par

$$\forall x \in X, \quad \|x\|_* := \sup_{k \in \mathbf{N}} \frac{\|A^k x\|}{(r')^k}.$$

■

Bien que cela ne joue pas de rôle ici, notons en passant que ce lemme possède un équivalent adapté aux exponentielles plutôt qu'aux puissances.

Du lemme précédent on déduit un résultat permettant d'assurer qu'un point fixe peut être approché par des itérés de Picard si on part déjà assez proche.

**Proposition 4** Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach réel ou complexe,  $\Omega \subset X$  un ouvert,  $\Phi : \Omega \rightarrow X$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $x_*$  un point fixe de  $\Phi$  tel que  $\rho(d\Phi(x_*)) < 1$ .

Alors pour tout  $K \in ]\rho(d\Phi(x_*)), 1[$ , il existe  $\|\cdot\|_*$  une norme équivalente à  $\|\cdot\|$  et un rayon  $R > 0$  tels que  $\Phi(\overline{B}_{\|\cdot\|_*}(x_*, R)) \subset \overline{B}_{\|\cdot\|_*}(x_*, R)$  et  $\Phi|_{\overline{B}_{\|\cdot\|_*}(x_*, R)}$  soit  $K$ -Lipschitzienne.

*Démonstration.* Soit  $K \in ]\rho(d\Phi(x_*)), 1[$ . Donnons-nous  $\|\cdot\|_*$  telle que

$$\|d\Phi(x_*)\|_* \leq \frac{\rho(d\Phi(x_*)) + K}{2}.$$

---

1. Attention : en dimension infinie, le spectre n'est pas réduit aux valeurs propres ; on ne peut pas utiliser de polynôme caractéristique ; le spectre n'est pas nécessairement discret ; on ne peut pas se ramener au cas triangulaire.

2. C'est-à-dire le rayon de spectral du complexifié, si nécessaire. Dans la suite on le sous-entendra.

Il existe  $R$  tel que  $\overline{B}_{\|\cdot\|_*}(x_*, R) \subset \Omega$  et

$$\sup_{x \in \overline{B}_{\|\cdot\|_*}(x_*, R)} \|\mathrm{d}\Phi(x)\|_* \leq K.$$

Un tel  $R$  convient. ■

Le théorème de point fixe de Banach est l'outil fondamental caché derrière presque tous les résultats abstraits assurant existence, unicité et stabilité des solutions d'une équation. Il est en revanche plus rare d'arriver à utiliser concrètement les approximations de Picard pour approcher des solutions.

Il y a au moins deux exceptions notables que l'on détaille ci-dessous.

## 1.2 La méthode du gradient à pas fixe

Soit  $d \in \mathbf{N}^*$ ,  $\Omega \subset \mathbf{R}^d$  ouvert et  $V : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ .

Pour  $h > 0$ , on s'intéresse à la fonction

$$\Phi_h : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d, \quad x \mapsto x - h \nabla V(x)$$

et à ses itérés de Picard. Les points fixes de  $\Phi_h$  sont les points critiques de  $V$ . Comme on se déplace dans la direction opposée au gradient, on s'attend plutôt à ce qu'itérer  $\Phi_h$  fasse baisser les valeurs de  $V$  (même si ce n'est pas toujours vrai) et à ne pouvoir approcher que des points de minimum local strict.

**Proposition 5** *Soit  $d \in \mathbf{N}^*$ ,  $\Omega \subset \mathbf{R}^d$  ouvert,  $V : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $x_*$  un point critique de  $V$  tel que  $A_* := \text{Hess } V(x_*)$  soit définie positive.*

*Alors pour tout*

$$0 < h < \frac{2}{\rho(A_*)},$$

*et tout*

$$K \in ]\max(1 - h \min_{\lambda \in \sigma(A_*)} \lambda; |h \rho(A_*) - 1|), 1[$$

*il existe  $R$  tel que, pour la norme  $\ell^2$  canonique,  $\Phi(\overline{B}(x_*, R)) \subset \overline{B}(x_*, R)$  et  $\Phi|_{\overline{B}(x_*, R)}$  est  $K$ -Lipschitzienne.*

*Démonstration.* La première remarque est que comme les opérateurs que l'on manipule sont auto-adjoints pour la norme  $\ell^2$  canonique, donc diagonalisables en base orthonormée pour cette structure, on a que pour cette norme leur norme d'opérateur coïncide avec le rayon spectral. On peut donc choisir cette norme comme norme  $\|\cdot\|_*$  dans la proposition 4.

Pour appliquer la proposition 4, on note que pour tout  $h > 0$ ,

$$\mathrm{d}\Phi_h(x_*) = \text{Id} - h A_*, \quad \sigma(\mathrm{d}\Phi_h(x_*)) = \{1 - h \lambda; \lambda \in \sigma(A_*)\},$$

et qu'en particulier

$$\rho(\mathrm{d}\Phi_h(x_*)) = \max(1 - h \min_{\lambda \in \sigma(A_*)} \lambda; |h \rho(A_*) - 1|), \quad (\rho(\mathrm{d}\Phi_h(x_*)) < 1 \Leftrightarrow 0 < h < \frac{2}{\rho(A_*)}).$$

■

La proposition montre qu'au voisinage d'un point de minimum local strict la méthode de gradient à pas fixe converge pourvu que la longueur du pas soit assez petite, avec un erreur d'ordre 1. En considérant  $V : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ , il est facile de vérifier que la condition sur le pas est optimale.

La terminologie d'*erreur de convergence d'ordre 1* vient du fait que l'estimation entre l'erreur à un rang et celle au rang suivant est linéaire. La dépendance de l'erreur en le rang est en revanche géométrique.

### 1.3 Le schéma d'Euler implicite

Soit  $d \in \mathbf{N}^*$ ,  $\Omega \subset \mathbf{R}^d$  ouvert et  $f : \mathbf{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On considère  $u_0 \in \Omega$ ,  $I \subset \mathbf{R}_+$  un intervalle contenant 0 et  $u : I \rightarrow \Omega$ , vérifiant

$$u(0) = u_0 \quad \text{et} \quad (\forall t \in I, u'(t) = f(t, u(t)),).$$

Le schéma d'Euler explicite (à pas de temps constant) propose pour un pas de temps  $h > 0$  fixé de définir  $(u_h^{(k)})_k$  par

$$u_h^{(0)} = u_0, \quad \text{et} \quad (\text{tant que } u_h^{(k)} \in \Omega, u_h^{(k+1)} = u_h^{(k)} + h f(kh, u_h^{(k)}))$$

pour obtenir des approximations de  $(u(kh))_k$  lorsque  $h \rightarrow 0$ . L'analyse de convergence assure que pour tout  $T > 0$  tel que  $[0, T] \subset I$ , il existe  $h_0 > 0$  et  $C_0$  tel que pour tout  $0 < h \leq h_0$ ,  $u_h^{(k)}$  est défini tant que  $kh \leq T$  et  $\|u_h^{(k)} - u(kh)\| \leq C_0 h$ .

On peut se poser des questions plus subtiles. Notamment lorsque l'on connaît certains comportements asymptotiques de  $u$  se pose la question de savoir si le schéma les respecte. Explicitement, quand on a une autre limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  en tête, on peut se demander comment commute les limites  $h \rightarrow 0$  et  $\varepsilon \rightarrow 0$  et si les constantes  $h_0$  et  $C_0$  peuvent être choisies uniformément par rapport à  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ .

On peut se convaincre facilement que le schéma d'Euler explicite échoue à respecter les deux asymptotiques suivantes :

- la limite  $t \rightarrow \infty$  pour  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, (t, u) \mapsto -u$  ;
- la limite  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  pour  $f_\varepsilon : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, (t, u) \mapsto -\frac{1}{\varepsilon} u$ .

Remplacer le schéma d'Euler explicite (basé sur la méthode de quadrature des rectangles à gauche) par le schéma d'Euler implicite (basé sur la méthode de quadrature des rectangles à droite) résout ces problèmes. Le schéma d'Euler implicite (à pas de temps constant) propose pour un pas de temps  $h > 0$  fixé de définir  $(u_h^{(k)})_k$  par

$$u_h^{(0)} = u_0, \quad \text{et} \quad (\text{tant que } u_h^{(k)} \in \Omega, u_h^{(k+1)} = u_h^{(k)} + h f((k+1)h, u_h^{(k+1)})).$$

Cela demande à chaque pas de temps de résoudre une équation de point fixe *a priori* non linéaire. On peut cependant noter que la constante de Lipschitz du point fixe est  $h$  fois celle de  $f$  et est donc strictement inférieure à 1 pour  $h$  assez petit<sup>3</sup>. Comme par ailleurs seule une précision finale en  $\mathcal{O}(h)$  est requise, on peut se contenter de calculer une approximation de  $u_h^{(k+1)}$  par un petit nombre d'itérés de Picard.

---

3. Malheureusement cette analyse grossière n'est pas suffisante pour traiter les cas raides mentionnés ci-dessus.

## 2 Équations non linéaires

### 2.1 Le théorème d'inversion locale

Du point de vue de la recherche de solutions d'équations, le théorème d'inversion locale sert surtout à assurer qu'une solution non dégénérée est isolée et dépend de manière régulière du second membre de l'équation.

#### **Théorème 6 Théorème d'inversion locale.**

Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach réel ou complexe,  $\Omega$  un ouvert de  $X$  et  $f : \Omega \rightarrow X$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Soit  $a \in \Omega$  tel que  $df(a)$  soit inversible. Alors il existe un voisinage ouvert  $\Omega' \subset \Omega$  de  $a$  et un voisinage ouvert  $U$  de  $f(a)$  tel que

$$\Omega' \rightarrow U, \quad x \mapsto f(x)$$

définisse un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^1$ , c'est-à-dire une bijection  $\mathcal{C}^1$  de réciproque  $\mathcal{C}^1$ .

Si de plus  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  pour un certain  $k \in \mathbf{N}^*$ , alors la réciproque de  $f|_{\Omega'}$  l'est également.

**Remarque 7** Dans le cas complexe, on a en fait montré un théorème d'inversion locale holomorphe.

**Remarque 8** En appliquant le théorème à une application  $f$  définie sur un produit et de la forme  $(y, z) \mapsto (y, F(y, z))$  on obtient un corollaire appelé théorème des fonctions implicites.

*Démonstration.* Il s'agit de profiter du fait que l'on peut inverser  $X \rightarrow X, x \mapsto f(a) + df(a)(x - a)$  avec  $X \rightarrow X, y \mapsto a + (df(a))^{-1}(y - f(a))$ . Ainsi notons que pour tout  $b \in X$ , l'équation  $f(x) = b$  en  $x \in \Omega$  se réécrit  $f(a) + df(a)(x - a) = b - f(a) - (f(x) - f(a) - df(a)(x - a))$ , donc  $x = \phi_b(x)$  avec

$$\phi_b : \Omega \rightarrow X, \quad x \mapsto a + (df(a))^{-1}(b - f(a) - (f(x) - f(a) - df(a)(x - a))).$$

Comme pour tout  $b$ ,  $d\phi_b$  est indépendant de  $b$  et continue et  $d\phi_b(a) = 0$ , il existe  $R_0$  tel que  $\overline{B}(a, R_0) \subset \Omega$  et, pour tout  $b$ ,

$$\sup_{x \in \overline{B}(a, R_0)} \|d\Phi_b(x)\| \leq \frac{1}{2}. \quad (2.1)$$

On en déduit que si  $\|b - f(a)\| \leq \frac{1}{4}R_0$  alors  $\Phi_b(\overline{B}(a, R_0)) \subset \overline{B}(a, \frac{3}{4}R_0)$  et  $(\Phi_b)|_{\overline{B}(a, R_0)}$  est  $\frac{1}{2}$ -Lipschitzienne. Cela montre qu'en introduisant les ouverts  $U = B(f(a), \frac{1}{4}R_0)$  et  $\Omega' = f^{-1}(U) \cap B(a, R_0)$ , on obtient une bijection  $f : \Omega' \rightarrow U$ . Notons  $g$  sa réciproque.

Montrons la régularité de  $g$ . Puisque  $d\Phi_b(x) = -(df(a))^{-1}(df(x) - df(a))$ , la condition (2.1) montre, que pour tout  $x \in \overline{B}(a, R_0)$ ,  $df(x)$  est inversible. Fixons maintenant  $b \in U$  et montrons que  $g$  est différentiable en  $b$  avec

$$dg(b) = (df(g(b)))^{-1}. \quad (2.2)$$

Pour cela, il faut montrer que

$$g(b+h) \stackrel{h \rightarrow 0}{\equiv} g(b) + (df(g(b)))^{-1}(h) + o(h)$$

et donc, grâce à l'estimation de comparaison du théorème de point fixe appliquée à  $\varphi_{b+h}$ , il suffit de montrer que

$$\varphi_{b+h}(g(b) + (df(g(b)))^{-1}(h)) - (g(b) + (df(g(b)))^{-1}(h)) \stackrel{h \rightarrow 0}{\equiv} o(h).$$

Or

$$\begin{aligned}
& \varphi_{b+h}(g(b) + (df(g(b)))^{-1}(h)) - (g(b) + (df(g(b)))^{-1}(h)) \\
&= (df(a))^{-1}(b + h - f(g(b) + (df(g(b)))^{-1}(h))) \\
&= (df(a))^{-1}(f(g(b) + (df(g(b)))^{-1}(h)) - f(g(b) + (df(g(b)))^{-1}(h))) .
\end{aligned}$$

Le résultat découle donc de la différentiabilité de  $f$  en  $g(b)$ .

Le résultat sur la régularité  $\mathcal{C}^k$  est une simple récurrence basée sur la formule (2.2). ■

## 2.2 La méthode de Newton

On souhaite formuler un problème de point fixe pour la résolution de  $f(x) = b$  qui ne nécessite pas de connaître une solution d'un problème proche. La méthode de Newton va résoudre ce problème et en plus fournir une convergence bien plus rapide que celles associées aux itérations de Picard génériques. Essentiellement, au lieu de figer le point où l'on inverse le linéarisé, on y inverse le linéarisé au point où l'on se trouve.

La méthode consiste donc à calculer les itérés de la fonction

$$\Phi_b : \Omega' \rightarrow X, \quad x \mapsto x - (df(x))^{-1}(f(x) - b)$$

définie sur

$$\Omega' = \{ x \in \Omega ; df(x) \text{ inversible} \} .$$

Ses points fixes sont les solutions de  $f(x) = b$  avec  $df(x)$  inversible. Sa propriété remarquable est qu'en tout point  $x \in \Omega'$  où  $f(x) = b$ , on a que  $d\Phi(x)$  est nulle.

Il est primordial de noter d'un point de vue pratique que pour calculer les approximations  $(x^{(k)})_k$  il ne faut surtout pas calculer les inverses  $(df(x^{(k)}))^{-1}$ , mais résoudre les systèmes

$$(df(x^{(k)})) z^{(k+1)} = f(x^{(k)}) - b$$

puis poser

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - z^{(k+1)} .$$

**Proposition 9** Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach réel ou complexe,  $\Omega$  un ouvert de  $X$  et  $f : \Omega \mapsto X$  de classe  $\mathcal{C}^2$ .

Soit  $b \in X$  et  $a \in \Omega$  tel que  $f(a) = b$  et  $df(a)$  soit inversible. Considérons  $\Phi_b$  la fonction d'itération de la méthode de Newton associée à la résolution de  $f(x) = b$ .

Alors il existe  $R_0 > 0$  et  $C_0 > 0$  tels quel  $\overline{B}(a, R_0) \subset \Omega'$ ,  $\Phi(\overline{B}(a, R_0)) \subset \overline{B}(a, R_0)$ , et pour tout  $x_0 \in \overline{B}(a, R_0)$ , la suite  $(x^{(k)})_{k \in \mathbf{N}}$  des itérées à partir de  $x_0$  vérifie pour tout  $k \in \mathbf{N}$

$$\|x^{(k+1)} - a\| \leq C_0 \|x^{(k)} - a\|^2, \tag{2.3}$$

$$\|x^{(k)} - a\| \leq \frac{1}{C_0} (C_0 \|x_0 - a\|)^{2^k}. \tag{2.4}$$

La proposition montre qu'au voisinage d'une solution non dégénérée la méthode de Newton converge avec une *erreur d'ordre 2*. La terminologie d'*erreur de convergence d'ordre 2* vient du fait que l'estimation entre l'erreur à un rang et celle au rang suivant est quadratique. Essentiellement, pour une erreur d'ordre

1 à chaque étape on augmente d'une quantité fixe le nombre de décimales justes, alors que pour une erreur d'ordre 2 on la double à chaque étape. Plus généralement, il y a une énorme différence de rapidité entre les convergences d'ordre 1 et celles d'ordre  $\alpha > 1$ .

On notera que l'estimation (2.4) ne montre de la convergence que si  $C_0 \|x_0 - a\| < 1$ .

*Démonstration.* Notons que pour tout  $x \in \Omega'$ ,

$$\Phi_b(x) - a = (\mathrm{d}f(x))^{-1}(f(a) - (f(x) + \mathrm{d}f(x)(a - x))).$$

On en déduit qu'il existe  $C_0$  et  $R > 0$  tel que  $\overline{B}(a, R) \subset \Omega'$  et pour tout  $x \in \overline{B}(a, R)$ ,

$$\|\Phi_b(x) - a\| \leq C_0 \|x - a\|^2.$$

En choisissant  $R_0 \in ]0, R]$  tel que  $C_0 R_0 \leq 1$  on obtient le résultat, (2.4) se déduisant de (2.3) par une récurrence immédiate. ■

Il s'agit d'une excellente méthode. On peut cependant être gêné par le fait qu'il faille calculer des différentielles de  $f$ . En dimension  $d$ , on peut mettre en place des méthodes dites de quasi-Newton, itératives d'ordre  $d + 1$  où l'on utilise les  $d + 1$  valeurs précédentes pour construire une approximation de la différentielle.

En dimension 1, une telle méthode s'appelle *méthode de la sécante* et s'écrit

$$x_h^{(0)} = x_0, \quad x_h^{(1)} = x_1, \quad \text{et} \quad \left( \text{tant que } x^{(k+1)} \in \Omega \text{ et } f(x^{(k+1)}) \neq f(x^{(k)}), \right. \\ \left. x^{(k+2)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})} (f(x^{(k)}) - b) \right).$$

Proche de  $a$  tel que  $f(a) = b$ ,  $f'(a) \neq 0$ , on montre une estimation d'erreur locale du type

$$\|x^{(k+2)} - a\| \leq C_0 \|x^{(k)} - a\| \|x^{(k+1)} - a\|,$$

conduisant à une estimation globale

$$\|x^{(k)} - a\| \leq \frac{1}{C_0} (C_0 \max(\|x_0 - a\|, \|x_1 - a\|))^{m_k}$$

avec  $(m_k)_k$  la suite de Fibonacci partant de  $m_0 = 1$ ,  $m_1 = 1$ . Puisque

$$\frac{m_{k+1}}{m_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad m_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k,$$

en un certain sens la méthode est d'ordre  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \in ]1, 2[$ . Cela reste très rapide.

Notons que pour illustrer les ordres de convergence graphiquement il est crucial d'avoir en tête que l'œil ne reconnaît bien que les graphes des fonctions affines. Pour les méthodes d'ordre 1, il faut donc tracer les couples  $(\|x^{(k)} - a\|, \|x^{(k+1)} - a\|)$  pour voir une droite de pente la constante de Lipschitz optimale, ou les couples  $(k, \ln(\|x^{(k)} - a\|))$  pour voir une droite de pente le logarithme de la constante de Lipschitz optimale. Pour les méthodes d'ordre  $\alpha > 1$ , il faut tracer les couples  $(\ln(\|x^{(k)} - a\|), \ln(\|x^{(k+1)} - a\|))$  pour voir une droite de pente l'ordre  $\alpha$ , ou les  $(k, \ln \ln(\|x^{(k)} - a\|))$  pour voir une droite de pente le logarithme de l'ordre  $\alpha$ . Par ailleurs, on peut calculer des ordres ou des constantes de Lipschitz expérimentaux en appliquant une régression linéaire sur les couples en question (en coupant les premières valeurs et les dernières<sup>4</sup> valeurs si elles ne semblent pas être alignées).

4. Pour les dernières valeurs, ces anomalies sont dues au fait que l'erreur est tellement petite que les erreurs dans les calculs deviennent sensibles.

### 2.3 Une méthode globale

L'un des défauts de la méthode de Newton est qu'elle est fondamentalement locale.

Il existe quelques méthodes globales, de nature topologique plutôt que différentielle, très sensibles à la dimension. Elles sont évidemment d'ordre 1, donc plus lentes, mais on peut les combiner avec la méthode de Newton une fois suffisamment proche d'une solution.

L'archétype en est la méthode de dichotomie pour les fonctions d'une variable réelle. Elle est basée sur le fait que pourvu qu'une fonction ne s'annule pas au bord d'un segment, l'on sait compter modulo 2 le nombre de zéros (avec multiplicité) de cette fonction dans le segment à partir des valeurs de la fonction aux bords.

#### Proposition 10 Méthode de dichotomie.

Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle,  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  continue,  $b \in \mathbf{R}$  et  $(x_0^{(-)}, x_0^{(+)}) \in I^2$  tel que  $f(x_0^{(-)}) < b$  et  $f(x_0^{(+)}) > b$ . Définissons par récurrence  $((x_-^{(k)}, x_+^{(k)}))_{k \in \mathbf{N}} \in (I^2)^{\mathbf{N}}$  par  $(x_-^{(0)}, x_+^{(0)}) = (x_0^{(-)}, x_0^{(+)})$  et pour tout  $k \in \mathbf{N}$

$$(x_-^{(k)}, x_+^{(k)}) = \begin{cases} \left( \frac{x_-^{(k)} + x_+^{(k)}}{2}, x_+^{(k)} \right) & \text{si } f\left(\frac{x_-^{(k)} + x_+^{(k)}}{2}\right) \leq b, \\ \left( x_-^{(k)}, \frac{x_-^{(k)} + x_+^{(k)}}{2} \right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors les suites  $((x_-^{(k)})_{k \in \mathbf{N}}$  et  $(x_+^{(k)})_{k \in \mathbf{N}}$  sont monotones, elles convergent vers une même limite  $a \in I$  telle que  $f(a) = b$  et l'on a, pour tout  $k \in \mathbf{N}$ ,

$$a \in [x_-^{(k)}, x_+^{(k)}], \quad |x_-^{(k)} - x_+^{(k)}| = |x_0^{(-)} - x_0^{(+)}| \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

La démonstration découle directement du théorème des suites adjacentes. La proposition démontre le théorème des valeurs intermédiaires.

Pour une fonction holomorphe  $f$  sur un ouvert connexe par arcs  $\Omega$  de  $\mathbf{C}$ , on peut de la même manière utiliser que si  $f$  ne s'annule pas sur un lacet simple dans  $\Omega$ , alors on peut compter son nombre de zéros avec multiplicité à l'intérieur du lacet.

Une généralisation à la dimension  $d$  aboutit à la notion de degré topologique et est directement liée au nombre de manières d'envoyer  $\mathbf{S}^{d-1}$  dans  $\mathbf{S}^{d-1}$ .

### Références

- [BG14] S. Benzoni-Gavage. *Calcul différentiel et équations différentielles*. Dunod, 2014.
- [Fil13] F. Filbet. *Analyse numérique - Algorithme et étude mathématique*. Dunod, 2013.
- [Rou15] F. Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*. Cassini, 2015.
- [Sch04] M. Schatzman. *Analyse numérique*. Dunod, 2004.